отделения Российской академии наук (интеграционный проект СО РАН-УрО № 85).

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Dykhta V. A. Hamilton–Jacobi inequalities in the optimal control theory: smooth duality and control improvement. For classical optimal control problem with terminal constraints, new variants of the Caratheodory and Krotov types global necessary and sufficient optimality conditions are proposed and compared. In a spirit of so-called Hamilton-Jacobi canonical optimality theory, these conditions are obtained by using some sets of strongly monotone solutions to the corresponding Hamilton-Jacobi inequality and have forms of duality relations between the optimal control problem and an extremal problems on the sets of strongly monotone Lyapunov type functions. A control improvement procedure is proposed using the Hamilton-Jacobi inequality for weakly monotone functions and the method of proximal (or extremal) aiming.

Key words: monotone Lyapunov type functions; Hamilton-Jacobi inequalities; global optimality conditions; smooth duality; control improvement.

УДК 519.83

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

© А. Ф. Клейменов

Ключевые слова: неантагонистическая позиционная дифференциальная игра; стратегии; движения; равновесное решение по Нэшу; неулучшаемое по Паретто решение; решение по Штакельбергу.

Приведены основные идеи и результаты теории неантагонистических позиционных дифференциальных игр.

1. Динамика.

Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x, u_i\right), \quad m \geqslant 2 \tag{1}$$

$$x \in R^n,\ t \in [t_0, \vartheta],\ u_i \in P_i \in compR^{p_i},$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где управление u_i подчинено i-ому игроку. Пусть заданы l показателей качества вида

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), i = 1, ...m \tag{2}$$

где $l \leqslant m$.

Предполагаем,что функции f_i непрерывны по совокупности аргументов, липшицевы по x и удовлетворяют условию продолжимости решений на $[t_0, \vartheta]$, функции σ_i-непрерывны.

Случай $l = m$

1) $I_1 = ... = I_m = I$ - задача командного управления (team problem).

2) $I_1 = ... = I_k = I, \;\; I_{k+1} = ... = I_m = -I, \;\; 1 \leqslant k \leqslant m-1$ - групповая антагонистическая дифференциальная игра (групповая АДИ).

3) остальные случаи - неантагонистическая дифференциальная игра (НАДИ).

Случай $l < m$

4) $I_1 = ... = I_l = I$ - задача командного управления с неизвестной динамической помехой, может трактоваться как групповая АДИ (при $l = 1$ - как обычная АДИ).

5) остальные случаи - НАДИ при наличии динамических помех.

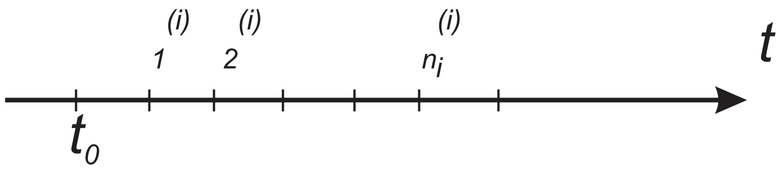
2. Формализация стратегий и движений в НАДИ.

Мы используем формализацию стратегий и движений в неантагонистических позиционных дифференциальных играх, аналогичную формализации в антагонистических позиционных дифференциальных играх [1, 2] с введением дополнительных технических деталей [3].

Позиционная стратегия игрока i: $U_i \div \{u_i(t,x,\varepsilon), \; \beta_i(\varepsilon)\}, \; i = 1,2,...m$, где $u_i(\cdot)$ - произвольная функция, зависящая от позиции (t,x) и параметра точности ε со значениями в множестве P_i. Функция $\beta_i : (0,\infty) \to (0,\infty)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При фиксированном ε величина $\beta_i(\varepsilon)$ есть верхняя граница шага разбиения отрезка $[t_0, \theta]$, которое выбирает игрок i при формировании аппроксимационнных движений.

Рассматриваем **движения** двух типов: **аппроксимационные** и **предельные**.

Аппроксимационное движение $x[\cdot, t_0, x_0, U_1, \varepsilon_1, \Delta_1, ..., U_m, \varepsilon_m, \Delta_m]$ при фиксированных значениях параметров точности игроков $\varepsilon_1, ...\varepsilon_m$, фиксированных разбиениях $\Delta_1 = \{t_i^{(1)}\}, ..., \; \Delta_m = \{t_k^{(m)}\}$ отрезка $[t_0, \theta]$, выбираемых каждым игроком при условии $\delta(\Delta_i) \leqslant \beta_i(\varepsilon_i), i = 1, ..., m$. Здесь $\delta(\Delta_i) = \max\limits_s (t_{s+1}^{(i)} - t_s^{(i)})$.



Предельное движение, порожденное набором стратегий $(U_1, ...U_m)$ из начальной позиции (t_0, x_0), есть непрерывная функция $x[t] = x[t, t_0, x_0, U_1, ...U_m]$, являющаяся равномерным пределом последовательности аппроксимационных движений

$$\{x[t, t_0^s, x_0^s, U_1, \varepsilon_1^s, \Delta_1^s, ..., U_m, \varepsilon_m^s, \Delta_m^s]\}$$

при $s \to \infty, \; \varepsilon_i^s \to 0, \; t_0^s \to t_0, \; x_0^s \to x_0, \;\; \delta(\Delta_i^s) \leqslant \beta_i(\varepsilon_i^s), \; i = 1..., m.$

Набор стратегий $(U_1, ...U_m)$ порождает непустое компактное (в метрике пространства $C[t_0, \theta]$) множество $X(t_0, x_0, U_1, ...U_m)$, состоящее из предельных движений $x[\cdot, t_0, x_0, U_1, ...U_m]$.

3. Выбор понятия решения.

Равновесное по Нэшу решение (N-решение):

О п р е д е л е н и е 1. Набор стратегий $(U_1^N, ...U_m^N)$ образует N -решение, если

$$\forall x^*(\cdot) \in X(t_0, x_0, U_1^N, ...U_m^N), \;\; \forall \; \tau \in [t_0, \vartheta), \;\; \forall i \in \overline{1, m}$$

$$\max \sigma_i(x(\vartheta, \tau, x^*(\tau), U_1^N, ...U_{i-1}^N, U_i, U_{i+1}^N, ...U_m^N)) \leqslant$$

$\min \sigma_i(x(\vartheta, \tau, x^*(\tau), U_1^N, ..., U_i^N, ...U_m^N))$,
где операции max и min берутся по соответствующим множествам предельных движений.
Неулучшаемое (по Парето) *N-решение* (P^*-решение):

О п р е д е л е н и е 2. *N-решение* $(U_1^{P^*}, ...U_m^{P^*})$образует$P^*$-решение, если $\forall (U_1^N, ...U_m^N)$ либо при каждом i, $i = 1, ..., m$, выполняются равенства

$$\sigma_i(x(\vartheta, U_1^N, ..., U_i^N, ...U_m^N)) = \sigma_i(x(\vartheta, U_1^P, ...U_m^P)),$$

либо найдется j , такое,что выполняется неравенство

$$\sigma_j(x(\vartheta, U_1^N, ..., U_i^N, ...U_m^N)) < \sigma_j(x(\vartheta, U_1^{P^*}, ...U_m^{P^*}))$$

О п р е д е л е н и е 3. H_i -решение определяется как P^***- решение, наилучшее для** $i-$*игрока.*

Решение по Штакельбергу в иерархической игре $(m = 2)$ *с лидером i-ым игроком* (S_i-решение)

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v) \tag{3}$$

Определим S_1-решение.

Предположение 1. Первый игрок-лидер объявляет стратегию
$U^* \div\ u^*(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$ до начала игры.

Предположение 2. Второй игрок - ведомый рационален. Это означает, что он выбирает свою стратегию из условия

$\sigma_2(x(\vartheta, t_0, x_0, U^*, V)) \longrightarrow \max\limits_V$

Пусть $K_2(U^*)-$множество рациональных стратегий, соответствующих объявленной стратегии первого игрока U^*.

Ставится задача
$\sigma_1(x(\vartheta, t_0, x_0, U, V \in K_2(U))) \longrightarrow \max\limits_U$,
и пусть $(U^{S1}$ — решение этой задачи, тогда

О п р е д е л е н и е 4. Пара стратегий $(U^{S1}, V \in K_2(U^{S1}))$ образует S_1-решение.

Аналогично определяется S_2-решение.

4. Расширенный набор элементов игры.

1.Уравнения движения, начальные условия, множество игроков, ограничения на их управления.
2.Формализация стратегий и порождаемых ими движений.
3.Функции выигрыша.
Элементы 1-3 составляют нормальную форму игры.
4.Множество разрешенных коалиций отклонения (РКО) и для каждой РКО-множество разрешенных моментов отклонения (РМО).
5.Описание поведения игроков, не вошедших в отклонившуюся коалицию, после отклонения этой коалиции.

О п р е д е л е н и е 5. Набор стратегий называем **допустимым**, если ни одной РКО ни в один РМО невыгодно отклоняться от набора.
Множество допустимых наборов обозначим через D.
6.Описание дополнительных условий на допустимые наборы стратегий $D^* \subset D$.
7.Описание последовательности (порядка), в котором игроки осуществляют выбор набора стратегий.

U-решение

Обозначим через $T(D^*)$ множество неулучшаемых (по Парето) элементов множества D^* относительно показателей $I_1, I_2, ..., I_m$.

О п р е д е л е н и е 6. U - решением называем любой элемент множества $T(D^*)$, если выбор игроками стратегий одновременный. Если же выбор иерархический, то сначала находим множество $T^1 \subset T(D^*)$ всех неулучшаемых элементов для игроков верхнего уровня иерархии; далее находим множество $T^2 \subset T^1$ всех неулучшаемых элементов для игроков следующего уровня иерархии и т.д.; в этом случае U-решением называем любой элемент последнего множества.

U-решение обладает тем свойством, что при соответствующем подборе расширенного набора элементов игры можно добиться совпадения его с каждым из описанных выше понятий решения игры.

Проиллюстрируем это положение для $m = 2$.

В варианте I, в котором
4. Множество РКО: $\{1\}$, $\{2\}$; РМО - $[t_0, \theta]$.
5. Неуклонисты выбирают любую стратегию.
6. Доп. условий нет.
7. Выбор одновременный.
U-решения совпадают с P^*-решениями.

В варианте II, отличающемся от I элементом 7:
7. Игрок i выбирает первым
U-решения совпадают с H_i-решениями.

В варианте III, отличающемся от II элементом 4:
4.Множество РКО: $3 - i$; РМО - $[t_0, \theta]$.
U-решения совпадают с S_i-решениями.
В варианте IV, отличающемся от I элементом 4.
4. Множество РКО пусто.
U-решения совпадают с P-решениями (решениями в "статической" игре).

По сути дела получена классификация решений в неантагонистической дифференциальной позиционной игре. По предлагаемой схеме можно генерировать новые понятия решений. Вернемся снова к игре двух лиц. Динамика игры описывается уравнением (3).

5. Вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1 и Γ_2.

Динамика обеих игр описывается уравнением (3). В игре Γ_1 игрок максимизирует функционал $\sigma_1(x(\theta))$ (2),а игрок 3-i ему противодействует.
Из [2] следует, что обе игры Γ_1 и Γ_2 имеют универсальные седловые точки

$$u^i(t, x, \varepsilon),\ v^i(t, x, \varepsilon), \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

и непрерывные функции цены

$$\gamma_1(t, x) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t, x) \tag{5}$$

Свойство универсальности стратегий означает, что они оптимальны не только для фиксированной начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$, но и для любой позиции $(t_*, x_*) \in G$, рассматриваемой в качестве начальной.

6. Нестандартные задачи управления и оптимального управления

Задача 1. Найти измеримые функции $u(t)$ и $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$, которые порождают траекторию $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$, удовлетворяющую неравенствам

$$\gamma_i(t, x(t)) \leqslant \gamma_i(\theta, x(\theta)),\ t_0 \leqslant t \leqslant \theta,\ i = 1, 2 \tag{6}$$

Задача 2. Для фиксированного $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ найти решение задачи 1, которое максимизирует показатель $\min\limits_{i=1,2} \alpha_i\ \sigma_i(x(\theta))$.

Задача 3.i (i=1,2). Найти решение задачи 1, которое максимизирует показатель $\sigma_i(x(\theta))$.

Задача 4.i (i=1,2). Найти измеримые управления $u(t)$ и $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$, которые порождают траекторию $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$, удовлетворяющую неравенству $\gamma_{3-i}(t, x(t)) \leqslant \gamma_{3-i}(\theta, x(\theta))$, и максимизируют показатель $\sigma_i(x(\theta))$.

Пусть кусочно-непрерывные функции $u^*(t)$ и $v^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ порождают траекторию $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ системы (3).
Рассмотрим стратегии первого и второго игроков

$$U^0 \div \{u^0(t, x, \varepsilon),\ \beta_1^0(\varepsilon)\},\quad V^0 \div \{v^0(t, x, \varepsilon),\ \beta_2^0(\varepsilon)\}, \tag{7}$$

где

$$u^0\,(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} u^*\,(t)\,, & \text{если}\ \ \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi\,(t) \\ u^2(t, x, \varepsilon), & \text{если}\ \ \|x - x^*(t)\| \geqslant \varepsilon\varphi\,(t) \end{cases}, \tag{8}$$

$$v^0\,(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} v^*\,(t)\,, & \text{если}\ \ \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi\,(t) \\ v^1(t, x, \varepsilon), & \text{если}\ \ \|x - x^*(t)\| \geqslant \varepsilon\varphi\,(t) \end{cases}$$

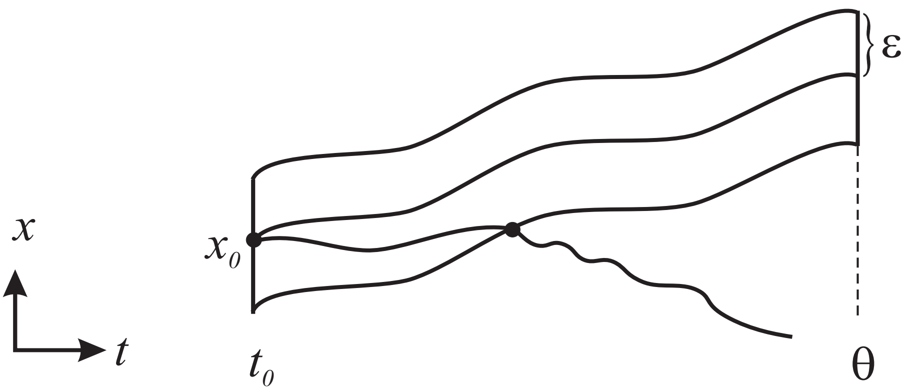
для всех $t \in [t_0, \theta]$.

Функции $\beta_i(\cdot)$ и положительная возрастающая функция $\varphi(\cdot)$ выбраны так, что неравенство

$$\left\|x(t, t_0, x_0, U^0, \varepsilon, \Delta_1, V^0, \varepsilon, \Delta_2) - x^*(t)\right\| < \varepsilon\varphi(t) \tag{9}$$

выполнено при $\varepsilon > 0$, $\delta(\Delta_i) \leqslant \beta_i(\varepsilon)$. Функции $u^{(2)}(\cdot)$ и $v^{(1)}(\cdot)$ определены в (4).

Т е о р е м а 1.[3]. *Пусть управления $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ доставляют решение задачи 1 (или задачи 2, задачи 3.i, задачи 4.i). Тогда пара стратегий (U^0, V^0) (7)$--$(9) есть N-решение (или P^* - решение, H_i-решение, S_i-решение). Обратно, для любого N-решения (или P^*-решения, H_i-решения, S_i-решения) существует эквивалентное решение того же типа в форме (U^0, V^0) (7)$--$(9), где $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ решение задачи 1 (или задачи 2, задачи 3.i, задачи 4.i).*
Теорема 1 устанавливает соответствия между множествами решений задач 1, 2, 3.i, 4.i и множествами N, P^*, H_i, S_i-решений. Эта теорема определяет также структуру решений игры. Теоремы существования N, P^*, H_i, S_i-решений являются следствиями теоремы 1. Отметим, что стратегии $u^{(2)}\,(t, x, \varepsilon)$, $v^{(1)}\,(t, x, \varepsilon)$ можно трактовать как стратегии наказания.



Отметим две главные, на наш взгляд, проблемы, с которыми приходится считаться при использовании решений нэшевского типа.

Первая состоит в том, что решений, как правило, много. И выбор одного решения из множества решений представляет собою сложную задачу с точки зрения мотивации этого выбора. Вторая состоит в том, что нэшевское решение не всегда бывает хорошим в других аспектах. Приведем примеры, иллюстрирующие указанные две проблемы.

7. П р и м е р 1.

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v) \tag{10}$$

Пусть векторное уравнение

$$\ddot{\zeta} = u + v, \quad \zeta \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2 \tag{11}$$

описывает движение материальной точки единичной массы в плоскости (ζ_1, ζ_2) под действием силы $F = u + v$, $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$. Первый (второй) игрок, который распоряжается управлением u (v), стремится максимизировать показатель $\sigma_i(\zeta(\vartheta))$ $(\sigma_2(\zeta(\vartheta)))$, где

$$\sigma_1(\zeta[\vartheta]) = -\left\|\zeta(\vartheta) - a^{(i)}\right\|, a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}),\ i = 1, 2 \tag{12}$$

Здесь $a^{(i)}$, $i = 1, 2$ – заданные целевые точки игроков. Обозначая $y_1 = \zeta_1$, $y_2 = \dot{\zeta}_1$, $y_3 = \zeta_2$, $y_4 = \dot{\zeta}_2$ и делая замену переменных $x_1 = y_1 + (\vartheta - t)y_3$, $x_2 = y_2 + (\vartheta - t)y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$, получаем систему, первое и второе уравнения которой будут

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\vartheta - t)(u_1 + v_1), \\ \dot{x}_2 = (\vartheta - t)(u_2 + v_2) \end{cases} \tag{13}$$

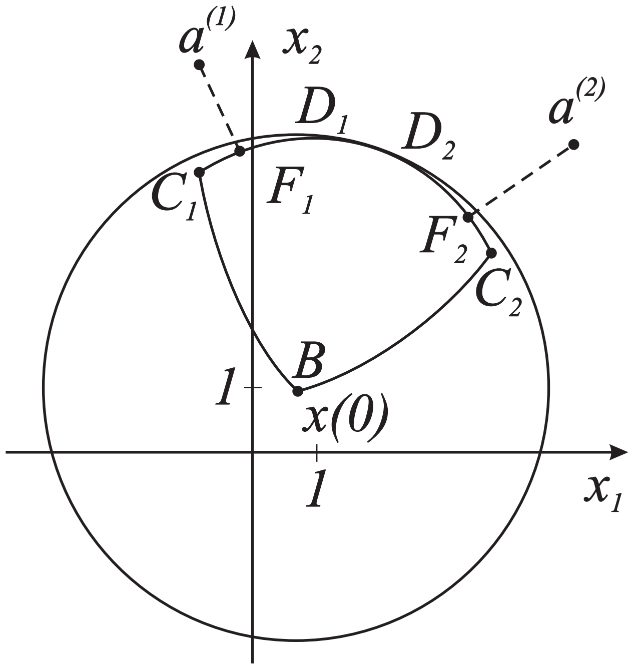
Далее, (11) может быть переписано

$$\sigma_i(x(\vartheta)) = -\left\|x(\vartheta) - a^{(i)}\right\|, x = (x_1, x_2), \quad i = 1, 2 \tag{14}$$

Достаточно рассмотреть только укороченную систему (12) с показателями игроков (13). Пусть заданы следующие начальные условия и значения параметров:

$t_0 = 0$, $\zeta_{01} = 2,2$, $\dot{\zeta}_{01} = -0,8$, $\zeta_{02} = 1,3$, $\dot{\zeta}_{02} = -0,2$, $\vartheta = 2$, $a_1^{(1)} = -1$, $a_2^{(1)} = 5$, $a_1^{(2)} = 5$, $a_2^{(2)} = 4$. Тогда имеем $x_{01} = 0,6$, $x_{02} = 0,9$.

Были построены множества N-решений, P^*-решений, H_i-решений и S_i-решений, которые опишем через множества концов траекторий, порожденных этими решениями. На рисунке круг радиуса 4 с центром в начальной точке $B(0.6,\ 0.9)$ представляет множество достижимости системы (12) в момент $\vartheta = 2$.



Замкнутая кривая $BC_1D_1D_2C_2B$ ограничивает множество концов траекторий, порожденных N-решениями. Кривая $F_1D_1D_2F_2$ есть множество концов траекторий для P^*-решений. Точка F_1 – единственная конечная точка для траектории, порожденной S_1-решением и H_1-решением одновременно. Точка F_2 – единственная точка, порожденная S_2-решением и H_2-решением одновременно.

Видно, что множество N-решений, а также множество P^*-решений содержат много решений. И выбор одного единственного решения представляет собою Проблему 1.

8. П р и м е р 2.

Повторяющаяся биматричная игра 2×2 типа "дилемма заключенного"

Статическая игра

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{кооп} & \text{откл} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{кооп} \\ \text{откл} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Первая стратегия C обоих игроков: кооперироваться. Вторая стратегия D обоих игроков: отклониться от кооперации. N - решением в статической игре является пара (D,D), которая доставляет выигрыш в (-8) единиц обоим игрокам. В то же время выигрыш на наборе (C,C) составляет (-1) ед. у обоих игроков.

Пусть игра повторяется. Если число повторений конечно и заранее известно, то Нэшевским решением будет:(D,D) на каждом шаге. Возникает Проблема 2: как выбирать стратегии, чтобы привести игру как можно ближе к состоянию (C,C)?

9. Разбиение множества позиций в НАДИ.

О п р е д е л е н и е 7. Позиция (t_*, x_*) называется неантагонистической (NA - позицией), если существует траектория $x(t),\ t_* \leqslant t \leqslant \theta,\ x(t_*) = x_*$ системы (3) такая, что функции $\gamma_i(t, x(t))$ (5), $i = 1, 2$ не убывают на $[t_*, \theta]$ и хотя бы для одного i выполняется строгое неравенство

$$\gamma_i(\theta, x(\theta)) > \gamma_i(t_*, x_*)$$

Упомянутую траекторию назовем NA - траекторией.

О п р е д е л е н и е 8. Позиция (t_*, x_*) называется локально антагонистической (LA - позицией), если она не является неантагонистической и существует траектория системы (3) $x(t),\ t_* \leqslant t \leqslant \theta,\ x(t_*) = x_*$ такая, что выполняются неравенства

$$\gamma_i(\theta, x(\theta)) \geqslant \gamma_i(t, x(t)),\ t_* \leqslant t \leqslant \theta, i = 1, 2$$

и, кроме того, по крайней мере одно неравенство является строгим при $t = t_*$.
Упомянутую траекторию назовем LA - траекторией.

О п р е д е л е н и е 9. Позиция (t_*, x_*) называется глобально антагонистической (GA - позицией), если для любой траектория системы (1) $x(t),\ t_* \leqslant t \leqslant \theta,\ x(t_*) = x_*$ либо выполняются равенства

$$\gamma_i(\theta, x(\theta)) = \gamma_i(t_*, x_*)\ i = 1, 2,$$

либо по крайней мере для одного j неравенство

$$\gamma_j(\theta, x(\theta)) < \gamma_j(\tau, x(\tau))$$

для некоторого $\tau \in [t_*, \theta)$.
Для начальной GA - позиции существует по крайней мере одна траектория такая, что выполняется тождество

$$\gamma_i(t, x(t)) \equiv \gamma_i(t_*, x_*),\ t_* \leqslant t \leqslant \theta, i = 1, 2.$$

Упомянутую траекторию назовем GA - траекторией. Обозначим через G_1 множество NA - позиций, через G_2 - множество LA - позиций, и через G_3 - множество GA - позиций. Множество G всех возможных позиций представимо в виде

$$G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$$

Т е о р е м а 2. (для НАДИ с информацией у игроков относительно (t, x)) [4]. *Если начальная позиция является NA - позицией, то P^* - решение порождает NA-траекторию. Если начальная позиция является либо LA-позицией, либо GA-позицией, то P^* - решение порождает GA-траекторию.*

Т е о р е м а 3. (для НАДИ с информацией у игроков относительно (t, x) и x_0) [Клейменов, 1997]. *Если начальная позиция является NA-позицией, то P^*-решение порождает либо NA-траекторию, либо LA-траекторию. Если начальная позиция является LA - позицией, то P^*-решение порождает LA - траекторию. Наконец, если начальная позиция является GA-позицией, то P^*-решение порождает GA-траекторию.*

Обратимся к рассмотренному выше Примеру 1. Приведенные уравнения движения и ограничения на управления имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\theta - t)(u_1 + v_1), \\ \dot{x}_2 = (\theta - t)(u_2 + v_2), \qquad ||u|| \leqslant 1, \quad ||v|| \leqslant 1 \end{cases}$$

$\sigma_i(x(\theta)) = -\left\|x(\theta) - a^{(i)}\right\|$;
$a^{(i)}$ - заданные целевые точки;
$G = (-\infty, \theta] \times R^2$;

Тогда нетрудно найти, что $G_3 = (-\infty, \theta] \times [a^{(1)}a^{(2)}]$, а множество G_1 состоит из всех остальных точек множества G. Множество G_2 пусто.

10. П р и м е р 3.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 + v_1 \\ \dot{x_2} = u_2 + v_2 \qquad \|u\| \leqslant 1, \quad \|v\| \leqslant 1 \end{cases}$$

$\sigma_1(x(\theta)) = -\left\|x(\theta) - a^{(1)}\right\|$,
$\sigma_2(x(\theta)) = \sqrt{3}\ |x_1(\theta)| - x_2(\theta)$.
Тогда имеем $\gamma_1(t,x) = -\left\|x - a^{(1)}\right\|$, $\gamma_2(t,x) = \sqrt{3}\ |x_1| - x_2$

Фиксируем $a^{(1)} = (1, \sqrt{3})$. Линия KOL есть линия уровня функции $\gamma_2(t,x)$, проходящая через точку $Ca^{(1)} \perp OC$, $CE \perp Oa^{(1)}$, $\mid CE \mid = 3/2$. G^t - сечение множества G гиперплоскостью $t = const$. Опишем разбиение G^t на подмножества G_1^t, G_2^t и G_3^t при $t = \theta - \sqrt{3}/4$.
G_2^t есть множество $[CF)$;
G_3^t есть множество $(AC)\bigcup[a^{(1)}B)$;
G_1^t состоит из всех остальных точек.

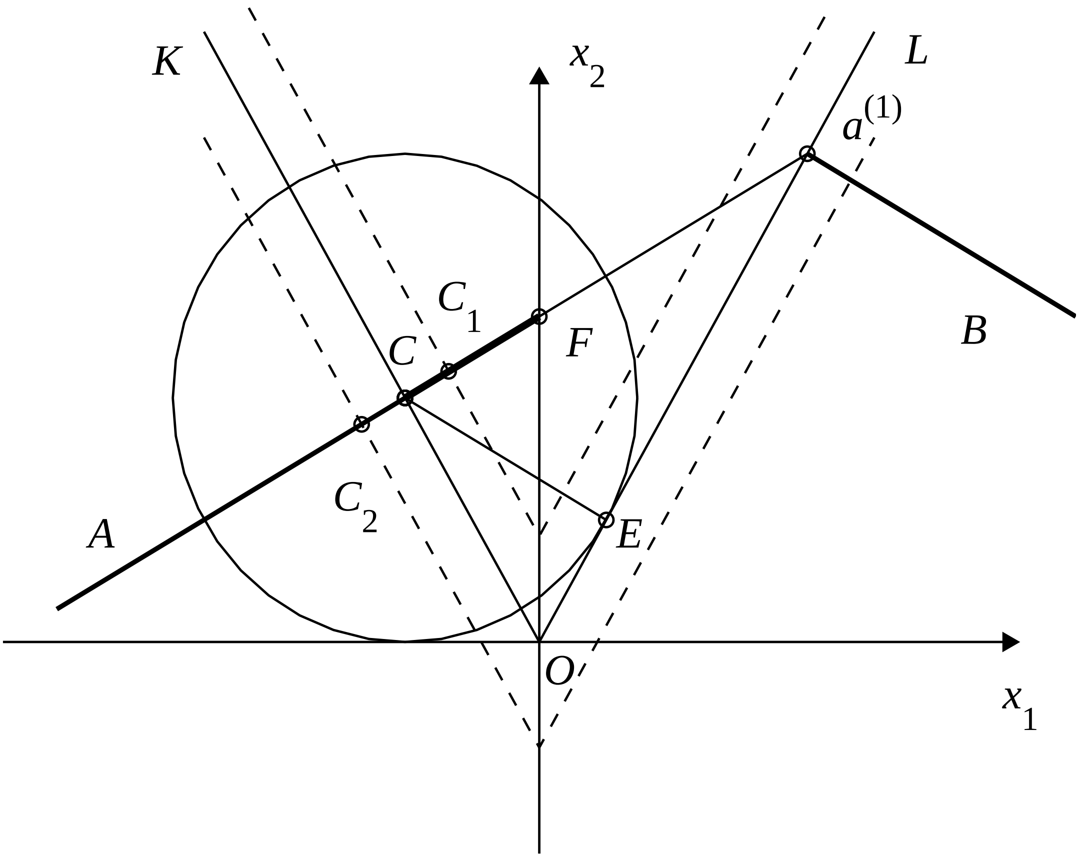


Рис. 2

11. Подход к построению решений в позиционной НАДИ двух лиц.

Предлагаемый подход к построению решений в позиционной НАДИ базируется на:
– использовании принципа неухудшения гарантированного результата игроков;

– использовании правила максимального сдвига на направлении H_i-решения;
– на использовании нэшевских равновесий во вспомогательных биматричных играх.

Основная идея

Пусть векор s^1 задает направление, желаемое для первого игрока, а вектор s^2 задает направление, желаемое для второго игрока.

Определим пары (u_1^0, v_1^0) и (u_2^0, v_2^0) из условия максимального сдвига на направления s^1и s^2 соответственно. Рассмотрим предлагаемую процедуру более подробно для игры с динамикой (3) и функционалами (2).

Сначала мы определяем функции $\rho_1^0 : G \longrightarrow R^1$ и $\rho_2^0 : G \longrightarrow R^1$, предполагая, что $\rho_i^0(t,x)$ есть значение функционала (2) игрока i на H_i-решении, если позиция (t,x) принимается за начальную.

Обозначим через S^0 множество векторов выигрышей игроков (I_1, I_2) (2), которые достигаются на P^*-решениях игры (3), (2).

Теперь опишем процедуру $L(S^0, \rho_1^0(\cdot), \rho_2^0(\cdot))$, которая позволит нам на основе множества S^0 и функций $\rho_1^0(t,x)$ и $\rho_2^0(t,x)$, $(t,x) \in G$, построить множества $S^1 \subseteq S^0$ и определить функции $\rho_1^1(t,x)$ и $\rho_2^1(t,x)$, $(t,x) \in G$. Предположим, что задана позиция $(t,x) \in G$ (где $t_0 \leqslant t < \theta$) . Тогда будут определены множества $P^*(t,x)$, $H_1(t,x)$ и $H_2(t,x)$-решений и множества $S^0(t,x)$ для позиции (t,x), рассматриваемой в качестве начальной. Рассмотрим следующую z-модель, динамика которой описывается уравнением (3)

$$z'_\tau = f_1(\tau, z, u) + f_2(\tau, z, v) \tag{15}$$
$$z(t) = x, \quad \tau \in [t, \theta]$$

Обозначим через $z^1(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \theta$ и $z^2(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \theta$ траектории, порожденные H_1-решением и H_2-решением, соответственно. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим векторы

$$s_1^0(t,x,\varepsilon) = z^1(t+\varepsilon) - x,$$
$$s_2^0(t,x,\varepsilon) = z^2(t+\varepsilon) - x.$$

Определим векторы $u_1^0(t,z,\varepsilon)$, $v_1^0(t,z,\varepsilon)$, $u_2^0(t,z,\varepsilon)$ и $v_2^0(t,z,\varepsilon)$ из условий

$$\max_{u \in P, v \in Q} s_1^{0T} \left[f_1(\tau, z, u) + f_2(\tau, z, v)\right] =$$
$$s_1^{0T} \left[f_1(\tau, z, u_1^0) + f_2(\tau, z, v_1^0)\right],$$

$$\max_{u \in P, v \in Q} s_2^{0T} \left[f_1(\tau, z, u) + f_2(\tau, z, v)\right] =$$
$$s_2^{0T} \left[f_1(\tau, z, u_2^0) + f_2(\tau, z, v_2^0)\right].$$

Теперь сконструируем биматричную 2×2 игру (A, B), в которой первый игрок имеет две стратегии: "выбрать u_1^0" и "выбрать u_2^0". Аналогично, второй игрок имеет две стратегии: "выбрать v_1^0" и "выбрать v_2^0". Матрицы выигрышей игроков следующие:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \rho_1^0(t+\varepsilon, x + (f(t,x,u_i^0) + g(t,x,v_j^0))\varepsilon),$$
$$b_{ij} = \rho_2^0(t+\varepsilon, x + (f(t,x,u_i^0) + g(t,x,v_j^0))\varepsilon),$$
$$i, j = 1, 2.$$

Очевидно, что $a_{11} \geqslant a_{21}$ и $b_{22} \geqslant b_{21}$, что позволяет нам исключить ситуацию $(2,1)$ при нахождении нэшевских равновесий в игре (A,B). Нетрудно показать, что игра (A,B) имеет по крайней мере одно нэшевское равновесие в чистых стратегиях. Управления $u(\tau,z,\varepsilon)$ и $v(\tau,z,\varepsilon)$, которые составляют нэшевское равновесие в биматричной игре (A,B), порождают траекторию
$z(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon$ системы (8). В дополнение к условию (4), которое при $\tau = t$ имеет вид

$$\gamma_i(\theta, x(\theta)) \geqslant \gamma_i(t, z(t)), t \leqslant \tau < \theta, i = 1,2, \tag{16}$$

добавляем следующие условия

$$\gamma_i(\theta, x(\theta)) \geqslant \gamma_i(t+\varepsilon, z(t+\varepsilon)), i = 1,2. \tag{17}$$

Условие (10) влечет, что множества $P^*(t,x)$, $H_1(t,x)$ и $H_2(t,x)$-решений, вообще говоря, изменились. Обозначим их через множества $P^{(1)}(t,x)$, $H_1^{(1)}(t,x)$ и $H_2^{(1)}(t,x)$-решений, соответственно. Пусть $\rho_i^1(t,x)$ есть значение функционала (2) i -го игрока на $H_1^{(1)}$ - решении. Обозначим через $S^1(t,x)$ множество векторов выигрыша игроков (I_1, I_2) (2), которые достигаются на $P^{(1)}$-решениях. Аналогично, процедура $L(S^1, \rho_1^1(\cdot), \rho_2^1(\cdot))$ доставляет множества
$P^{(2)}(t,x)$-решений, $H_1^{(2)}(t,x)$-решений и $H_2^{(2)}(t,x)$-решений, а также функции $\rho_i^1(t,x)$ и множество $S^2(t,x)$.
При этом имеем $S^2(t,x) \subseteq S^1(t,x)$. Переходя к пределу, получаем непустое множество S^∞, которое, в частности, может состоять из единственной точки. Пара стратегий $\widetilde{u}(t,x,\varepsilon)$ и $\widetilde{v}(t,x,\varepsilon)$, доставляющая вектор выигрыша из множества S^∞, является как раз искомой парой рациональных стратегий $P1$ и $P2$. Имея в виду неединственность H_1-решений и H_2-решений, описываемый алгоритм порождает многозначные функции-стратегии $\widetilde{u}(t,x,\varepsilon)$ и $\widetilde{v}(t,x,\varepsilon)$. То есть для нахождения движений мы имеем дифференциальное уравнение с многозначной правой частью.

В заключение отметим, что в работе [4] предложено одно из решений Проблемы 1, а в работах [6, 7] было предложено решение Проблемы 2 для повторяющейся биматричной игры типа дилеммы заключенного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

3. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

4. *Клейменов А.Ф.* О решениях в неантагонистической позиционной игре // ПММ. 1997. Т.61. Вып.5. С. 717-723.

5. *Клейменов А.Ф.* Различные типы решений в позиционной неантагонистической дифференциальной игре. // Вестник Тамб ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов. 2007. Т. 12. Вып.4. С. 464-466.

6. *Kleimenov A.F.* An approach to building dynamics for repeated bimatrix 2x2 games involving various behavior types. // Dynamic and Control. / L.: Gordon & Breach Sci.Publ. 1998.

7. *Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V.* Normal behavior, altruism and aggression in cooperative game dynamics. // Int. Institute for Applied System Analysis. Interim Rep. IR-98-076. Laxenburg, 1998.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00313.

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Kleymenov A. F. Some problems of theory of nonantagonistic differntial games. Some general ideas and results of nonantagonistic positional differential game are given.

Key words: nonantagonistic positional differential game; strategies; motions; equilibrium Nash solution; unimprovable on Paretto sense solution; Shtackelberg solution.