

УДК 516.15

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

© Д.В. Слетков, А.А. Арзамасцев

Sletkov D.V., Arzamastsev A.A. Comparing different algorithm calculations of fractal dimension. The calculation of the fractal dimension for objects in natural science allows explaining the mechanisms of their formation. Methods of fractal dimension calculation are described, such as the singular method, the optimal cell method and the Grassberger and Procaccia method. The boundaries were established for these methods to be applied in analysing pictures and the estimation of deviations carried out.

Впервые понятия фрактал и фрактальная размерность были введены Б. Мандельбротом [1]. Со временем они нашли широкое применение во многих задачах физики, биологии и др. Их использование позволило сделать существенные шаги в моделировании формообразования природных объектов. Важность оценки фрактальной размерности в естественных науках заключается в том, что данное число связано с их морфологическими характеристиками. Фрактальная размерность или размерность Хаусдорфа [1, 2] широко используется для анализа подобных систем.

Цели данной работы: сравнение основных алгоритмов вычисления фрактальной размерности, нахождение их области применения при анализе изображений и оценка погрешности определения фрактальной размерности.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Точечный метод (метод 1) представляет собой один из возможных подходов к вычислению фрактальной размерности компакта [3, 4]. Компакт – метризуемое бикомпактное хаусдорфово пространство. Бикомпактное пространство – топологическое пространство, в каждом открытом покрытии которого содержится конечное подпокрытие того же пространства. Подпространство n -мерного евклидова пространства бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено [5]. Рассмотрим сетку, покрывающую весь компакт. Ее узлы будем называть ячейками. Каждую ячейку, имеющую с компактом непустое пересечение, будем считать за одну точку. Ясно, что именно эта схема реализуется при графическом выводе компакта на экран как массива пикселей. «Подсчет числа точек в клетке» означает подсчет числа пикселей в клетке.

Для упрощения вычислений будем считать клетки квадратными. Размер L клетки означает число ячеек по каждой стороне. Ограничимся нечетными значениями L ; в этом случае центральная ячейка будет равноудалена от всех сторон. Сначала вычислим вероятности $P(m, L)$ того, что клетка размера L содержит m точек (ячеек) компакта. Для этого вокруг каждой точки фрактала, считая ее центральной, построим клетку

размера L и подсчитаем число точек, попавших в нее. Предположим, что компакт содержит M точек. Тогда $P(m, L)$ равно числу клеток, содержащих m точек, $m = 1, \dots, M$, деленному на M . Заметим, что сумма всех вероятностей равна единице: $\sum_{m=1}^M P(m, L) = 1$.

$N(L)$ есть число клеток размера L , необходимых для покрытия компакта. Число клеток размера L , содержащих m точек, равно $(M/m)P(m, L)$. Поэтому оценка числа клеток, покрывающих все изображение, равна:

$$\langle N(L) \rangle = \sum_{m=1}^K (M/m)P(m, L) = M \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L),$$

где K – возможное число точек в клетке. Следовательно, $\tilde{N}(L) = \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L)$. Это выражение также

пропорционально L^{-d} и может быть использовано для оценки фрактальной размерности $\dim_M(X)$.

Оптимальный клеточный метод (метод 2) представляет собой метод определения фрактальной размерности компакта, основанный на математическом определении размерности Минковского [6]. Пусть F – компакт и $\rho(x, y)$ – метрика (обычно используется

евклидова метрика $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$), опре-

деленная на компакте F . Определим $N_F(\epsilon)$ – минимальное число множеств с диаметром, не превосходящим ϵ , необходимых для того, чтобы они покрывали F . Оценку фрактальной размерности можно получить, построив линейную регрессию для $\log N(\log \epsilon)$, используя соотношение $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-\dim_M}$. Основную часть данного метода составляет алгоритм определения минимального покрытия компакта, который был разработан авторами. Такой метод определения вообще зави-

сит от метрики на F . Однако, по теореме об эквивалентных метриках (пусть $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ – эквивалентные метрики (т. е. $\exists \lambda, \mu > 0 \lambda \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq \mu \rho_2(x, y)$), F – компакт с размерностью Минковского $\dim_M(F) = d$ в ρ_2 -метрике. Тогда $\dim_M(F) = d$ в ρ_1 -метрике [4]) мы можем использовать также метрики, эквивалентные евклидовой.

Метод Грассбергера-Прокаччия (метод 3). В 1983 г. Грассбергер и Прокаччия [7] предположили алгоритм вычисления корреляционной размерности. Корреляционная размерность совпадает с фрактальной размерностью для однородных фракталов и меньше ее для мультифракталов [8, 9]. Пусть мы имеем набор точек $\{x_i, i = 1, 2, \dots, M\}$. Задавшись некоторым ε , можно использовать наш набор данных для оценки суммы $C(\varepsilon)$, фигурирующей в определении корреляционной размерности. Имеем: $C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 = \{\text{вероятность того, что две точки разделены расстоянием меньше } \varepsilon\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \times \{\text{число пар } i \neq j \text{ таких, что } \|x_i - x_j\| < \varepsilon\} =$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^{N(\varepsilon)} \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \equiv C_M(\varepsilon)$$

Величину $C_M(\varepsilon)$ называют корреляционным интегралом, который может служить статистической оценкой для $C(\varepsilon)$, следовательно, может быть использован для вычисления корреляционной размерности. Оценку корреляционной размерности можно получить, построив линейную регрессию для $\log C_M(\log \varepsilon)$, используя соотношение $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-\dim_C}$. Также как и в случае метода оптимальных клеток, метод Грассбергера-Прокаччия позволяет использовать метрики, эквивалентные евклидовой.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

С помощью алгоритмов вычисления фрактальной размерности получают фрактальную размерность компакта, как функцию от двух переменных минимального размера покрытия ($LMin$) и максимального размера покрытия ($LMax$), то есть $\dim(F) \approx \approx MDim(LMax, LMin)$. Минимальный размер покрытия ($LMin$) должен равняться 1 (одной точке), т. к. в определении фрактальной размерности имеется соответствующий предел ($LMin \rightarrow 0$). С максимальным размером покрытия ($LMax$) возникают определенные сложности, т. к. при увеличении $LMax$ увеличивается погрешность аппроксимации предела регрессионной кривой, но уменьшается погрешность аппроксимации регрессионной кривой. Математически это можно записать так:

$$\Delta \dim(LMax) = (\dim(F) - MDim(1, LMax)) = = P(LMax) + U(1/LMax) + I(F)$$

где $P(LMax)$ – погрешность аппроксимации предела регрессионной кривой, $U(1/LMax)$ – погрешность аппроксимации регрессионной кривой, $I(F)$ – неустранимая погрешность, обусловленная тем, что мы не имеем сам компакт, а только его изображение на некоторой линейной сетке. Запишем свойства функций $P(LMax)$ и $U(1/LMax)$: $\lim_{LMax \rightarrow 0} P(LMax) = 0$; $\lim_{LMax \rightarrow \infty} P(LMax) = \infty$;

$$\lim_{1/LMax \rightarrow 0} U(1/LMax) = 0; \quad \lim_{1/LMax \rightarrow \infty} U(1/LMax) = \infty;$$

т.к. функции $P(LMax)$ и $U(1/LMax)$ возрастающие, то $\frac{dP}{d(LMax)} > 0$; $\frac{dU}{d(1/LMax)} > 0$. Найдем минимум для

$\Delta \dim(LMax)$, т. е.

$$\frac{d(\Delta \dim)}{d(LMax)} = 0 = \frac{dP}{d(LMax)} + \frac{dU}{d(1/LMax)} \frac{-1}{(LMax)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LMax = \sqrt{\frac{dU}{d(1/LMax)} \frac{d(LMax)}{dP}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LMax = \sqrt{U' / P'} = \lambda (\lambda > 0).$$

λ – характеристический параметр компакта и метода вычисления фрактальной размерности. Данный параметр определяет минимум погрешности для заданных параметров. Этот параметр существенно зависит как от компакта, так и от метода определения фрактальной размерности.

Введем также параметр плотности заполнения исходного изображения компакта, $\rho = \frac{\ln(1/2)}{\ln(NCount / Total)}$,

$0 < \rho \leq \infty$ – логарифмическая плотность изображения, где $NCount$ – количество пикселей компакта, $Total$ – общее количество пикселей в изображении.

В процессе анализа алгоритмов использовали изображения форматом 640×480 пикселей с черным фоном.

Для классических кривых очень малой плотности ($\rho < 0,13$) фрактальная размерность хорошо определяется всеми методами с погрешностью, не превышающей 1 % (см. рис. 1а и б) и не имеется зависимости вычисленной размерности от максимального размера покрытия. При повышении плотности (см. рис. 1с и d) имеется зависимость вычисленной размерности от максимального размера покрытия. Для рис. 1с наименьшей погрешностью обладает метод 1, большей погрешностью – метод 3. Однако с помощью всех методов можно получить правильное значение фрактальной размерности, если выбрать максимальный размер покрытия равным характеристическому параметру ($\lambda = 10-15$). На рис. 1d правильное значение фрактальной размерности может быть получено только методами 1 и 2, в данном случае наименьшей погрешностью обладает метод 2. При правильном выборе максимального размера покрытия для данных объектов ($LMax \leq \lambda$) можно оценить фрактальную размерность с точностью 5 %.

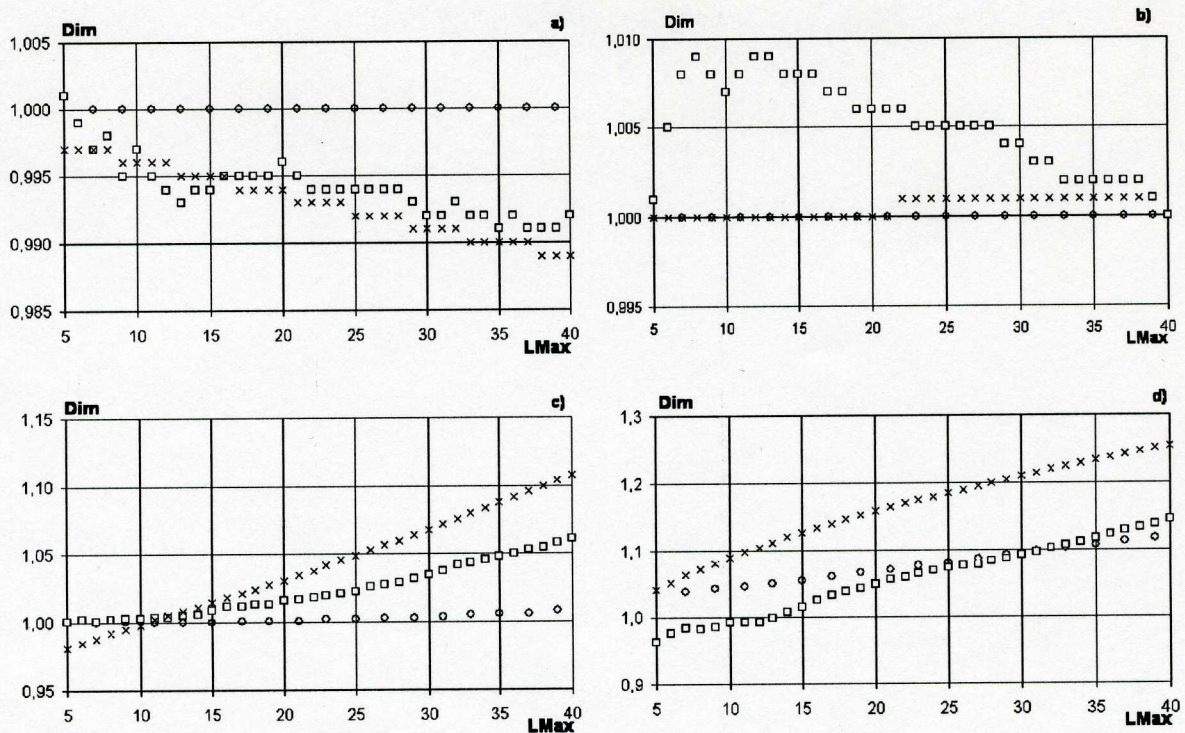


Рис. 1. Графики зависимости фрактальной размерности от максимального размера покрытия для классических кривых ($\rho < 0,2$): а) линия по диагонали ($\rho = 0,1123$); б) окружность с радиусом 230 пикселей ($\rho = 0,1268$); в) график функции $Y = \sin(X)$ от 0 до 10π ($\rho = 0,1710$); д) параметрическая гладкая кривая ($\rho = 0,1840$). \circ – метод 1, \square – метод 2, \times – метод 3

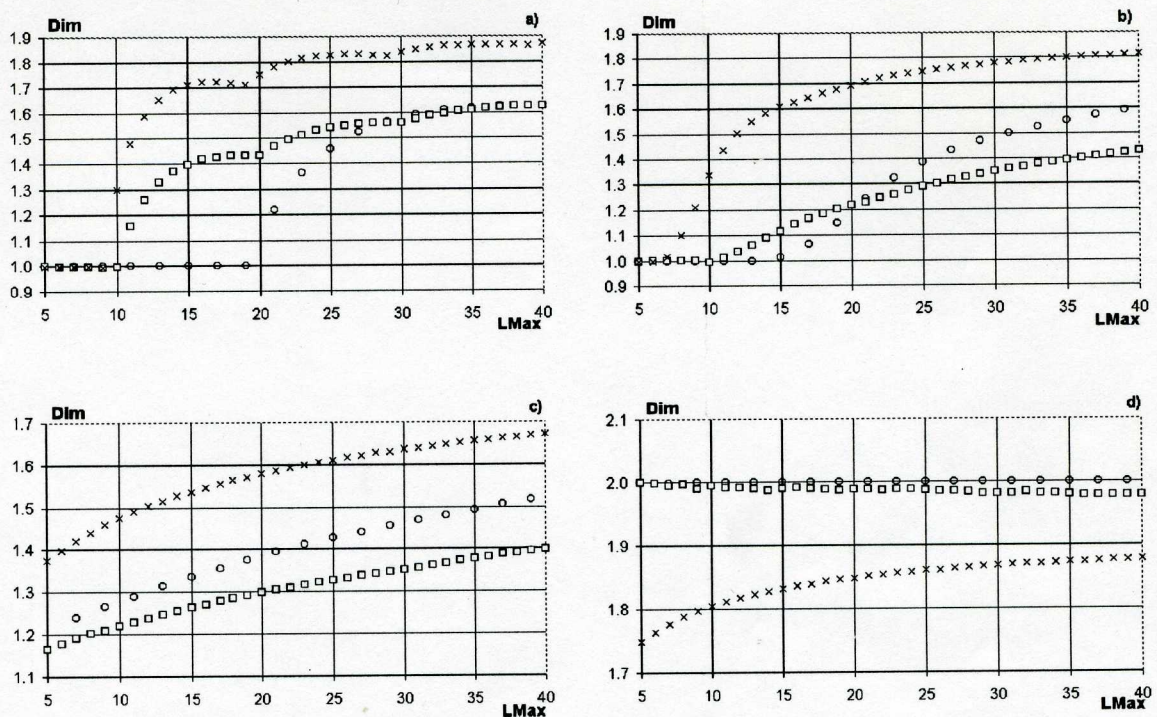


Рис. 2. Графики зависимости фрактальной размерности от максимального размера покрытия для классических кривых большой плотности ($\rho > 0,2$): а) семейство горизонтальных линий с расстоянием между ними 10 пикселей ($\rho = 0,3010$); б) семейство концентрических окружностей с разностью радиусов 10 пикселей ($\rho = 0,2864$); в) семейство 100 случайных линий ($\rho = 0,2772$); д) полный квадрат размером 640×480 пикселей ($\rho = \infty$). \circ – метод 1, \square – метод 2, \times – метод 3

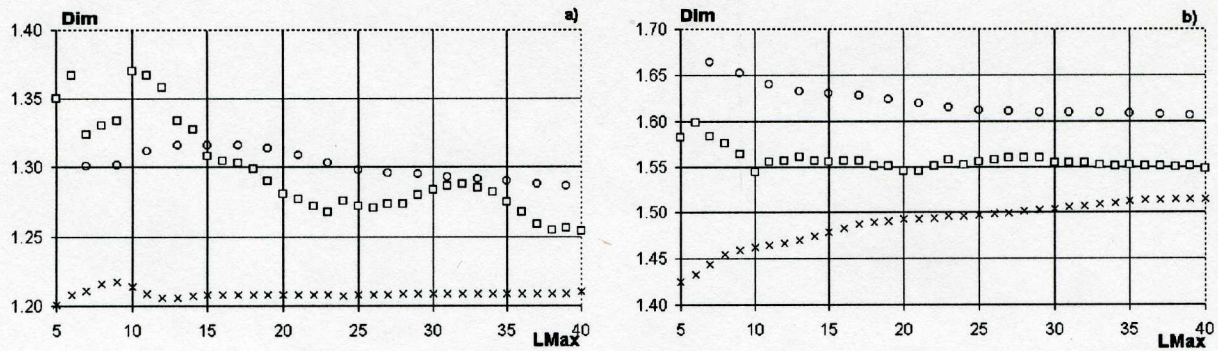


Рис. 3. Графики зависимости фрактальной размерности от максимального размера покрытия для «математических» монстров: а) снежинка Коха ($\rho = 0,1572$, $\dim_M = \ln(4)/\ln(3) \approx 1,2618$); б) Ковер Серпиньского ($\rho = 0,3016$, $\dim_M = \ln(3)/\ln(2) \approx 1,5850$). О – метод 1, □ – метод 2, × – метод 3

Для семейства классических кривых высокой плотности (см. рис. 2а и б) имеет место ярко выраженная зависимость фрактальной размерности от максимального размера покрытия, и при размере покрытия, превышающем характеристический параметр, правильное определение фрактальной размерности невозможно. Метод 1 ($\lambda = 15-20$) имеет наибольший характеристический параметр, превышающий характеристические параметры методов 2 ($\lambda = 10$) и 3 ($\lambda = 7-10$) практически в 2 раза. Наименьшую скорость роста погрешности имеет метод 2. Поэтому при анализе изображений высокой плотности ($\rho \geq 0,25$) надо тщательно исследовать зависимость фрактальной размерности от максимального размера покрытия и определять характеристический параметр. Для изображений большей плотности ($\rho > 0,5$) практически невозможно отличить объекты, имеющие различную фрактальную размерность. На рис. 2с видно, что для хаотических классических кривых определение фрактальной размерности затруднено (особенно методом 3). Методы 1 и 2 позволяют определить фрактальную размерность квадрата с приемлемой точностью (см. рис. 2д), в то время как метод 3 в данном случае дает лишь нижнюю границу фрактальной размерности. Для математических «монстров» (см. рис. 3) метод 3 дает оценку лишь нижней границы фрактальной размерности, а методы 1 и 2 дают удовлетворительные результаты с погрешностью, не превышающей 5 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К достоинствам метода 1 следует отнести больший, чем у других алгоритмов, характеристический параметр и наибольшую скорость вычисления фрактальной размерности; данный метод можно рекомендовать для наиболее быстрого вычисления фрактальной размерности.

К достоинствам метода 2 можно отнести лучшие результаты вычисления фрактальной размерности «математических» монстров и наименьший темп роста погрешности, однако данный метод имеет наименьшую скорость вычисления и меньший, чем у метода 1, характеристический параметр. Его можно рекомендовать для наиболее точного вычисления фрактальной размерности, желательно в совокупности с остальными методами.

Метод 3 не позволяет определять фрактальную размерность, если она близка к двум, однако он дает оценку нижней границы фрактальной размерности, что может быть полезно для дополнительного анализа. Этот метод можно использовать для оценки нижней границы фрактальной размерности и не следует использовать для самостоятельных вычислений.

При обработке реальных изображений необходимо сначала выделить контуры и перевести изображение в двухцветное. Далее построить графики зависимости вычисленной фрактальной размерности от максимального размера покрытия для всех методов. Метод 3 используется для оценки нижней границы фрактальной размерности; в случае, когда метод 3 дает результаты большие, чем методы 1 и 2, фрактальную размерность невозможно определить по имеющимся данным. Далее необходимо анализировать графики для методов 1 и 2, при отсутствии скачков (см. рис. 3а и б) необходимо вычислить фрактальную размерность методами 1 и 2 для $LMax = 30-40$ и принять за значение фрактальной размерности их среднеарифметическое; при наличии скачков графиков (см. рис. 2а и б) необходимо определить характеристический параметр изображения и каждого метода, далее вычислить фрактальную размерность методами 1 и 2 для $LMax = \lambda$ и принять за значение фрактальной размерности их среднеарифметическое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
2. Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // Mathematische Annalen. 1919. V. 79. P. 157-179.
3. Voss R.F. Random Fractals: Characterization and Measurement, Scaling Phenomena in Disordered Systems. N. Y.: Plenum Press, 1985.
4. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
5. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. М., 1948.
6. Гуревич В., Волман Г. Теория размерности. М., 1948.
7. Grassberger P., Procaccia I. Measuring of strangeness of strange attractors // Physica. 1983. V. 9D. P. 189-208.
8. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // Phys. Lett. 1983. V. A97. P. 227-230.
9. Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica. 1983. V. 8D. P. 435-444.

Поступила в редакцию 12 марта 2003 г.