УДК 517.51

АПРИОРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СВЕРХУ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **А.И. Булгаков, Е.В. Малютина, О.В. Филиппова**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; многозначные импульсные воздействия; априорная ограниченность.

Для задачи Коши функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями сформулированы условия компактности и связности множества решений.

Обозначим $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ $(\mathrm{conn}[\mathbb{R}^n])$ — множество всех непустых компактов (связных компактов) пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$; $\Omega(\mathbf{L}^n[a,b])$ — множество всех непустых выпуклых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$ — множество непустых выпуклых компактов пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Обозначим $\overline{\mathrm{co}}A$ — выпуклая замкнутая оболочка множества А.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2], \ldots, (t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : \ t \in [a,b]\}$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ — это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу:

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)), \ k = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathbf{L}^n[a,b])$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу и для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1,2,...,m$ полунепрерывны сверху по Хаусдорфу, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

Определение 1. *Решением задачи* (1)-(3) называется функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathbf{L}^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову (см. [1]).

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{5}$$

Определение 2. Функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k:t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{6}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (5), $(\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$ - множество сужений функций из множества $\Phi(V_\tau(x))$ на отрезок $[a,\tau]$ и $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $t_k \in [a,\tau]$.

Определение 3. Решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) называется *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, ($\tau \in (c,b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Решение задачи (1)-(3) считается непродолжаемым.

Пусть $\tau \in (a,b]$. Обозначим через $H(x_0,\tau)$ множество решений задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$.

Определим оператор $\Lambda : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, который имеет вид

$$(\Lambda z)(t) = x_0 + \int\limits_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$, определенный равенством

$$(\mathfrak{A}x)(t) = \Lambda\Phi(x) + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{8}$$

где $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots$ *и пусть* $x_i \to x$ *по норме пространства* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *при* $i \to \infty$. *Тогда* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *и для любого* t_k, $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\lim_{i\to\infty} x_i(t_k + 0) = x(t_k + 0).$$

Определение 4. Множество всех локальных решений задачи (1)-(3) называется *априорно ограниченным*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует решения $y \in H(x_0,\tau)$ задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, для которого выполняется неравенство $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

Из теоремы Какутани (см. [3]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 2. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для каждых* $\tau \in (a,b]$ *и* $y \in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $||y||_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

Т е о р е м а 3. *Если множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено, то существует такой выпуклый компакт* $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, *что* $H(x_0,b) \subset K$ и $\mathfrak{A}(K) \subset K$, *где отображение* $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$ *определено равенством* (8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что найдется такой выпуклый компакт $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которого имеют место вложения

$$H(x_0,b) \subset K, \quad \mathfrak{A}(K) \subset K.$$

Так как $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1,2,...,m$, то множество значений скачков в точках $t_k \in [a,b]$, $k = 1,2,...,m$ ограничено. Пусть

$$l = \sup\Big\{||I_k(y(t_k))|| : y \in H(x_0,b),\ t_k \in [a,b],\ k = 1,2,...,m\Big\}, \tag{9}$$

где $||I_k(y(t_k))|| = \{max|x|, x \in I_k(y(t_k))\}$. Рассмотрим непрерывное отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное равенством

$$P(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad \|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \le r + ml, \\ \frac{d+ml}{\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}}x, & \text{если} \quad \|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} > r + ml, \end{cases} \tag{10}$$

где r из определения 4.

Определим отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ формулой

$$(\mathcal{P}z)(t) = P(z(t)), \tag{11}$$

где отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет вид (10). Далее покажем что отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, заданное равенствами (10), (11), непрерывно на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Действительно, пусть последовательность $z_i (\in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]) \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Покажем, что $\mathcal{P}z_i \to \mathcal{P}z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Предположим противное. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$ и такие подпоследовательности $z_{i_j} \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и $t_{i_j} \in [a,b]$, $j = 1,2,...$, для которых для любого $j = 1,2,...$ выполняются неравенства

$$|P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| \ge \varepsilon. \tag{12}$$

Пусть $t_0 \in [a,b]$ — предельная точка подпоследовательности $t_{i_j} \in [a,b]$, $j = 1,2,....$ Не уменьшая общности, будем считать, что $t_{i_j} \to t_0$ при $j \to \infty$. Пусть $t_0 \neq t_k$, $k = 1,2,...,m$. Тогда выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0). \tag{13}$$

Так как

$$|P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| \le |P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_0))| + |P(z(t_0)) - P(z(t_{i_j}))|,$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ и учитывая непрерывность отображения $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенного равенством (10), а также равенство (13), получим

$$\lim_{j\to\infty} |P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| = 0, \tag{14}$$

но это противоречит оценкам (12).

Пусть теперь t_0 равно одной из точек t_k, $k = 1, 2, ..., m$. Тогда, если $t_{i_j} \leq t_0$, $j = 1, 2, ...$, то равенство (13) выполняется, из которого следует равенство (14), что также противоречит оценкам (12).

Пусть теперь $t_0 < t_{i_j}$, $j = 1, 2, ...$. В силу того, что $z_i \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$, то, согласно лемме 1, выполняется равенство

$$\lim_{j \to \infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0 + 0),$$

из которого следует равенство (13). Это противоречит оценкам (12). Таким образом, отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, имеющее вид (11), непрерывно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$.

Рассмотрим на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ включение

$$x \in \mathfrak{A}(\mathcal{P}(x)), \tag{15}$$

где $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b])$ определяется формулой (8).

Так как оператор $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, определенный равенствами (10), (11), непрерывен, отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(\mathbf{L}^n[a, b])$, полунепрерывно сверху по Хаусдорфу, то суперпозиция $(\Phi\mathcal{P}) : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(\mathbf{L}^n[a, b])$ полунепрерывна сверху по Хаусдорфу.

Так как оператор $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ ограничен, то образ $\Phi(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ ограничен суммируемой функцией и множество значений скачков ограничено, это означает, что $\mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ — предкомпактное множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. Тогда, согласно теореме Какутани (см. [3]), произведение $(\mathfrak{A}\mathcal{P})$ имеет неподвижную точку x, эта неподвижная точка — есть решение включения (15). Для решения задачи (15) из условия продолжаемости и априорной ограниченности локальных решений следует оценка $||x||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leq r + ml$, поэтому x — неподвижная точка отображения $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b])$ является решением задачи (1)-(3). Из этого вытекает, что множество решений включения (15) совпадает с множеством решений задачи (1)-(3).

Так как $\mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ — предкомпактное множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, то $\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ — выпуклый компакт пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. Пусть $K = \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$. Тогда из определения множества K следует, что $\mathfrak{A}(K) \subset K$, $H(x_0, b) \subset K$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 и [6] вытекает теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{conn}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, *и множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. Тогда* $H(x_0, b)$ *— связный компакт пространства* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$.

Полученные результаты дополняют и обобщают результаты, полученные в работах [5] – [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики //Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 68. № 4.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.

3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

4. *Булгаков А.И., Ляпин Л.Н.* Об интегральном включении с функциональным оператором // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15. № 5. С. 876-884.

5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк. 1987.

6. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.

7. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 2 // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1262-1267.

8. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 6 // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1290-1296.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №№ 09-01-97503, 11-01-00626, 11-01-00645), Министерства образования и науки РФ (АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы) проект № 2.1.1/9359; ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы госконтракты №№ П688, 14.740.11.0682, 14.740.11.0349; темплан 1.8.11).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V. A-priori boundedness of solutions to functional-differential inclusions with upper semicontinuous right-hand side and with multivalued impulses. For the Cauchy problem for a functional-differential inclusion with multivalued impulses the conditions of compactness and connectness of the solution set are formulated.

Keywords: functional-differential inclusion; multivalued impulses, a-priori boundedness.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Малютина Елена Валерьевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zont85@bk.ru

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911, 517.968

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **А.И. Булгаков, Е.В. Малютина, О.В. Филиппова**

Ключевые слова: управляемая импульсная система с фазовыми ограничениями по управлению, априорная ограниченность, дифференциальное включение с импульсными воздействиями.

Для управляемых импульсных систем с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием рассмотрены вопросы продолжаемости допустимых пар. Получены оценки допустимых траекторий, аналогичные оценкам В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппова. Сформулировано определение допустимой квазитраектории. Получены достаточные условия выполнения принципа плотности для рассматриваемой системы.