УДК 517.98

Полиномиальное квантование [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова, С. В. Цыкина, О. В. Гришина

Ключевые слова: группы и алгебры Ли; представления групп Ли; пара-эрмитовы симметрические пространства; многочлены; исчисления символов.

Строится квантование (исчисление символов) в духе Березина в многочленах на пара-эрмитовых симметрических пространствах.

В этой работе мы строим вариант квантования на пара-эрмитовом симметрическом пространстве G/H, используя схему, изложенную в [6]. Пусть π_λ^- – представление группы G максимальной вырожденной серии. В качестве исходной алгебры операторов мы берем алгебру операторов $\pi_\lambda^-(X)$, отвечающих элементам X универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Тогда символами операторов являются многочлены на G/H. Проведены явные вычисления для пространств ранга один, для пространств с псевдоортогональной группой G (здесь ранг равен двум), для комплексного гиперболоида в $\mathbb{C}^3$ (ранг равен двум). Мы существенно опираемся на статью [6] и будем часто использовать материал из [6] без специальных оговорок. Мы также используем обозначения из списка обозначений из [7].

§ 1. Полиномиальное квантование на параэрмитовых симметрических пространствах

Сначала сделаем некоторые добавления к § 2 и § 3 из [6] .

Нам потребуются явные формулы для вложения $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+ \hookrightarrow G/H$. Запишем переразложение (2.15) из [6] несколько в другом виде:

$$\exp\xi \cdot \exp(-\eta) = \exp(-Y) \cdot \exp X \cdot h, \tag{1.1}$$

где $X \in \mathfrak{q}^-$, $Y \in \mathfrak{q}^+$. Полученный элемент $h \in H$ есть тот же самый элемент $h(\xi,\eta)$, что и в [6]. С помощью (1.1) образуем следующий элемент $g(\xi,\eta) \in G$:

$$g(\xi,\eta) = \exp Y \exp\xi = \exp X \cdot h \cdot \exp\eta, \quad h = h(\xi,\eta). \tag{1.2}$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.1.1.2.1474 и Темпланом 1.5.07.

Тогда паре ξ, η отвечает точка $x = x^0 g$, где $g = g(\xi, \eta)$.

При действии группы G элемент $h(\xi, \eta)$ преобразуется следующим образом:

$$h(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}) = \widetilde{h}^{-1} \cdot h(\xi, \eta) \cdot \widehat{h},$$

где $\widetilde{h}$ и $\widehat{h}$ берутся из [6] (2.5) и (2.6). Следовательно, функция $N(\xi, \eta)$ преобразуется следующим образом:

$$N(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}) = N(\xi, \eta) \cdot b(\widetilde{h})^{1/\varkappa} \cdot b(\widehat{h})^{-1/\varkappa}. \tag{1.3}$$

Представления $\pi_\lambda^\pm$ группы G максимальной вырожденной серии мы рассмотрим в *некомпактной картине*: мы ограничиваем функции из $\mathcal{D}_\lambda^\pm(G)$ на подгруппы $Q^\pm$, отождествляем эти подгруппы (как многообразия) с $\mathfrak{q}^\pm$, а последние – с $\mathbb{R}^m$. Получаем:

$$\big(\pi_\lambda^-(g) f\big)(\xi) = \omega_\lambda(\widetilde{h}) f(\widetilde{\xi}), \quad \big(\pi_\lambda^+(g) f\big)(\eta) = \omega_\lambda(\widehat{h}) f(\widehat{\eta}),$$

где $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{h}$, $\widehat{\eta}$, $\widehat{h}$ получаются из разложений [6] (2.5), (2.6). Напомним, что

$$\omega_\lambda(h) = |b(h)|^{-\lambda/\varkappa}.$$

Определим два оператора A_λ и B_λ:

$$(A_\lambda f)(\eta) = \int_{\mathfrak{q}^-} |N(\xi, \eta)|^{-\lambda-\varkappa} f(\xi)\, d\xi,$$

$$(B_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathfrak{q}^+} |N(\xi, \eta)|^{-\lambda-\varkappa} f(\eta)\, d\eta,$$

где $d\xi$, $d\eta$ – евклидовы меры $d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_m$ и $d\eta = d\eta_1 \ldots d\eta_m$ на $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ соответственно. Оператор A_λ сплетает представление π_λ^- с представлением $\pi_{-\lambda-\varkappa}^+$, а оператор B_λ сплетает представление π_λ^+ с представлением $\pi_{-\lambda-\varkappa}^-$. Произведение $B_\lambda A_{-\lambda-\varkappa}$ есть скалярный оператор:

$$B_\lambda A_{-\lambda-\varkappa} = c(\lambda)^{-1} \cdot \mathrm{id}, \tag{1.4}$$

где $c(\lambda)$ – некоторая мероморфная функция от λ, она инвариантна относительно замены λ на $-\lambda - \varkappa$.

Представления $\pi_\lambda^\pm$ и операторы A_λ и B_λ можно распространить на обобщенные функции на $\mathfrak{q}^-$ и на $\mathfrak{q}^+$.

Представление π_λ^- универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ дается некоторыми дифференциальными операторами. Эти представления можно рассматривать на разных пространствах функций от ξ: например, на функциях класса C^∞ на $\mathfrak{q}^-$, на пространстве $\mathrm{Pol}\,(\mathfrak{q}^-)$ многочленов от ξ, на пространстве $\mathcal{D}'(\mathfrak{q}^-)$ обобщенных функций на $\mathfrak{q}^-$, в частности, на пространстве Z обобщенных функций от ξ, сосредоточенных в нуле, и др. То же самое относится и к π_λ^+.

Отметим, что

$$\omega_\lambda\big(h(\xi, \eta)\big) = |N(\xi, \eta)|^\lambda. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует формула

$$|N(\widetilde{\xi},\widehat{\eta})|^{\lambda} = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}\cdot \omega_{\lambda}(\widetilde{h})^{-1}\cdot \omega_{\lambda}(\widehat{h}),$$

выражающая инвариантность функции $|N(\xi,\eta)|^{\lambda}$:

$$\Big[\pi_{\lambda}^{-}(g)\otimes \pi_{\lambda}^{+}(g)\Big]|N(\xi,\eta)|^{\lambda} = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}.$$

Теперь определим *ковариантные и контравариантные символы*. Это делается в точности по такой же схеме, что и в [6], – с использованием некомпактной картины представлений.

В качестве переполненной системы мы берем ядро оператора $A_{-\lambda-\varkappa}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\lambda}(\xi,\eta) = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}. \tag{1.6}$$

Для оператора $D=\pi_{\lambda}^{-}(X)$, $X\in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, назовем функцию

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}\,(\pi_{\lambda}^{-}(X)\otimes 1)\Phi(\xi,\eta) \tag{1.7}$$

ковариантным символом этого оператора. Рассмотрим ξ,η как орисферические координаты на G/H. Тогда ковариантные символы становятся функциями на G/H и, больше того, *многочленами* на G/H. Обозначим пространство этих символов через $\mathcal{A}_{\lambda}$.

В частности, ковариантный символ тождественного оператора есть тождественная единица на G/H. Для операторов $\pi_{\lambda}^{-}(X)$, отвечающих элементам X алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ковариантный символ есть с точностью до множителя, зависящего от λ, линейная функция $B_{\mathfrak{g}}(X,x)$, где $B_{\mathfrak{g}}$ – форма Киллинга, $x\in G/H\subset \mathfrak{g}$.

Оператор D восстанавливается по своему ковариантному символу F следующим образом:

$$(D\varphi)(\xi) = c\int_{G/H} F(\xi,v)\,\frac{\Phi(\xi,v)}{\Phi(u,v)}\,\varphi(u)\,dx(u,v), \tag{1.8}$$

где $c=c(\lambda)$ берется из формулы (1.4). В самом деле, функция Φ обладает воспроизводящим свойством:

$$\varphi(\xi) = c\int_{G/H} \frac{\Phi(\xi,v)}{\Phi(u,v)}\,\varphi(u)\,dx(u,v),$$

которое есть не что иное, как формула (1.4), переписанная в другой форме. Применяя к обеим частям этого равенства оператор D и используя (1.7), получим (1.8).

Пусть U – представление группы G сдвигами в функциях на G/H (квазирегулярное представление) – например, в пространстве $C^{\infty}(G/H)$. Пусть U – соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствие $D\mapsto F$, сопоставляющее оператору его ковариантный символ, является $\mathfrak{g}$-эквивариантным, т.е.

если F – ковариантный символ оператора $D = \pi_\lambda^-(X)$, $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$, то $U(L)F$, где $L \in \mathfrak{g}$, является ковариантным символом оператора $\pi_\lambda^-(\mathrm{ad}\, L \cdot X) \otimes 1$.

Для λ общего положения пространство $\mathcal{A}_\lambda$ есть пространство $S(G/H)$ всех многочленов на G/H.

Умножение операторов порождает умножение ковариантных символов, обозначим последнее звездочкой $*$. Именно, пусть F_1, F_2 – ковариантные символы операторов D_1, D_2 соответственно. Тогда ковариантный символ $F_1 * F_2$ произведения $D_1 D_2$ есть

$$(F_1 * F_2)(\xi, \eta) = \int_{G/H} F_1(\xi, v) F_2(u, \eta)\, \mathcal{B}(\xi, \eta; u, v)\, dx(u, v), \tag{1.9}$$

где

$$\mathcal{B}(\xi, \eta; u, v) = c\, \frac{\Phi(\xi, v)\Phi(u, \eta)}{\Phi(\xi, \eta)\Phi(u, v)}. \tag{1.10}$$

Назовем это ядро $\mathcal{B}$ *ядром Березина*. Его можно рассматривать как функцию от двух переменных на G/H: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x; y)$, $x, y \in G/H$. Оно инвариантно относительно G:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Ad}\, g \cdot x,\ \mathrm{Ad}\, g \cdot y) = \mathcal{B}(x, y).$$

Рассмотрим преобразование $x \mapsto \check{x}$ пространства G/H, которое в орисферических координатах ξ, η есть перестановка ξ и η : $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$. Это преобразование вызывает преобразование $F \mapsto \check{F}$ функций из $S(G/H)$. Ядро Березина инвариантно относительно одновременной перестановки $\xi \leftrightarrow \eta$ и $u \leftrightarrow v$. Отсюда по (2.7) следует, что преобразование $F \mapsto \check{F}$ является антиинволюцией относительно умножения символов:

$$(F_1 * F_2)^\vee = \check{F}_2 * \check{F}_1.$$

Преобразованию символов $F \mapsto \check{F}$ отвечает сопряжение $D \mapsto \check{D}$ относительно билинейной формы, порождаемой оператором A_λ:

$$\begin{aligned}(A_\lambda \varphi, \psi) &= \int_{\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+} |N(\xi, \eta)|^{-\lambda - \varkappa}\, \varphi(\xi)\psi(\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= \int_{G/H} |N(\xi, \eta)|^{-\lambda}\, \varphi(\xi)\, \psi(\eta)\, dx(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Кроме того, если $D = \pi_\lambda^-(X)$, то

$$\check{D} = \pi_\lambda^+(X^\vee),$$

где $X \mapsto X^\vee$ есть преобразование алгебры $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$, порождаемое взятием обратного элемента в группе G.

Таким образом, пространство $\mathcal{A}_\lambda$ является ассоциативной алгеброй с единицей относительно умножения $*$. Преобразование $F \mapsto \check{F}$ является антиинволюцией этой алгебры.

Определим теперь *контравариантные символы*. В соответствии с общей схемой функция $F(\xi,\eta)$ есть контравариантный символ для следующего оператора A (действующего на функции $\varphi(\xi)$):

$$(A\varphi)(\xi) = c\int_{G/H} F(u,v)\,\frac{\Phi(\xi,v)}{\Phi(u,v)}\,\varphi(u)\,dx(u,v) \tag{1.11}$$

(отличие от (1.8) только в первом аргументе функции F).

Если многочлен F из $S(G/H)$ является одновременно ковариантным символом оператора $D=\pi_\lambda^-(X)$, $X\in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, и контравариантным символом оператора A, то $A=\pi^-_{-\lambda-\varkappa}(X^\vee)$. Следовательно, A получается из D сопряжением относительно формы

$$(F,f)=\int_{\mathfrak{q}^-} F(\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

В терминах ядер это означает, что ядро $L(\xi,u)$ оператора A получается из ядра $K(\xi,u)$ оператора D перестановкой аргументов и заменой λ на $-\lambda-\varkappa$.

Соответствие $F\mapsto A$, которое каждому F из $\mathcal{A}_{-\lambda-\varkappa}$ сопоставляет оператор A с контравариантным символом F, является $\mathfrak{g}$-эквивариантным, а именно, многочлен $U(L)F$, где $L\in\mathfrak{g}$, является контравариантным символом оператора $\left[\pi^-_{-\lambda-\varkappa}(L)_\xi, A\right]$.

Таким образом, мы имеем два отображения: $D\mapsto F$ ("ко") и $F\mapsto A$ ("контра"), связывающие операторы в функциях от ξ и многочлены на G/H.

Композицию $\mathcal{O}$ =(контра)$\circ$(ко), отображающую оператор в оператор: $D\mapsto A$, мы уже рассмотрели выше, мы видели, что $\mathcal{O}$ есть отображение

$$\pi_\lambda^-(X)\longmapsto \pi^-_{-\lambda-\varkappa}(X^\vee).$$

Оно коммутирует с присоединенным представлением ad. Такое преобразование отсутствовало в теории Березина для эрмитовых симметрических пространств.

Композиция $\mathcal{B}$ =(ко)$\circ$(контра) отображает контравариантный символ оператора D в его ковариантный символ. Назовем $\mathcal{B}$ *преобразованием Березина*. Ядро этого преобразования есть ядро Березина.

Сформулируем нерешенные задачи (для произвольного ранга): найти выражение преобразования Березина $\mathcal{B}$ через операторы Лапласа – образующие в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на G/H, найти его собственные числа на неприводимых составляющих, найти полное его асимптотическое разложение при $\lambda\to-\infty$, в частности выяснить, когда имеет место принцип соответствия (асимптотическое соотношение $\mathcal{B}\sim 1-1/\lambda$). Эти задачи решены для пространств ранга один (см. § 3, для простоты мы рассматриваем случай $n=2$) и их комплексификаций (§ 4) и для пространств с группой $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$ (§ 5), в двух последних случаях ранг пространства равен двум.

§ 2. Надгруппа и полиномиальное квантование

В качестве надгруппы для G возьмем прямое произведение $\widetilde{G} = G \times G$. Группа G содержится в $\widetilde{G}$ как диагональ $\{(g,g)\}$, $g \in G$.

Сначала опишем некоторую серию R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, представлений группы $\widetilde{G}$.

Пусть $\widetilde{P}$ – параболическая подгруппа группы $\widetilde{G}$, состоящая из элементов (zh, hn), $z \in Q^-$, $n \in Q^+$, $h \in H$. Пусть $\widetilde{\omega}_\lambda$ – характер этой подгруппы, равный $\omega_\lambda(h)$ на указанных элементах. Представление R_λ группы $\widetilde{G}$ – это представление, индуцированное характером $\widetilde{\omega}_\lambda$ подгруппы $\widetilde{P}$.

Укажем реализации представлений R_λ.

Пусть $\mathcal{C}$ – многообразие двойных классов смежности

$$y = s_1^{-1} Q^- Q^+ s_2, \quad s_1, s_2 \in G.$$

Это многообразие – аналог конуса для представлений псевдо-ортогональной группы, связанных с конусом. Представление R_λ действует в пространстве функций f класса C^∞ на $\mathcal{C}$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(s_1^{-1} h Q^- Q^+ s_2) = \omega_\lambda(h) f(s_1^{-1} Q^- Q^+ s_2), \tag{2.1}$$

следующим образом:

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2) f\big)(y) = f(g_1^{-1} y g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Возьмем в $\mathcal{C}$ два подмногообразия (сечения): "гиперболическое" сечение $\mathcal{X}$ и "параболическое" сечение Γ.

Многообразие $\mathcal{X}$ есть подмногообразие в $\mathcal{C}$, состоящее из классов смежности $x = s^{-1} Q^- Q^+ s$, $s \in G$. Стационарная подгруппа начальной точки $x^0 = Q^- Q^+$ есть H, так что $\mathcal{X}$ можно отождествить с G/H. Многообразие Γ есть подмногообразие в $\mathcal{C}$, состоящее из классов смежности

$$\gamma = \exp(-\eta) Q^- Q^+ \exp \xi, \quad \xi \in \mathfrak{q}^-, \ \eta \in \mathfrak{q}^+. \tag{2.2}$$

Это многообразие можно отождествить с $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+$. Вложение $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+ \hookrightarrow G/H$ в терминах $\mathcal{C}$ выглядит следующим образом.

Пусть точка $x = s^{-1} Q^- Q^+ s$, $s \in G$, имеет орисферические координаты ξ, η. По (1.1) и (1.2) имеем

$$s = \exp Y \exp \xi = \exp X \cdot h_0 \cdot \exp \eta, \quad h_0 = h(\xi, \eta), \tag{2.3}$$

поэтому мы можем записать точку x в виде

$$\begin{aligned} x &= s^{-1} Q^- Q^+ s \\ &= \exp(-\eta) \cdot h_0^{-1} Q^- Q^+ \exp \xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, указанное вложение сопоставляет точке $\gamma \in \Gamma$, задаваемой формулой (2.2), точку $x \in \mathcal{X}$, задаваемую формулой (2.4), где $h_0 = h(\xi, \eta)$.

Представление R_λ можно реализовать в функциях на этих многообразиях $\mathcal{X}$ и Γ.

Сначала рассмотрим $\mathcal{X}$. Пусть $x = s^{-1}Q^-Q^+s$, $g_1, g_2 \in G$. Тогда $g_1^{-1}xg_2 = g_1^{-1}s^{-1}Q^-Q^+sg_2$. Возьмем элемент $sg_2(sg_1)^{-1}$, т.е. элемент $sg_2g_1^{-1}s^{-1}$, и разложим его по Гауссу:

$$sg_2g_1^{-1}s^{-1} = \exp(-Y^*) \cdot \exp X^* \cdot h^*, \;\; X^* \in \mathfrak{q}^-, \;\; Y^* \in \mathfrak{q}^+. \tag{2.5}$$

Здесь элемент $h^* \in H$ не зависит от выбора представителя s класса смежности. Образуем элемент

$$s^* = \exp Y^* \cdot sg_2 = \exp X^* \cdot h^* sg_1. \tag{2.6}$$

Этому элементу отвечает точка $x^* \in G/H$:

$$x^* = (s^*)^{-1}Q^-Q^+s^*.$$

По (2.6) она есть

$$x^* = g_1^{-1}s^{-1}(h^*)^{-1}Q^-Q^+sg_2.$$

Следовательно,

$$f(x^*) = \omega_\lambda((h^*)^{-1}) f(g_1^{-1}xg_2),$$

и потому R_λ действует в функциях на G/H следующим образом:

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2)f\big)(x) = \omega_\lambda(h^*) f(x^*). \tag{2.7}$$

Теорема 2.1 *В орисферических координатах ξ, η на G/H представление R_λ действует так:*

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2)f\big)(\xi, \eta) = \frac{\Phi_\lambda(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1)}{\Phi_\lambda(\xi, \eta)} \; \omega_\lambda(\widetilde{h}_2) \; \omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1}) \; f(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1), \tag{2.8}$$

где $\widetilde{h}_2$ и $\widehat{h}_1$ берутся из разложений (2.5) и (2.6) из [6] с $g = g_2$ и $g = g_1$, соответственно.

Доказательство. Пусть точка $x = s^{-1}Q^-Q^+s$, $s \in G$, имеет орисферические координаты ξ, η. По (1.4) и (1.1), (1.2) мы имеем:

$$\begin{aligned} sg_2 &= \exp Y \cdot \exp \xi \; \cdot g_2 = \exp Y \cdot \exp Y_2 \; \cdot \widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2, \\ sg_1 &= \exp X \cdot h_0 \cdot \exp \eta \; \cdot g_1 = \exp X \cdot h_0 \cdot \exp X_1 \cdot \widehat{h}_1 \cdot \exp \widehat{\eta}_1 ., \end{aligned}$$

где $\widetilde{\xi}_2 = \xi \bullet g_2$, $\widehat{\eta}_1 = \eta \circ g_1$. Поэтому

$$s^* = \exp Y^* \cdot sg_2 = \exp Y_3 \; \cdot \widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2, \tag{2.9}$$

$$s^* = \exp X^* \cdot sg_1 = \exp X_3 \cdot h^* \cdot h_0 \cdot \widehat{h}_1 \cdot \exp \widehat{\eta}_1. \tag{2.10}$$

Следовательно, используя (2.9) и (2.10), мы получаем

$$\begin{aligned} x^* &= (s^*)^{-1}Q^-Q^+s^* \\ &= \exp \widehat{\eta}_1 \cdot (h^* h_0 \widehat{h}_1)^{-1} Q^-Q^+ \widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2 \\ &= \exp \widehat{\eta}_1 \cdot (h^* h_0 \widehat{h}_1)^{-1} \widetilde{h}_2 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp \widetilde{\xi}_2. \end{aligned}$$

По условию однородности (2.1) имеем

$$f(x^*) = f(\exp\widehat{\eta}_1 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp\widetilde{\xi}_2) \cdot \omega_\lambda\big((h^* h_0 \widehat{h}_1)^{-1}\widetilde{h}_2\big) \tag{2.11}$$

С другой стороны, по (2.4) мы можем записать точку x^* в виде

$$x^* = \exp\widehat{\eta}_1 \cdot (h_0^*)^{-1} Q^-Q^+ \cdot \exp\widetilde{\xi}_2,$$

где $h_0^* = h(\widetilde{\xi}_2, \widehat{\eta}_1)$. Отсюда снова по условию однородности (2.1) получаем

$$f(x^*) = f(\exp\widehat{\eta}_1 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp\widetilde{\xi}_2) \cdot \omega_\lambda\big((h_0^*)^{-1}\big). \tag{2.12}$$

Сравнивая (2.11) и (2.12), получаем

$$\omega_\lambda\big(\widehat{h}_1^{-1} h_0^{-1} (h^*)^{-1} \widetilde{h}_2\big) = \omega_\lambda\big((h_0^*)^{-1}\big),$$

откуда

$$\omega_\lambda(h^*) = \frac{\omega_\lambda(h_0^*)}{\omega_\lambda(h_0)} \omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1}) \omega_\lambda(\widetilde{h}_2).$$

Подставим это в (2.7) и вспомним (1.5) и (1.6), в результате получим (2.8). $\square$

Аналогично, если реализовать представление R_λ в функциях на многообразии Γ, то мы получим, что оно выражается формулой:

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2) f\big)(\xi, \eta) = \omega_\lambda(\widetilde{h}_2)\ \omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1})\ f(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1).$$

Это показывает, что R_λ эквивалентно тензорному произведению:

$$R_\lambda(g_1, g_2) = \pi_\lambda^-(g_2) \otimes \pi_\lambda^+(g_1).$$

Группа $\widetilde{G}$ содержит 3 подгруппы, изоморфные G. Первая – диагональная подгруппа, состоящая из пар (g, g), $g \in G$. Ограничение представления R_λ на эту подгруппу есть представление U сдвигами на G/H:

$$\big(R_\lambda(g, g) f\big)(x) = f(g^{-1} x g).$$

В самом деле, из (2.5) и (2.6) при $g_1 = g_2 = g$ получаем $h^* = e$ и $s^* = sg$.

Другие две подгруппы G_1 и G_2 состоят из пар (g, e), (e, g), $g \in G$, соответственно.

В силу теоремы 4.1 ограничение представления R_λ на подгруппу G_2 дается формулой

$$\begin{aligned}\big(R_\lambda(e, g) f\big)(\xi, \eta) &= \frac{\Phi_\lambda(\widetilde{\xi}, \eta)}{\Phi_\lambda(\xi, \eta)}\, \omega_\lambda(\widetilde{h}) f(\widetilde{\xi}, \eta) \\ &= \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi, \eta)} \big(\pi_\lambda^-(g) \otimes 1\big) \Big[f(\xi, \eta)\Phi_\lambda(\xi, \eta)\Big].\end{aligned}$$

Аналогично, ограничение представления R_λ на подгруппу G_1 дается формулой

$$\big(R_\lambda(g,e)f\big)(\xi,\eta = \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}\big(1\otimes\pi_\lambda^+(g)\big)\Big[f(\xi,\eta)\Phi_\lambda(\xi,\eta)\Big].$$

Перейдем от группы G к ее универсальной обертывающей алгебре $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ и сохраним обозначения для представлений. Возьмем в качестве f функцию f_0, тождественно равную единице. Тогда для $X\in\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ имеем

$$(R_\lambda(0,X)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}(\pi_\lambda^-(X)\otimes 1)\Phi_\lambda(\xi,\eta), \tag{2.13}$$

$$(R_{-\lambda-\varkappa}(X,0)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}(1\otimes\pi_{-\lambda-\varkappa}^+(X))\Phi_{-\lambda-\varkappa}(\xi,\eta). \tag{2.14}$$

Правые части формул (2.13) и (2.14) – это как раз ковариантный и контравариантный символы оператора $D=\pi_\lambda^-(X)$ из полиномиального квантования.

Обозначим через $\widehat{R}_\lambda$ представление, которое получается из R_λ перестановкой аргументов. Используя реализацию представления R_λ на сечении Γ, мы получаем, что тензорное произведение $A_\lambda\otimes B_\lambda$ сплетает представление R_λ с представлением $\widehat{R}_{-\lambda-\varkappa}$. Переходя от Γ к $\mathcal{X}$ и заменяя λ на $-\lambda-\varkappa$, мы получаем, что оператор $c(\lambda)A_{-\lambda-\varkappa}\otimes B_{-\lambda-\varkappa}$ сплетает представление $\widehat{R}_{-\lambda-\varkappa}$ с представлением R_λ и переводит контравариантные символы в ковариантные. Он имеет ядро $\mathcal{B}_\lambda(\xi,\eta;u,v)$, т.е. он есть в точности преобразование Березина.

§ 3. Полиномиальное квантование на однополостном гиперболоиде

В этом параграфе мы рассматриваем ключевой пример, см. [8], а также [9]. Пространство G/H есть однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Группа G есть $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, подгруппа H состоит из диагональных матриц, надгруппа $\widetilde{G}=G\times G$ локально изоморфна псевдо-ортогональной группе $\mathrm{SO}_0(2,2)$ (накрывает ее с кратностью 2). В этом конкретном примере мы несколько меняем обозначения по сравнению с предыдущими параграфами, например, вместо λ в обозначении представлений группы G мы по традиции пишем 2σ, кроме того, мы рассматриваем несколько больший запас представлений группы G (кроме параметра σ появляется еще параметр $\varepsilon=0,1$).

1. *Представления группы* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ [3]

Группа $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1. \tag{3.1}$$

Подгруппы H, Z, N of G состоят соответственно из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad z_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad n_\eta = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеют место разложения Гаусса и "анти-Гаусса": $G = \overline{NHZ}$ и $G = \overline{ZHN}$. Группа G действует на Z и N дробно-линейными преобразованиями:

$$\xi \mapsto \widetilde{\xi} = \xi \bullet g = \frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}, \quad \eta \mapsto \widehat{\eta} = \eta \circ g = \frac{\delta\eta + \beta}{\gamma\eta + \alpha}. \tag{3.2}$$

Мы можем свести второе действие к первому: $\eta \circ g = \eta \bullet \widehat{g}$, где

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X со следом 0. Она есть прямая сумма $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$, где подалгебры $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ состоят соответственно из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они натянуты соответственно на элементы:

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Центр универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ порождается элементом

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = L_1^2 + \frac{1}{2}\,(L_+L_- + L_-L_+).$$

Для $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что функция

$$\widehat{f}(t) = t^{2\sigma,\varepsilon} f(1/t)$$

тоже входит в $C^\infty(\mathbb{R})$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ по формуле:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(t) = f(\widetilde{t})(\beta t + \delta)^{2\sigma,\varepsilon}.$$

Обозначим через $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ "контраградиентное" представление $g \mapsto T_{\sigma,\varepsilon}(\widehat{g})$, так что

$$\left(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(t) = f(\widehat{t})(\gamma t + \alpha)^{2\sigma,\varepsilon}.$$

Представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны с помощью оператора $f \mapsto \widehat{f}$.

Для базисных элементов из $\mathfrak{g}$ имеем

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_1) = -\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(L_1) = t\,\frac{d}{dt} - \sigma, \tag{3.3}$$

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_+) = \widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(L_-) = -t^2\,\frac{d}{dt} + 2\sigma t, \tag{3.4}$$

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_-) = \widehat{T}_{\sigma,\varepsilon})(L_+) = \frac{d}{dt}\,. \tag{3.5}$$

Элементу $\Delta_{\mathfrak{g}}$ отвечает скалярный оператор (умножение на число):

$$T_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma+1)\cdot E.$$

Билинейная форма

$$(F,f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,g(t)\,dt \tag{3.6}$$

инвариантна относительно пар $(T_{\sigma,\varepsilon},\, T_{-\sigma-1,\varepsilon})$ и $(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon},\, \widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon})$:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f,\, h\right) = \left(f,\, T_{-\sigma-1,\varepsilon}(g^{-1})h\right),$$

и аналогично для $\widehat{T}$. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, задаваемый формулой

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-ts)^{-2\sigma-2,\,\varepsilon} f(s)\,ds,$$

сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g),$$

а также $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

Композиция $A_{\sigma,\varepsilon}$ и $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon}\,A_{\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{c(\sigma,\varepsilon)}\cdot E,$$

где

$$c(\sigma,\varepsilon) = \frac{2\sigma+1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^{\varepsilon}+\cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi}.$$

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ симметричен относительно формы (3.6).

Формулы (3.3) – (3.5) порождают представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее универсальной обертывающей алгебры не только в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$, но и в других пространствах, например, в пространстве $C^{\infty}(\mathbb{R})$, в пространстве $\mathrm{Pol}\,(\mathbb{R})$ многочленов на $\mathbb{R}$, в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, в пространстве $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, сосредоточенных в нуле. Поскольку указанные формулы не зависят от ε, мы не будем писать ε в индексах. На базисе t^m в $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ представление T_σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ таково:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_1)\,t^m &= (m-\sigma)\,t^m,\\ T_\sigma(L_+)\,t^m &= (2\sigma-m)\,t^{m+1},\\ T_\sigma(L_-)\,t^m &= m\,t^{m-1}. \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ состоит из линейных комбинаций дельта-функции $\delta(t)$ и ее производных $\delta^{(m)}(t)$. На этом базисе имеем:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_1)\,\delta^{(m)}(t) &= (-\sigma-1-m)\,\delta^{(m)}(t),\\ T_\sigma(L_+)\,\delta^{(m)}(t) &= -m\,(2\sigma+m+1)\,\delta^{(m-1)}(t),\\ T_\sigma(L_-)\,\delta^{(m)}(t) &= \delta^{(m+1)}(t). \end{aligned}$$

Пространства $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ являются модулями Верма относительно T_σ.

Сплетающий оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ переводит базис t^m в $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ в базис $\delta^{(m)}$ в $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ и обратно (с множителями):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-ts)^{-2\sigma-2,\,\varepsilon}\, t^m\, dt = \left\{c(\sigma,\varepsilon)(2\sigma)^{(m)}\right\}^{-1} \delta^{(m)}(s)\,,$$

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon}\, \delta^{(m)} = (2\sigma)^{(m)}\, t^m.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо, за исключением случая, когда $2\sigma \in \mathbb{Z}$, $2\sigma \equiv \varepsilon$.

Пусть $2l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \equiv 2l$, тогда представление $T_{l,\varepsilon}$ имеет инвариантное конечномерное неприводимое подпространство V_l, состоящее из многочленов степени $\leqslant 2l$, так что $\dim V_l = 2l+1$. В этом случае обозначим через π_l и $\widehat{\pi}_l$ ограничения соответственно $T_{l,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{l,\varepsilon}$ на V_l. Число l называется *старшим весом* представления π_l. Всякое конечномерное неприводимое представление группы G эквивалентно одному из π_l.

Одночлены 1 и t^{2l} являются соответственно минимальным и максимальным векторами относительно представления π_l, т. е. аннулируются соответственно подалгебрами $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{n}$, относительно представления $\widehat{\pi}_l$ таковыми являются одночлены t^{2l} и 1.

Представление π_l сохраняет следующую невырожденную билинейную форму B_l на V_l: на базисных элементах она задается формулой

$$B_l(t^m, t^p) = (-1)^m \binom{2l}{m}^{-1} \delta_{m,2l-p}, \tag{3.7}$$

$\delta_{m,p}$ – дельта Кронекера. Такая форма – единственная с точностью до множителя. Наряду с ней рассмотрим форму $B'_l(f,h) = B_l(f,\widehat{h})$, так что

$$B'_l(t^m, t^p) = (-1)^m \binom{2l}{m}^{-1} \delta_{m,p}. \tag{3.8}$$

Она инвариантна относительно *пары* $(\pi_l, \widehat{\pi}_l)$.

2. *Тензорное произведение* $\pi_l \otimes \widehat{\pi}_l$

Разложим на неприводимые компоненты представление $R_l = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_l$ $(2l \in \mathbb{N}$ группы G.

Пространство $W_l = V_l \otimes V_l$ состоит из многочленов $f(\xi,\eta)$ от двух переменных ξ,η степени $\leqslant 2l$ по каждому из них. Его размерность равна $(2l+1)^2$ Представление R_l действует в W_l по формуле

$$(R_l(g)f)(\xi,\eta) = f(\widetilde{\xi},\widehat{\eta})\left[(\beta\xi+\delta)(\gamma\eta+\alpha)\right]^{2l}.$$

Соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дается формулами:

$$\begin{aligned} R_l(L_1) &= \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ R_l(L_+) &= -\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} + 2l\xi, \\ R_l(L_-) &= \frac{\partial}{\partial\xi} - \eta^2\frac{\partial}{\partial\eta} + 2l\eta. \end{aligned}$$

Многочлен

$$N(\xi,\eta) = 1 - \xi\eta$$

обладает следующим свойством:

$$N\left(\widetilde{\xi},\widehat{\eta}\right) = N(\xi,\eta)\left[(\beta\xi+\delta)(\gamma\eta+\alpha)\right]^{-1}.$$

Следовательно, многочлен

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_l(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{2l}$$

неподвижен относительно R_l:

$$R_l(g)\Phi_l = \Phi_l.$$

Для $m \in \{0,1,...,2l\}$ многочлены

$$v_{l,m} = N^{2l-m}\,\eta^m, \quad u_{l,m} = N^{2l-m}\,\xi^m$$

являются соответственно минимальным и максимальным векторами и являются собственными векторами для L_1 с собственным значением $-m$. Они порождают неприводимое инвариантное подпространство $W_l^{(m)}$ в W_l, в нем R_l эквивалентно π_m. Из совпадения размерностей: $1+3+5+...+(4l+1) = (2l+1)^2$, мы получаем разложения в прямую сумму:

$$W_l = W_l^{(0)} + W_l^{(1)} + \cdots + W_l^{(2l)}$$

и, соответственно,

$$R_l = \pi_0 + \pi_1 + \; ... \; + \pi_{2l}.$$

Возьмем на W_l билинейную форму Q_l, которая есть "тензорный квадрат" формы B_l', см. (3.8), а именно, на чистых тензорах положим

$$Q_l(\varphi\otimes\psi,\ \varphi_1\otimes\psi_1) = B_l'(\varphi,\psi_1)\,B_l'(\psi,\varphi_1)$$

и распространим на все W_l по линейности. На базисных одночленах в силу (3.8) имеем

$$Q_l(\xi^r\eta^s,\ \xi^s\eta^r) = (-1)^{r+s}\binom{2l}{r}^{-1}\binom{2l}{s}^{-1}, \qquad (3.9)$$

на остальных парах этих одночленов она равна нулю. Форма Q_l инвариантна относительно R_l:

$$Q_l(R_l(g)f, R_l(g)h) = Q_l(f, h).$$

Подпространства $W_l^{(m)}$ ортогональны относительно Q_l. Обозначим

$$Q_l(u_{l,m}, v_{l,m}) = (-1)^m \lambda(l, m). \tag{3.10}$$

Вычисление дает

$$\lambda(l, m) = \frac{m!^2(2l - m)!(2l + m + 1)!}{(2m + 1)!(2l)!^2}.$$

3. *Однополостный гиперболоид*

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{3.11}$$

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_0$ обозначают гиперболоид $[x, x] = 1$ и конус $[x, x] = 0$, $x \neq 0$, соответственно. Реализуем $\mathcal{X}$ как множество матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix}$$

с определителем равным нулю. Группа G действует транзитивно на этих матрицах сопряжениями:

$$x \mapsto g^{-1}xg. \tag{3.12}$$

Стационарная подгруппа точки

$$x^0 = (0, 0, 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть подгруппа H. Под действием матрицы $g \in G$, заданной (3.1), точка x^0 переходит в точку

$$x = (\alpha\gamma + \beta\delta,\ \alpha\gamma - \beta\delta,\ \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Действие (3.12) дает (правое) действие группы G на векторах $x \in \mathbb{R}^3$ матрицами из $\mathrm{SO}_0(1, 2)$. Это дает нам гомоморфизм группы G на группу $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ с ядром $\{\pm E\}$.

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = N^{-1}(\xi + \eta,\ \xi - \eta,\ 1 + \xi\eta), \quad N = N(\xi, \eta), \tag{3.13}$$

отсюда

$$\frac{1}{N} = \frac{x_3 + 1}{2},$$

в матричном виде получим:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти координаты определены на $\mathcal{X}$, кроме $x_3 = -1$. Действие (3.12) в этих координатах разделяется: если x имеет координаты ξ, η, то $g^{-1}xg$ имеет координаты $\widetilde{\xi}$, $\widehat{\eta}$, см. (3.2). Базисная точка x^0 имеет координаты $\xi = 0$, $\eta = 0$. Элемент $g \in G$ переводит x^0 в точку с координатами

$$\xi = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \eta = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{3.14}$$

так что $N = (\alpha\delta)^{-1}$.

Действие группы G на функциях f на $\mathcal{X}$ сдвигами обозначим через U:

$$(U(g)f)(x) = f\left(g^{-1}xg\right),$$

в орисферических координатах:

$$(U(g)f)(\xi,\eta) = f\left(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}\right).$$

Напишем в координатах ξ, η меру dx, оператор Лапласа–Бельтрами Δ и скобку Пуассона на $\mathcal{X}$, инвариантные относительно G:

$$\begin{aligned} dx &= dx(\xi,\eta) = N^{-2}\, d\xi d\eta, \\ \Delta &= U(\Delta_{\mathfrak{g}}) = N^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, \\ \{f,h\} &= N^2\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Многочлен f на $\mathbb{R}^3$ называется *гармоническим* относительно формы (3.11), если

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ ограничения на $\mathcal{X}$ пространства гармонических многочленов и однородных гармонических многочленов степени k, соответственно. Это отображение ограничения – взаимно однозначное соответствие. Пространство $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ совпадает с пространством ограничений на $\mathcal{X}$ *всех* многочленов на $\mathbb{R}^3$, а пространство

$$\mathcal{M}_k(\mathcal{X}) = \mathcal{H}_0(\mathcal{X}) + \mathcal{H}_1(\mathcal{X}) + \ldots + \mathcal{H}_k(\mathcal{X})$$

совпадает с пространством ограничений на $\mathcal{X}$ всех многочленов степени $\leqslant k$.

Пространство $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ инвариантно и неприводимо относительно U, соответствующее представление эквивалентно π_k. Многочлены из этого пространства являются собственными для оператора Лапласа–Бельтрами:

$$\Delta f = k(k+1)f, \quad f \in \mathcal{H}_k(\mathcal{X}). \tag{3.16}$$

Вспомним R_l, W_l и $\Phi = \Phi_l$. Отображение

$$f \mapsto \Phi^{-1}f, \quad f \in W_l,$$

переводит W_l в пространство $\Phi^{-1}W_l$ некоторых рациональных функций от ξ, η. Оно сплетает R_l и ограничение U_l представления U на $\Phi^{-1}W_l$.

Теорема 3.1 *Пространство* $\Phi^{-1}W_l$ *совпадает с* $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$, *а представление* R_l *эквивалентно* U_l.

Доказательство. Достаточно для каждого $m = 0, 1, ..., 2l$ указать в $\Phi^{-1}W_l$ хотя бы один элемент из $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$. Таким элементом является, например, минимальный вектор

$$\Phi^{-1}v_{l,m} = \left(\frac{\eta}{N}\right)^m = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^m. \quad \square$$

4. *Конечномерный анализ на однополостном гиперболоиде*

В этом пункте мы даем явные конструкции и формулы для разложения представления U_l группы G в пространстве $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ и, следовательно, тензорного произведения $R_l = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_l$.

Перенесем билинейную форму Q_l с W_l на $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ и обозначим полученную форму на $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ через $\mathcal{B}_l$. В силу (3.9) мы имеем

$$\mathcal{B}_l\left(\Phi^{-1}\xi^r\eta^s, \Phi^{-1}\xi^s\eta^r\right) = (-1)^{r+s}\binom{2l}{r}^{-1}\binom{2l}{s}^{-1},$$

$\mathcal{B}_l$ равна нулю на остальных парах базисных элементов $\Phi^{-1}\xi^r\eta^s$.

Напишем преобразования Пуассона и Фурье – операторы, сплетающие U_l и π_m, $m = 0, 1, \ldots, 2l$.

Подпространство H-инвариантов в V_m относительно π_m нетривиально тогда и только тогда, когда $m \in \mathbb{N}$. Тогда оно одномерно. В качестве базиса возьмем функцию

$$\theta_m(t) = t^m. \tag{3.17}$$

Она определяет ядро Пуассона:

$$P_m(x;t) = P_m(\xi, \eta;\, t) = \left(\pi_m(g^{-1})\,\theta_m\right)(t),$$

где $x = g^{-1}x^0g$ – точка гиперболоида $\mathcal{X}$, а ξ, η – ее орисферические координаты. Вот явные выражения:

$$\begin{aligned} P_m(x;t) = P_m(\xi, \eta;\, t) &= \left[\frac{(t-\xi)\,(1-\eta t)}{N(\xi,\eta)}\right]^m \\ &= [x, y]^m, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где y – следующая точка конуса $\mathcal{X}_0$:

$$y = \left(\frac{t^2+1}{2},\ \frac{t^2-1}{2},\ t\right).$$

Ядро P_m определяет преобразование Пуассона

$$(\mathcal{P}_m\varphi)(x) = (\mathcal{P}_m\varphi)(\xi,\eta) = B_m(P_m(x,\cdot),\ \varphi), \tag{3.19}$$

где B_m – билинейная форма (3.6). Это преобразование сплетает π_m и U. При фиксированном t ядро Пуассона есть многочлен из $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$, поэтому образ преобразования Пуассона есть все $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$. Оно отображает базис t^r в V_m в некоторый базис $F_{m,r}$ в $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$. По (3.18) и (3.19) получаем

$$F_{m,r} = N^{-m}\binom{2m}{r}^{-1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{m}{r-j}\xi^{r-j}\eta^{m-j}. \tag{3.20}$$

Фактически суммирование идет по $0 \leqslant j \leqslant r$ для $r \leqslant m$ и по $r-m \leqslant j \leqslant m$ для $r \geqslant m$. В частности, минимальный и максимальный векторы таковы:

$$F_{m,0} = \left(\frac{\eta}{N}\right)^m = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^m, \quad F_{m,2m} = \left(\frac{\xi}{N}\right)^m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^m. \tag{3.21}$$

Поскольку $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$ неприводимо, значения формы $\mathcal{B}_l$ на базисе $F_{m,r}$ только множителем отличаются от значений формы B_m на базисе t^r. По определению формы $\mathcal{B}_l$ и по (3.10) и (5.22) получаем

$$\mathcal{B}_l(F_{m,0},\ F_{m,2m}) = Q_l(v_{l,m},\ u_{l,m}) = (-1)^m\lambda(l,m) = \lambda(l,m)\cdot B_m\left(1,\ t^{2m}\right)$$

и вообще, (см. (3.7))

$$\mathcal{B}_l(F_{m,r},\ F_{m,2m-r}) = (-1)^{m+r}\binom{2m}{r}^{-1}\lambda(l,m) = \lambda(l,m)\cdot B_m\left(t^r,\ t^{2m-r}\right).$$

Возвратимся к ядру Пуассона. Теперь мы можем его переписать в виде:

$$P_m(\xi,\eta;\ t) = \sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}F_{m,\,2m-r}(\xi,\eta)\,t^r. \tag{3.22}$$

Определим теперь *преобразование Фурье* $\mathcal{F}_{l,m} : \mathcal{E}_{2l}(\mathcal{X}) \to V_m$ следующим образом:

$$(\mathcal{F}_{l,m}F)(t) = \mathcal{B}_l(P_m(\cdot,t),\ F),$$

где $F \in \mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$. Внося сюда (3.22), мы получаем

$$(\mathcal{F}_{l,m}F)(t) = \sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}\mathcal{B}_l(F_{m,\,2m-r}\,,\ F)\,t^r.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}_{l,m}$ сплетает U_l с π_m и сопряжено преобразованию Пуассона $\mathcal{P}_m$:

$$\mathcal{B}_l(F,\,\mathcal{P}_m\varphi) = B_m(\mathcal{F}_{l,m}F,\,\varphi), \tag{3.23}$$

где $F \in \mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$, $\varphi \in V_m$. Композиция этих двух преобразований в силу неприводимости π_m есть скалярный оператор:

$$\mathcal{F}_{l,m}\mathcal{P}_m = \lambda(l,m)\cdot E.$$

Поэтому для $F \in \mathcal{H}_m(\mathcal{X})$ имеем

$$\mathcal{B}_l(F,F) = \lambda(l,m)^{-1}B_m(\mathcal{F}_{l,m}F,\,\mathcal{F}_{l,m}F)$$

и для произвольного $F \in \mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ имеем

$$\mathcal{B}_l(F,F) = \sum_{m=0}^{2l}\lambda(l,m)^{-1}B_m(\mathcal{F}_{l,m}F,\,\mathcal{F}_{l,m}F).$$

Это равенство можно рассматривать как формулу Планшереля на $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$, "мерой Планшереля" является $\lambda(l,m)^{-1}$.

Образ самого H-инварианта θ_m при преобразовании Пуассона назовем *сферической функцией*, отвечающей представлению π_m:

$$\Psi_m = \mathcal{P}_m\theta_m. \tag{3.24}$$

По (3.17) и по построению базиса $F_{m,r}$ мы имеем

$$\Psi_m = (-1)^m F_{m,m},$$

так что по (3.20) получаем:

$$\Psi_m = N^{-m}\binom{2m}{m}^{-1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^2(\xi\eta)^{m-j}.$$

Это с точностью до множителя многочлен Лежандра $P_m(x_3)$:

$$\Psi_m(x) = \binom{2m}{m}P_m(x_3),$$

см. [2] 10.10, выражение координат x_i через ξ,η см. (3.13).

Из (3.24) и (3.23) мы имеем

$$\mathcal{B}_l(\Psi_m, F) = B_m(\theta_m,\,\mathcal{F}_{l,m}F),$$

что дает выражение для сферической функции как "обобщенной функции" на пространстве $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$.

Сдвинутая сферическая функция $U(g^{-1})\Psi_m$ есть аналог ядра Бергмана:

$$U(g^{-1})\Phi_m(u,v) = \sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}F_{m,r}(u,v)F_{m,2m-r}(\xi,\eta),$$

где ξ, η отвечают $g \in G$ по (3.14).

Пусть Y – какая–нибудь функция из $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$, инвариантная относительно H. Сопоставим ей оператор $F \mapsto Y * F$ в $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ – и назовем его *сверткой* с Y – следующим образом:

$$(Y * F)(x) = (Y * F)(\xi, \eta) = \mathcal{B}_l \left(U\left(g^{-1}\right) Y,\, F\right).$$

В частности, свертка с Φ^{-1} есть тождественный оператор, так что Φ^{-1} играет роль дельта-функции. Сдвинутая функция $U\left(g^{-1}\right)\Phi^{-1}$ есть следующая функция от двух пар переменных:

$$\begin{aligned} E_l(x;y) = E_l(\xi,\eta;\, u,v) &= \frac{\Phi(u,\eta)\,\Phi(\xi,v)}{\Phi(\xi,\eta)\,\Phi(u,v)} \\ &= \left(\frac{[x,y]+1}{2}\right)^{2l}. \end{aligned}$$

Эта функция только множителем отличается от ядра Березина, которое будет рассматриваться в следующем пункте. Таким образом, ядро E_l имеем следующее воспроизводящее свойство:

$$\mathcal{B}_l(E_l(x,\,\cdot\,),\, F(\,\cdot\,)) = F(x), \quad F \in \mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X}).$$

Для сферической функции Ψ_m свертка с $\lambda(l,m)^{-1}\Psi_m$ есть проекция пространства $\mathcal{M}_{2l}(\mathcal{X})$ на подпространство $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$.

Таким образом, мы имеем разложение:

$$\Phi^{-1} = \sum_{m=0}^{2l} \lambda(l,m)^{-1}\Psi_m. \tag{3.25}$$

Формула (3.25) также может рассматриваться как аналог формулы Планшереля (разложение дельта-функции по сферическим функциям).

5. *Полиномиальное квантование на однополостном гиперболоиде*

Применим к нашему однополостному гиперболоиду $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$ схему из § 1.

В качестве алгебры операторов мы берем алгебру операторов $T_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, с параметром σ, действующих в функциях $\varphi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{2\sigma,\,\varepsilon}$$

от двух переменных ξ, η.

Ковариантным символом оператора $D = T_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, назовем функцию

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}\,(T_\sigma(X)\otimes 1)\Phi(\xi,\eta). \tag{3.26}$$

Она не зависит от ε. Рассмотрим ξ, η как орисферические координаты на $\mathcal{X}$. Тогда функции (3.26) превратятся в функции на $\mathcal{X}$. Обозначим пространство этих функций через $\mathcal{A}_{2\sigma}$.

Как следует из формул (3.3)–(3.5), функции F из $\mathcal{A}_{2\sigma}$ являются линейными комбинациями функций $N(\xi,\eta)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, с коэффициентами, полиномиальными по σ и по ξ, η. Поэтому $\mathcal{A}_{2\sigma}$ входит в $\mathcal{H}(\mathcal{X})$. Оно инвариантно относительно операторов $T_\sigma(X) \otimes 1$ и $1 \otimes \widehat{T}_\sigma(X)$.

В частности, ковариантный символ тождественного оператора есть тождественная единица на $\mathcal{X}$. Ковариантные символы операторов $T_\sigma(L_1)$, $T_\sigma(L_+)$, $T_\sigma(L_-)$ – это, соответственно, функции

$$-\sigma x_3, \quad \sigma(x_1 + x_2), \quad -\sigma(x_1 - x_2).$$

Ковариантный символ оператора $T_\sigma(L_-^r) = (d/dt)^r$ есть с точностью до множителя минимальный многочлен $F_{r,0}$ из $\mathcal{H}_r(\mathcal{X})$, а именно:

$$cov.\,symb.\;\; T_\sigma(L_-^r) = (2\sigma)^{(r)}(-1)^r \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^r. \tag{3.27}$$

Вообще, для элемента $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ степени k ковариантный символ оператора $T_\sigma(X)$ есть многочлен из $\mathcal{M}_k(\mathcal{X})$ с коэффициентами, зависящими от σ полиномиально.

Оператор $D = T_\sigma(X)$ восстанавливается по своему ковариантному символу – в точности по формуле (1.8). Следовательно, ядро оператора D есть

$$K(\xi, u) = c \int F(\xi, v)\, \frac{\Phi(\xi, v)}{\Phi(u, v)}\, \frac{dv}{(1 - uv)^2}.$$

Здесь и дальше интегралы берутся по $\mathbb{R}$ или по $\mathbb{R}^2$. Обратно, ковариантный символ выражается через ядро:

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(\xi, \eta)} \int K(\xi, u)\Phi(u, \eta)\, du.$$

Соответствие $D \mapsto F$ коммутирует с действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$: если F есть ковариантный символ оператора $D = T_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, то $U(L)F$, где $L \in \mathfrak{g}$, есть ковариантный символ оператора

$$T_\sigma(\mathrm{ad}\, L \cdot X) = [T_\sigma(L),\, D]\,.$$

Отсюда и из (3.27) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2 *Множество $\mathcal{A}_{2\sigma}$ ковариантных символов всех операторов $T_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, есть все пространство $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ при $2\sigma \notin \mathbb{N}$ и пространство $\mathcal{M}_{2\sigma}(\mathcal{X})$ при $2\sigma \in \mathbb{N}$.*

Умножение операторов дает умножение $*$ ковариантных символов. Интегральное выражение дается в точности формулой (1.9). В нашем случае ядро Березина $\mathcal{B}(\xi,\eta;\,u,v)$, заданное (1.10), можно переписать в терминах гиперболоида $\mathcal{X}$ так:

$$\mathcal{B}(x;y) = c\cdot\left(\frac{[x,y]+1}{2}\right)^{2\sigma,\varepsilon}.$$

Преобразование функций $F(\xi,\eta)$ на $\mathcal{X}$, состоящее в перестановке ξ и η (в координатах x_i это изменение знака у x_2), является антиинволюцией для умножения $*$: $(F_1 * F_2)^{\vee} = \breve{F}_2 * \breve{F}_1$.

Итак, мы получили:

Теорема 3.3 *Совокупность $\mathcal{A}_{2\sigma}$ ковариантных символов есть ассоциативная алгебра с единицей относительно умножения $*$. Преобразование $F\mapsto\breve{F}$ является антиинволюцией этой алгебры.*

Одночлен

$$\frac{\xi^r\eta^s}{N^m}\quad (r,s\leqslant m) \tag{3.28}$$

есть ковариантный символ для оператора

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^{m-s}\binom{m-s}{j}(-1)^{s+j}\,\frac{1}{(2\sigma)^{(s+j)}}\,\xi^{r+j}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{s+j} \\ &= (-1)^m\,\frac{1}{(2\sigma)^{(m)}}\,\xi^r\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^s\left(\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}-2\sigma\right)^{[m-s]}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

так что ядро $K(\xi,u)$ этого оператора есть

$$K(\xi,u) = \sum_{j=0}^{m-s}\binom{m-s}{j}\frac{1}{(2\sigma)^{(s+j)}}\,\xi^{r+j}\,\delta^{(s+j)}(\xi-u).$$

Контравариантный символ F оператора A мы определяем в точности формулой (1.11). Ядро $L(\xi,u)$ такого оператора есть

$$L(\xi,u) = c\int F(u,v)\,\frac{\Phi(\xi,v)}{\Phi(u,v)}\,\frac{dv}{(1-uv)^2}.$$

Обратно,

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi^*(\xi,\eta)}\int L(t,\xi)\Phi^*(t,\eta)\,dt,$$

где мы обозначили

$$\Phi^*(\xi,\eta) = \Phi_{-\sigma-1,\varepsilon}(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)(1-\xi\eta)^2}.$$

Для многочленов $F(\xi,\eta)$ из $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ соответствующие операторы A – это дифференциальные операторы. В частности, одночлен (3.28) есть контравариантный символ для оператора

$$A = \sum_{j=0}^{m-s} \binom{m-s}{j} \frac{1}{(-2\sigma-2)^{(s+j)}} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{s+j} \circ \xi^{r+j}, \tag{3.30}$$

так что ядро этого оператора A есть

$$L(\xi,u) = \sum_{j=0}^{m-s} \binom{m-s}{j} \frac{1}{(-2\sigma-2)^{(s+j)}}\, u^{r+j}\, \delta^{(s+j)}(u-\xi).$$

Рассмотрим композиции $\mathcal{O} = \mathrm{contra} \circ \mathrm{co}$, $\mathcal{B} = \mathrm{co} \circ \mathrm{contra}$. Последнее есть преобразование Березина.

Теорема 3.4 *Пусть $A = \mathcal{O}(D)$, т.е. многочлен F есть одновременно ковариантный символ для оператора $D = T_\sigma(X)$ и контравариантный символ для оператора A. Тогда $A = T_{-\sigma-1}(X^\vee)$. Следовательно, A получается из D сопряжением относительно формы* (3.6). *В терминах ядер это означает, что ядро $L(\xi,u)$ оператора A получается из ядра $K(\xi,u)$ оператора D перестановкой аргументов и заменой σ на $-\sigma-1$:*

$$L(\xi,u) = K(u,\xi)\Big|_{\sigma\to-\sigma-1}.$$

Для доказательства надо сравнить (3.29) и (3.30).

Для преобразования Березина $\mathcal{B}$ мы имеем следующие теоремы. Первая следует из формул (1.11) и (1.8).

Теорема 3.5 *Пусть $F_1 = \mathcal{B}F$, т. е. F и F_1 – это соответственно контра- и ковариантный символы одного и того же оператора A. Тогда F_1 получается из F с помощью интегрального оператора с ядром Березина:*

$$F_1(\xi,\eta) = \int F(u,v)\mathcal{B}(\xi,\eta;\, u,v)\, dx(u,v).$$

Теорема 3.6 *Преобразование Березина определено на $\mathcal{A}_{-2\sigma-2}$. На всяком $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$, входящем в $\mathcal{A}_{-2\sigma-2}$, оно есть умножение на число*

$$b_m(\sigma) = \frac{\Gamma(-2\sigma+m)\,\Gamma(-2\sigma-m-1)}{\Gamma(-2\sigma)\,\Gamma(-2\sigma-1)}\,. \tag{3.31}$$

Доказательство. В силу $\mathfrak{g}$-эквивариантности перехода к символам достаточно взять какой–нибудь один многочлен F из $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$. Возьмем минимальный вектор: $F = F_{m,0} = (\eta/N)^m$, см. (3.21). Тогда по (3.30) оператор A есть

$$A = \frac{1}{(-2\sigma-2)^{(m)}} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m.$$

В свою очередь, этот оператор имеет по (3.26) ковариантный символ $F_1 = b_m(\sigma)F$, где

$$b_m(\sigma) = \frac{1}{(-2\sigma-2)^{(m)}} \cdot (2\sigma)^{(m)}(-1)^m,$$

что и есть (3.31). $\square$

Теорема 3.7 *Преобразование Березина $\mathcal{B}$ выражается через оператор Лапласа–Бельтрами Δ следующим образом:*

$$\mathcal{B} = \left.\frac{\Gamma(-2\sigma+\tau)\,\Gamma(-2\sigma-\tau-1)}{\Gamma(-2\sigma)\,\Gamma(-2\sigma-1)}\right|_{\tau(\tau+1)=\Delta}. \tag{3.32}$$

В самом деле, $\Delta = m(m+1)$ на $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$, см. (3.16).

Пусть теперь $\sigma \to -\infty$. Из (3.32) с помощью [1] 1.18 (4) мы получаем

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{2\sigma}\,\Delta, \tag{3.33}$$

ср. [6] (5.6). Отсюда по (3.15) мы получаем

$$F_1 * F_2 = F_1F_2 - \frac{1}{2\sigma}\,N^2\,\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\,\frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \ldots$$

Это дает нам, что для алгебры ковариантных символов верен принцип соответствия [6] (5.4), (5.5).

Более того, мы можем написать не только два члена асимптотики, как в (3.33), но и полное асимптотическое разложение преобразования $\mathcal{B}$ в явном виде. Но надо разлагать не по степеням $h = -1/2\sigma$, а использовать обобщенные степени переменной $-2\sigma - 2$. Тогда разложение оказывается рядом, обрывающимся на каждом $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$.

Теорема 3.8 *Справедливо следующее разложение преобразования Березина:*

$$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\;(\Delta-1\cdot 2)\;(\Delta-2\cdot 3)\,\cdots\,(\Delta-(k-1)k)}{k!} \cdot \frac{1}{(-2\sigma-2)^{(k)}}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Используя формулу дополнения для гамма-функции, мы переписать (3.31) так:

$$b_m = \frac{\Gamma(-\lambda-1)\,\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(-\lambda-m-1)\,\Gamma(-\lambda+m)},$$

где $\lambda = -2\sigma - 2$. Это есть значение гипергеометрической функции в единице: $b_m = F(m+1,\,-m;\,-\lambda;\,1)$, так что

$$b_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)^{[k]}\;m^{(k)}}{\lambda^{(k)}\;k!}.$$

Числитель дроби может быть записан как

$$m\Big(m+1\Big)\cdot\Big(m\,(m+1)-1\cdot 2\Big)\Big(m\,(m+1)-2\cdot 3\Big)...\Big(m\,(m+1)-(k-1)\cdot k\Big).$$

Но это и есть как раз собственное число на $\mathcal{H}_m(\mathcal{X})$ оператора, стоящего в числителе первой дроби в (3.34). □

Из (3.34) видим, что на пространстве $\mathcal{M}_r(\mathcal{X})$, $r\in\mathbb{N}$, преобразование $\mathcal{B}$ есть дифференциальный оператор (некоторый многочлен от Δ).

§ 4. Полиномиальное квантование на комплексном гиперболоиде

В этом параграфе мы переносим на *комплексный* гиперболоид в $\mathbb{C}^3$ результаты из § 3 для *вещественного* гиперболоида, см. [4].

Представления основной серии группы $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ определяются следующим образом. Для $\lambda\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, обозначим

$$a^{\lambda,k}=|a|^{\lambda}\left(\frac{a}{|a|}\right)^{k}.$$

Пусть $\sigma\in\mathbb{C}$, $2m\in\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,m}$ пространство функций $\varphi(z)$ из $C^\infty(\mathbb{C})$ таких, что функции $z^{2\sigma,2m}\varphi(-1/z)$ тоже принадлежат $C^\infty(\mathbb{C})$. Представление $T_{\sigma,m}$ основной серии действует в $\mathcal{D}_{\sigma,m}$ по формуле

$$\big(T_{\sigma,m}(g)\varphi\big)(z)=\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{2\sigma,2m},\quad g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Меняя местами α с δ и β с γ, получаем контраградиентное представление $\widehat{T}_{\sigma,m}$. Представления $T_{\sigma,m}$ и $\widehat{T}_{\sigma,m}$ эквивалентны. Оператор с ядром $(1-zw)^{-2\sigma-4,-2m}$ сплетает $T_{\sigma,m}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-2,-m}$, а также $\widehat{T}_{\sigma,m}$ и $T_{-\sigma-2,-m}$.

Аналитическое конечномерное представление π_l, $2l\in\mathbb{N}$, группы G действует в пространстве V_l многочленов $\varphi(z)$ от z степени $\leqslant 2l$ по формуле

$$\left(\pi_l(g)\varphi\right)(z)=\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{2l}.$$

Антианалитическое представление $\overline{\pi}_l$ получается комплексным сопряжением. Всякое конечномерное неприводимое представление группы G есть тензорное произведение $\pi_{l_1,l_2}=\pi_{l_1}\otimes\overline{\pi}_{l_2}$

Введем на $\mathbb{C}^3$ билинейную форму $[x,y]=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Обозначим через $\mathcal{X}$ гиперболоид $[x,x]=1$. Это пространство может быть реализовано как пространство матриц

$$x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-x_3&x_2-x_1\\ x_2+x_1&1+x_3\end{pmatrix}$$

с определителем $\det x = 0$. Группа G действует на таких матрицах: $x \mapsto g^{-1}xg$. На $\mathcal{X}$ она действует транзитивно, стационарной подгруппой точки $x^0 = (0,0,1)$ является подгруппа H диагональных матриц.

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = \frac{1}{N}(\xi+\eta, \xi-\eta, 1+\xi\eta) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\xi\eta & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

где $N = 1 - \xi\eta$. На $\mathcal{X}$ имеется два оператора Лапласа Δ и $\overline{\Delta}$ (образующие в алгебре инвариантных дифференциальных операторов), где $\Delta = N^2\partial^2/\partial\xi\partial\eta$.

Конечномерный анализ для комплексного гиперболоида связан с разложением на неприводимые составляющие тензорного произведения произвольного неприводимого конечномерного представления группы G и его контраградиентного. Такие тензорные произведения реализуются в многочленах на гиперболоиде. Мы находим действие соответствующих сплетающих операторов (преобразований Пуассона и Фурье), вычисляем сферические функции и устанавливаем "формулу Планшереля". Все это построение идет параллельно § 3, оно сводится к тензорному произведению комплексификаций конечномерных представлений из § 3 на комплексно сопряженные.

Полиномиальное квантование на комплексном гиперболоиде (ковариантные символы, контравариантные символы, преобразование Березина) в точности повторяет § 3. В качестве алгебры операторов мы берем алгебру операторов $D = T_{\sigma,m}(X)$, где X – элементы универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли группы G, действующие в функциях от ξ, и где $\sigma \in \mathbb{C}$, но m должно быть *целым*. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-2,-m}$, а именно,

$$\Phi(\xi,\eta) = N^{2\sigma,2m} = (1-\xi\eta)^{2\sigma,2m}.$$

Для σ общего положения пространство ковариантных символов есть пространство всех многочленов на G/H.

Теорема 4.1 *Преобразование Березина выражается через операторы Лапласа:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{\Gamma(-\sigma-m+\lambda)\Gamma(-\sigma-m-\lambda-1)}{\Gamma(-\sigma-m)\Gamma(-\sigma-m-1)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(-\sigma+m+\mu)\Gamma(-\sigma+m-\mu-1)}{\Gamma(-\sigma+m)\Gamma(-\sigma+m-1)}, \end{aligned}$$

где надо положить $\Delta = \lambda(\lambda+1)$, $\overline{\Delta} = \mu(\mu+1)$.

Следовательно, при $\sigma \to -\infty$ преобразование Березина имеет асимптотику:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\sigma}(\Delta + \overline{\Delta}).$$

Отсюда следует выполнение принципа соответствия.

Справедливо также следующее полное разложение преобразования Березина:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \;=\; & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta(\Delta-1\cdot 2)(\Delta-2\cdot 3)\ldots(\Delta-(k-1)k)}{k!}\cdot\frac{1}{(-\sigma-m-2)^{(k)}}\times\\ \times & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\overline{\Delta}(\overline{\Delta}-1\cdot 2)(\overline{\Delta}-2\cdot 3)\ldots(\overline{\Delta}-(r-1)r)}{r!}\cdot\frac{1}{(-\sigma+m-2)^{(r)}}.\end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от вещественного случая для комплексного гиперболоида мы имеем счетное число полиномиальных квантований, они нумеруются целым числом m.

§ 5. Полиномиальное квантование на пара-эрмитовых пространствах с псевдоортогональной группой движений

В этом параграфе мы рассматриваем полиномиальное квантование на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H ранга 2 с псевдо-ортогональной группой $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$. Связная компонента единицы группы H есть $H_e = \mathrm{SO}_0(p-1,q-1)\times\mathrm{SO}_0(1,1)$. Мы считаем, что G/H есть G-орбита в присоединенном представлении группы G. Размерность пространства G/H равна $2n-4$, где $n = p+q$.

1. *Псевдоортогональная группа и ее алгебра Ли*

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i,$$

где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 1$, а $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем 1, сохраняющих форму $[x,y]$. Мы будем считать, что G действует линейно в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p>1$, $q>1$.

Будем записывать матрицы $g\in G$ в блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1+(n-2)+1$. Подгруппа H в G образована матрицами

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & v & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $v \in \mathrm{SO}(p-1, q-1)$. Она состоит из двух связных кусков. Ее связная компонента единицы H_e состоит из матриц (5.1), где $\alpha = \mathrm{ch}t$, $\beta = \mathrm{sh}t$. Следовательно, $H_e = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $XI + IX' = 0$, где $I = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, штрих означает транспонирование. Возьмем в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H элемент

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стационарная подгруппа матрицы Z_0 в присоединенном представлении есть в точности подгруппа H, так что многообразие G/H есть как раз G-орбита в алгебре $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия, содержащая Z_0.

Оператор $\mathrm{ad}\, Z_0$ имеет три собственных значения: -1, 0, $+1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{q}^+.$$

Подпространства $\mathfrak{q}^-$, $\mathfrak{q}^+$ состоят соответственно из матриц

$$X_\xi : \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ \xi^* & 0 & \xi^* \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_\eta : \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta^* & 0 & -\eta^* \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix},$$

где ξ, η – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-2}$, φ^* обозначает $I_1\varphi'$, где $I_1 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}$. Оба пространства $\mathfrak{q}^\pm$ являются абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и имеют размерность $n-2$. Подгруппа H сохраняет подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$. Под действием элемента $h \in H$, см. (5.1), координаты ξ и η из $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ преобразуются следующим образом: $\xi \mapsto (\alpha+\beta)\,\xi\, v$, $\eta \mapsto (\alpha - \beta)\,\eta\, v$.

2. *Представления группы G, связанные с конусом* [5]

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x, x] = 0$, $x \neq 0$, в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе две точки

$$s^- = (1, 0, \ldots, 0, -1), \quad s^+ = (1, 0, \ldots, 0, 1).$$

Рассмотрим следующие сечения конуса (проходящие через эти точки соответственно):

$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\}, \quad \Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\}.$$

Они пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе порождает соответствующие дробно-линейные действия на Γ^- и Γ^+:

$$x \longmapsto \widetilde{x} = -\frac{2}{[xg, s^+]} \cdot xg, \ \ x \in \Gamma^-, \tag{5.2}$$

$$x \longmapsto \widehat{x} = -\frac{2}{[xg, s^-]} \cdot xg, \ \ x \in \Gamma^+. \tag{5.3}$$

Стационарными подгруппами в группе G точек $s^- \in \Gamma^-$ и $s^+ \in \Gamma^+$ служат максимальные параболические подгруппы $P^+ = Q^+H$ и $P^- = Q^-H$ соответственно. Здесь $Q^- = \exp \mathfrak{q}^-$, $Q^+ = \exp \mathfrak{q}^+$. Группы Q^- и Q^+ действуют просто транзитивно на Γ^- и Γ^+ соответственно. Это позволяет ввести координаты на Γ^- и Γ^+ с помощью координат ξ из $\mathfrak{q}^-$ и η из $\mathfrak{q}^+$, а именно, для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$u = u(\xi) = s^- \exp X_\xi = (1 + \langle \xi, \xi \rangle,\ 2\xi,\ -1 + \langle \xi, \xi \rangle), \tag{5.4}$$

$$v = v(\eta) = s^+ \exp Y_\eta = (1 + \langle \eta, \eta \rangle,\ 2\eta,\ 1 - \langle \eta, \eta \rangle), \tag{5.5}$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle$ обозначает билинейную форму в $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей I_1.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f класса C^∞ на конусе $\mathcal{C}$, однородных "степени σ, ε":

$$f(tx) = t^{\sigma,\varepsilon} f(x),\ x \in \mathcal{C},\ t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Обозначим через $T_{\sigma,\varepsilon}$ представление группы G, которое действует в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ сдвигами:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g) f\right)(x) = f(xg).$$

Реализуем представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ в функциях на сечениях $\Gamma^\pm$ конуса $\mathcal{C}$. Ограничения функций из $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ на $\Gamma^\pm$ образуют некоторые пространства $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\Gamma^\pm)$. Они содержатся в $C^\infty(\Gamma^\pm)$ и содержат $\mathcal{D}(\Gamma^\pm)$. В координатах ξ, η представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует по формулам

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g) f\right)(\xi) = f(\widetilde{\xi}) \left\{ -\frac{1}{2}[ug, s^+] \right\}^{\sigma,\varepsilon},$$

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g) f\right)(\eta) = f(\widehat{\eta}) \left\{ -\frac{1}{2}[vg, s^-] \right\}^{\sigma,\varepsilon},$$

где $u = u(\xi)$, $v = v(\eta)$ определены в (5.4), (5.5), действия $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ и $\eta \mapsto \widehat{\eta}$ порождаются действиями (5.2), (5.3).

Определим в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\Gamma^\pm)$ оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ следующим образом:

$$(A_{\sigma,\varepsilon} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} N(\xi, \eta)^{2-n-\sigma,\varepsilon} f(\eta)\, d\eta, \tag{5.6}$$

где

$$N(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\left[u(\xi), v(\eta)\right] = 1 - 2\langle \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle.$$

Функция $N(\xi, \eta)$ есть многочлен от ξ, η. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ сплетает представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$. Эти представления действуют в функциях на *разных* сечениях. В (5.6) можно ξ заменить на η и наоборот. Произведение $A_{2-n-\sigma,\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{2-n-\sigma,\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon} = c(\sigma, \varepsilon)^{-1} \cdot E,$$

где

$$c(\sigma,\varepsilon)^{-1} = 2^3\pi^{n-3}\frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(3-n-\sigma)}{(2\sigma+n-2)\sin(\sigma+n/2)\pi}\times$$
$$\times \sin\frac{\sigma-\varepsilon}{2}\pi\cdot\sin\frac{\sigma-\varepsilon+p}{2}\pi\cdot\sin\frac{\sigma+\varepsilon+q}{2}\pi\cdot\sin\frac{\sigma+\varepsilon+n}{2}\pi\,.$$

3. *Пространство G/H*

Рассмотрим следующую реализацию пространства G/H. Пусть Ω – множество матриц:

$$z=\frac{y^*x}{[x,y]}\,, \tag{5.7}$$

где $x,y\in\mathcal{C}$, $y^*=Iy'$. Ранг и след этих матриц равны 1. Присоединенное действие $z\mapsto g^{-1}zg$ сохраняет Ω. Подгруппа H является стационарной подгруппой матрицы z^0, соответствующей паре $x=s^-, y=s^+$, так что Ω есть как раз G/H.

Возьмем в (5.7) в качестве x, y векторы $u=u(\xi)$ и $v=v(\eta)$, см. (5.4), (5.5). Получаем вложение $\Gamma^-\times\Gamma^+\to\Omega$, задаваемое формулой

$$z=z(\xi,\eta)=\frac{v^*u}{[u,v]},\quad u=u(\xi),\ v=v(\eta)$$

(определенное почти всюду: $N(\xi,\eta)\neq 0$). Поэтому ξ,η являются локальными координатами на Ω. Присоединенное действие группы G на Ω сводится к ее действию на ξ и на η.

Касательное пространство к G/H в начальной точке z^0 можно отождествить с пространством $\mathfrak{q}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $S(\mathfrak{q})$ – алгебра многочленов на $\mathfrak{q}$. Группа H действует на $\mathfrak{q}$ и, следовательно, в $S(\mathfrak{q})$.

Теорема 5.1 *Алгебра $S(\mathfrak{q})^H$ многочленов, инвариантных относительно H, порождается двумя многочленами $\langle\xi,\eta\rangle$ и $\langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle$.*

Пусть $\mathbb{D}(G/H)$ обозначает алгебру дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G. Эта алгебра находится во взаимно однозначном соответствии с алгеброй $S(\mathfrak{q})^H$. Образующими в ней являются операторы Δ_2 и Δ_4, соответствующие образующим $\langle\xi,\eta\rangle$ и $\langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle$ в алгебре $S(\mathfrak{q})^H$. Назовем эти операторы операторами Лапласа на G/H. Оператор Δ_2 есть оператор Лапласа–Бельтрами на G/H. Эти операторы являются дифференциальными операторами второго и четвертого порядка соответственно. Явные выражения этих операторов достаточно громоздки. Нам достаточно знать явные выражения лишь для их радиальных частей $\overset{0}{\Delta}_2$ и $\overset{0}{\Delta}_4$, которые получаются следующим образом. Возьмем в $\mathfrak{q}$ картановское подпространство $\mathfrak{a}$, которое состоит из матриц

$$A(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Введем в $\mathfrak{a}^*$ лексикографическое упорядочение по координатам. Пусть $\mathfrak{n}$ обозначает подалгебру в $\mathfrak{g}$, образованную соответствующими положительными корневыми подпространствами. Рассмотрим множество точек z в Ω, которые получаются из z^0 сдвигом сначала на элемент $a = a(t_1, t_2) = \exp A(t_1, t_2)$ и затем на элемент $n \in N = \exp \mathfrak{n}$, т. е. $z = n^{-1}a^{-1}z^0 an$. Эти точки заполняют некоторую окрестность U точки z^0. Параметры t_1, t_2 и параметры из подгруппы N являются координатами в этой окрестности.

Пусть функция f, заданная в U, не зависит от $n \in N$. Тогда она есть функция от t_1, t_2: $f(z) = F(t_1, t_2)$. Пусть D – дифференциальный оператор из $\mathbb{D}(G/H)$. Тогда Df также не зависит от $n \in N$, так что $Df = \overset{0}{D} F$, где $\overset{0}{D}$ есть некоторый дифференциальный оператор от t_1, t_2, он называется радиальной частью оператора D.

Теорема 5.2 *Радиальная часть* $\overset{0}{D}$ *оператора* $D \in \mathbb{D}(G/H)$ *есть дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.*

Введем операторы

$$\begin{aligned} D_1 &= \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + n - 3\right]^2 - (2n-7) \\ D_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2} + 1\right]^2 - (2n-7). \end{aligned}$$

Теорема 5.3 *Имеем*

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Delta}_2 &= \frac{1}{2}\left\{D_1 + D_2 - (n-4)(n-6)\right\}, \\ \overset{0}{\Delta}_4 &= D_1 D_2 + 2(n-4)^3. \end{aligned}$$

4. *Преобразование Березина*

Построение полиномиального квантования (ковариантные символы, контравариантные символы, преобразование Березина) в точности повторяет построения из § 1 и § 3. В качестве переполненной системы мы берем ядро $N(\xi, \eta)^{\sigma, \varepsilon}$ сплетающего оператора $A_{2-n-\sigma,\varepsilon}$. Для σ общего положения пространство $\mathcal{A}_\sigma$ ковариантных символов есть пространство $S(G/H)$ всех многочленов на G/H.

Напишем выражение преобразования Березина $\mathcal{B}$ через операторы Лапласа Δ_2 и Δ_4 на G/H, см. [10]. Обозначим $m = (n-4)/2$.

Теорема 5.4 *Мы имеем:*

$$\mathcal{B} = \frac{\Gamma(\sigma+n-2+k)\Gamma(\sigma+1-k)}{\Gamma(\sigma+n-2)\Gamma(\sigma+1)} \cdot \frac{\Gamma(\sigma+m+2+l)\Gamma(\sigma+m+1-l)}{\Gamma(\sigma+m+2)\Gamma(\sigma+m+1)}. \tag{5.8}$$

Здесь k, l – переменные. Фактически, правая часть (5.8) зависит от λ_2 и λ_4, где $\lambda_2 = 2(a_1 + a_2)$, $\lambda_2 = 16(a_1a_2 - ma_1 + m^2a_2)$ и $a_1 = k(k+n-3)$, $a_2 = l(l+1)$. Теперь вместо λ_2 и λ_4 надо подставить Δ_2 и Δ_4 соответственно.

Доказательство (аналогично доказательству теорем 3.7 и 3.6). Представление группы G сдвигами в пространстве $S(G/H)$ распадается в прямую однократную сумму конечномерных неприводимых представлений $\pi_{a,b}$ со старшими весами (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$, относительно $\mathfrak{a}$. Собственное число оператора $\mathcal{B}$ на неприводимом подпространстве со старшим весом $(k+l, k-l)$ есть

$$b_{k,l} = \frac{(\sigma+n-2)^{[k]}}{\sigma^{(k)}} \cdot \frac{(\sigma+m+2)^{[l]}}{(\sigma+m)^{(l)}}.$$

Отсюда следует формула (5.8). $\square$

Заметим, что на конечномерных подпространствах в $S(G/H)$ преобразование Березина есть дифференциальный оператор.

Пусть $\sigma \to -\infty$. Первые два члена асимптотического разложения преобразования Березина $\mathcal{B}$ таковы:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\sigma}\Delta_2.$$

Отсюда вытекает *принцип соответствия* (в качестве "постоянной Планка" надо взять $h = -1/\sigma$).

Напишем формулы для полного асимптотического разложения преобразования Березина. Во-первых, с помощью формулы (3.32) мы находим:

$$\mathcal{B} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{P_s}{\sigma^{(s)}} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Q_t}{(\sigma+m)^{(t)}},$$

где

$$P_s = \frac{1}{s!}\prod_{j=0}^{s-1}\{a_1 - j(j+n-3)\}, \quad Q_t = \frac{1}{t!}\prod_{j=0}^{t-1}\{a_2 - j(j+1)\}.$$

Во-вторых, здесь надо привести подобные члены. Это можно сделать разными способами. Например, так:

$$\mathcal{B} = \sum \frac{M_{st}}{\sigma^{(s)}(\sigma+m)^{(t)}},$$

где $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geqslant t$,

$$M_{st} = P_sQ_t(1-\delta_{st}) + Q_s \sum_{r=0}^{t} \binom{s-r}{t-r} P_r m^{[t-r]}.$$

– многочлен от Δ_2 и Δ_4 (δ_{st} – символ Кронекера).

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука. 1965.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. 1966.

3. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука. 1965.

4. О. В. Гришина. Конечномерный анализ на комплексном гиперболоиде. Вестник Тамбовского Унив. Серия: Естеств. и техн. науки. 2008. Том 13. Вып. 6. 485–498.

5. В. Ф. Молчанов. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Матем. сб.. 1970. Том 81. № 3. 358–375.

6. В. Ф. Молчанов. Квантование на пара-эрмитовых симметрических пространствах (см. настоящий том).

7. В. Ф. Молчанов, А. А. Артемов, Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления (см. настоящий том).

8. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского Унив. Серия: Естеств. и техн. науки. 1998. Том 3. Вып. 1. 65–78.

9. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. Acta Appl. Math.. 2004. Vol. 81. Nos. 1–3, 215–232.

10. S. V. Tsykina. Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations. Intern. Workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics". Moscow. Aug. 25-30. 2007. Vol. 2. 63–71.

Поступила в редакцию 25 апреля 2009 г.

Keywords: Lie groups and algebras; representations of Lie groups; para-Hermitian symmetric spaces; polynomials; symbol calculi.

Quantization (symbol calculus) in the spirit of Berezin in polynomials on para-Hermitian symmetric spaces is constructed.