ЛИТЕРАТУРА

1. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд. Тбил. гос ун-та, 1975.

2. *Булгаков А.И., Сергеев Б.А.* Осцилляционные свойства решений одной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1984. Т. 20. № 2. С. 207-214.

3. *Мирзов Дж.Д.* О колеблемости решений одной системы дифференциальных уравнений // Матем. заметки, 1979. Т. 23. Вып. 3. С. 401-404.

4. *Евтухов В.М.* Об условиях колеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка // Матем. заметки, 2000. Т. 67. Вып. 2. С. 150-153.

5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №№ 09-01-97503, 11-01-00626, 11-01-00645), Министерства образования и науки РФ (АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы) проект № 2.1.1/9359; ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы госконтракты №№ П688, 14.740.11.0682, 14.740.11.0349; темплан 1.8.11).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Bulgakov A.I., Scherbakova A.V. To the question of fluctuating solutions to a nonlinear system of second order ordinary differential equations. For a nonlinear system of second order ordinary differential inequalities and equations there are formulated theorems on fluctuating solutions.

Key words: nonlinear system of second order ordinary differential equations; well-defined solution; fluctuating solution.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Щербакова Антонина Васильевна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

УДК 517.911, 517.968

ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ К НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ ФУНКЦИЯМ

© **А.А. Григоренко, В.В. Скоморохов**

Ключевые слова: возмущенное включение; оценка решений.

В работе сформулировано утверждение об оценки близости решения возмущенного включения к наперед заданной непрерывной функции. Рассмотрим приложение этого утверждения к дифференциальным включениям.

Пусть X — банахово пространство с нормой $||\cdot||_X$. Обозначим $\text{comp}[X]$ - множество всех непустых компактов пространства X; $\rho_X[\cdot,\cdot]$ — расстояние от точки до множества; $h_X[\cdot,\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу в между множествами. Пусть $\mathbb{R}^n$ — арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, если $A \subset \mathbb{R}^n$, то $||A|| = \sup\{|a| : a \in A\}$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество. $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$||x||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|\, ds;$$

$\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ — множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{C}^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ — многозначные операторы, линейный непрерывный интегральный оператор $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)\,(t) = \int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds, \qquad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Включение (1) назовем *возмущенным включением.*

Под *решением включения* (1) будем понимать элемент $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in \mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ — согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $e \in \mathbf{C}^n[a,b]$ — функция в правой части равенства (3).

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством* **A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma Z(x-y)\|_{\mathbf{L}^1(U)}, \tag{6}$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x), \Psi(y)] \leqslant P\left(Z(x-y)\right); \tag{7}$$

для функции $\nu \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (5), сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu,\ \mathcal{A}^0 \nu = \nu,\ \mathcal{A}^i \nu = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z), \tag{9}$$

а отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}_+{}^1[a,b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|. \tag{10}$$

Пусть $\xi(\nu)$ — сумма ряда (8), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть* $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (3). *Далее, пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* x $(x = v + Vz,\ v \in \Psi(x),\ z \in \Phi(x))$ *включения* (1), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t); \tag{12}$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu)); \tag{13}$$

при почти всех $t \in [a,b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t), \tag{14}$$

где $\nu, \xi(\nu), P, \Gamma, k$ *удовлетворяют соотношениям* (5), (11), (7), (6), (4), *соответственно.*

Замечание 1. Отметим, что теорема 1 дополняет результат работы [2], в которой аналогичные оценки получены в случае выпуклозначности отображения $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$. При этом в [2] доказательство этих оценок основывалось на теореме Майкла, с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле "минимальной" непрерывной ветви $g : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ отображения $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, а также с помощью результата работы [1]. Отметим, что предложенную в работе [2] схему в доказательстве теоремы 1 применить невозможно, поскольку теорема 1 не предполагает, что отображение $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ выпуклозначно.

Замечание 2. Отметим, что теорема 1 не является непосредственным следствием принципа сжимающих отображений, поскольку оператор, порожденный правой частью включения (1), не является замкнутозначным. Это доказывает следующий пример. Пусть отображение $\Phi : \mathbf{C}^1[0,1] \to \Pi[\mathbf{L}^1[0,1]]$ задано равенством

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}^1[0,1] : y(t) \in \{-1, 1\} \text{ при п.в. } t \in [0,1]\},$$

а оператор $V : \mathbf{L}^1[0,1] \to \mathbf{C}^1[0,1]$ имеет вид

$$(Vz)(t) = \int_0^t z(s)\, ds.$$

Определим последовательность измеримых функций $y_m : [0,1] \to \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$ следующим образом:

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{если} \quad t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in [0, 1/4), \\ -1, & \text{если} \quad t \in [1/4, 1/2), \\ 1, & \text{если} \quad t \in [1/2, 3/4), \\ -1, & \text{если} \quad t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

и так далее. Из определения последовательности $y_m : [0,1] \to R$, $m = 1, 2, \ldots$ следует, что $Vy_m \to 0$ в пространстве $\mathbf{C}^1[0,1]$ при $m \to \infty$. В то же время $0 \notin V\Phi(x)$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что теорема 1 дает несколько больше, чем просто условия существования решения включения (1). Она дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\nu)$, зависящая от функций $q_0, r_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного решения (функции q_0) включения (1).

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что, если непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенный равенством (9), для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{A}(z_1 + z_2) = \mathcal{A}(z_1) + \mathcal{A}(z_2),$$

то сумма ряда (8) является решением уравнения

$$\xi(\nu) = \mathcal{A}(\xi(\nu)) + \nu. \tag{15}$$

Действительно, так как

$$\xi(\nu) = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=0}^{j} \mathcal{A}^i \nu,$$

то

$$\mathcal{A}(\xi(\nu)) = \mathcal{A} \lim_{j \to \infty} \sum_{i=0}^{j} \mathcal{A}^i \nu = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=0}^{j} \mathcal{A}\mathcal{A}^i \nu = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=0}^{j+1} \mathcal{A}^i \nu - \nu = \xi(\nu) - \nu.$$

И, следовательно, $\xi(\nu)$ удовлетворяет уравнению (15).

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ t \in [a,b], \quad x(a) = x_0, \tag{16}$$

где отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующими свойствами: для всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо [4]; существует такая функция $\beta \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbb{R}^n}[F(t,x), F(t,y)] \leqslant \beta(t)|x - y|; \tag{17}$$

существует такая функция $\gamma \in L^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ имеет место оценка

$$||F(t,0)|| \leqslant \gamma(t).$$

Под *решением задачи* (16) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющую включению (16) и равенству $x(a) = x_0$.

Напомним, что *многозначный оператор Немыцкого* $N : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, порожденный отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяется равенством

$$N(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in F(t, x(t)) \text{ при п. в. } t \in [a,b]\}.$$

Очевидно, что задача (16) эквивалентна интегральному включению

$$x \in x_0 + \Lambda N(x), \tag{18}$$

где оператор $\Lambda : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ — оператор интегрирования, определенный равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds,$$

которое является частным случаем (1). При этом отображение $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ в данном случае определяется равенством

$$\widetilde{\Psi}(x) = x_0.$$

Пусть функция $q_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна. В этом случае равенство (3) принимает вид

$$q_0 = x_0 + \Lambda\dot{q}_0 + e,$$

где $e = q_0(a) - x_0$, $\dot{q}_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ — производная функции q_0. Далее, пусть функция $\widetilde{k} \in L^1_+[a,b]$ при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbb{R}^n}[\dot{q}_0(t), F(t, q_0(t))] \leqslant \widetilde{k}(t).$$

Отметим, что функция $\widetilde{k}$ удовлетворяет неравенству (4), в котором Φ — оператор Немыцкого $N : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, порожденный отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Для рассматриваемого случая непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ имеет вид

$$\nu(t) = \int\limits_a^t \widetilde{k}(s)\,ds + |q_0(a) - x_0|. \tag{19}$$

Покажем, что отображения $\Lambda : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $N : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A*. Действительно, для этих отображений непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$ определяются равенствами

$$(\Gamma z)(t) = \beta(t)z(t), \quad Pz = 0,$$

где функция $\beta \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (17). Кроме того, для функции ν, определенной равенством (19), сходится ряд (8), в котором оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ задан соотношением

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int\limits_a^t \beta(s)z(s)\,ds. \tag{20}$$

Отметим, что в силу замечания 4 сумма ряда (8) в данном случае представляет собой решение уравнения

$$\xi(\nu)(t) = \int\limits_a^t \beta(s)\xi(\nu)(s)\,ds + \nu(t), \tag{21}$$

где функция $\nu \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ удовлетворяет равенству (19). Решение уравнения (21) имеет вид

$$\xi(\nu)(t) = |x_0 - q_0(a)|e^{\varphi(t)} + \int\limits_a^t e^{\varphi(t)-\varphi(s)}\widetilde{k}(s)\,ds,$$

где непрерывная функция $\varphi \in \mathbf{C}^1[a,b]$ задается равенством

$$\varphi(t) = \int\limits_a^t \beta(s)\,ds.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает оценка А.Ф. Филиппова [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I, II, III //Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28, N 3. С.371-379; Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28, N 4. С.566-571; Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28, N 5. С.739-746.

2. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.*Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189. N6. С.3-32.

3.*Григоренко А.А., Панасенко Е.А.* Некоторые вопросы теории возмущенных включений и их приложения // Тамбов: Издатель-ский дом ТГУ имени Г.Р.Державина, 2010.

4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.*Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480с.

5. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1967. N3. С.16-26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №№ 09-01-97503, 11-01-00626, 11-01-00645), Министерства образования и науки РФ (АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы) проект № 2.1.1/9359; ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы госконтракты №№ П688, 14.740.11.0682, 14.740.11.0349; темплан 1.8.11).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Grigorenko A.A., Skomorokhov V.V. Estimation of closeness of solutions for a perturbed inclusion to given functions. At the article we formulated the statement about the estimation of closeness of solutions for a perturbed inclusion to given continuous function. There is considered an application of this statement to differential inclusions.

Keywords: perturbed inclusions; estimation of solutions.

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: g.anya@mail.ru

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru