УДК 517.917

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© В.И. Фомин

Fomin V.I. On a solution of the Cauchy problem for the linear differential equation of n-order with the constant bounded operator coefficients in the Banach space. The Cauchy problem for the linear differential equation of n-order with the bounded operator coefficients in the Banach space is analysed.

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$u^{(n)} + A_1u^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}u' + A_n u = f(t),\ 0 \le t < \infty, \quad (1)$$
$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0',\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \le i \le n$; $f(t) \in C([0,\infty); E)$.

О п р е д е л е н и е. Общим решением уравнения (1) называется n-параметрическое семейство функций $u = \varphi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $C^n([0,\infty); E)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – параметры; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) любая функция из этого семейства является решением уравнения (1);

2) при любом фиксированном наборе начальных значений $u_0, u_0', \ldots, u_0^{(n-1)} \in E$ решение задачи Коши (1), (2) принадлежит этому семейству.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$u^{(n)} + A_1u^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}u' + A_n u = 0,\ 0 \le t < \infty. \quad (3)$$

Пусть характеристическое операторное уравнение

$$\Lambda^n + A_1\Lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Lambda + A_n = 0$$

имеет n различных корней $\Lambda_i \in L(E)$, $1 \le i \le n$, удовлетворяющих следующим условиям

$$\Lambda_i\Lambda_j = \Lambda_j\Lambda_i,\ \ \forall\ 1 \le i, j \le n; \quad (4)$$
$$\exists\ (\Lambda_i - \Lambda_j)^{-1} \in L(E),\ \ \forall\ 1 \le j < i \le n. \quad (5)$$

Т е о р е м а 1. При выполнении условий (4), (5) общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u_{\text{о.о.}} = \sum_{k=1}^{n} e^{\Lambda_k t} x_k\,, \quad (6)$$

где x_k $(1 \le k \le n)$ – произвольные элементы из E.

Т е о р е м а 2. При выполнении условий (4), (5) общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u = u_{\text{о.о.}} + u_{\text{ч.н.}}\,, \quad (7)$$

где $u_{\text{о.о.}}$ задается формулой (6),

$$u_{\text{ч.н.}} = \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{n+k} \prod_{1 \le j < k} (\Lambda_k - \Lambda_j)^{-1} \prod_{k < i \le n} (\Lambda_i - \Lambda_k)^{-1} \int_0^t e^{\Lambda_k(t-\tau)} f(\tau)d\tau] -$$

частное решение уравнения (1).

Введем в целях краткости записи следующее обозначение:

$$B_k = (-1)^{n+k} \prod_{1 \le j < k} (\Lambda_k - \Lambda_j)^{-1} \prod_{k < i \le n} (\Lambda_i - \Lambda_k)^{-1};$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия (4), (5) и $f(t) \in C^{n-2}([0,\infty); E)$.

Тогда задача (1), (2) имеет решение вида

$$u = \sum_{k=1}^{n} e^{\Lambda_k t} x_k + \sum_{k=1}^{n} [B_k \int_0^t e^{\Lambda_k(t-\tau)} f(\tau)d\tau], \quad (8)$$

где

$$x_k = \Delta^{-1}\Delta_k(b);\ \ k = 1, 2, \ldots, n, \quad (9)$$

Δ – операторный определитель, $\Delta_k(b)$ – операторно-векторные определители системы уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = u_0 & (10) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Lambda_k^s x_k = u_0^{(s)} - \sum_{k=1}^{n} [B_k \sum_{p=0}^{s-1} \Lambda_k^{s-1-p} f^{(p)}(0)];\ \ s = 1, 2, \ldots, n-1, & (11) \end{cases}$$

то есть,

$$\Delta_k(b) = \sum_{m=1}^{n} A_{mk} b_m\,, \quad (12)$$

где $A_{mk} = (-1)^{m+k}M_{mk}$, M_{mk} – операторный определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из Δ вычеркиванием его m-ой строки и k-го столбца; $b=(b_m)_{m=1}^{n}$ – вектор-столбец правых частей уравнений системы (10), (11).

Замечание 1. ([1]).

$$\Delta = \prod_{1\le j<i\le n} (\Lambda_i - \Lambda_j)\,,\ \Delta^{-1} = \prod_{1\le j<i\le n} (\Lambda_i - \Lambda_j)^{-1}.$$

Замечание 2. При доказательстве теорем 1–3 используется операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве ([2]).

Замечание 3. Теорема 2 анонсирована в [3], [4].

Рассмотрим, например, задачу (1), (2) при $n = 2$:

$$\begin{cases} u'' + A_1u' + A_2u = f(t)\,,\ \ 0\le t<\infty\,, & (13)\\ u(0)=u_0\,,\, u'(0)=u'_0\,, & (14)\end{cases}$$

где $A_1, A_2 \in L(E)$; $f(t) \in C([0,\infty); E)$.

Пусть операторный дискриминант $D = A_1^2 - 4A_2$ уравнения (13) удовлетворяет следующему условию: $D = F^2$, где $F \in GL(E) = \{Q \in L(E) \mid \exists\, Q^{-1} \in L(E)\}$, и $A_1F = FA_1$. Тогда характеристическое операторное уравнение $\Lambda^2 + A_1\Lambda + A_2 = 0$ имеет два различных корня $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(-A_1 - F)$, $\Lambda_2 = \frac{1}{2}(-A_1 + F)$, при этом $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$ и $\Lambda_2 - \Lambda_1 = F \in GL(E)$, то есть выполняются условия (4), (5). Следовательно, в силу (7) общее решение уравнения (13) имеет вид

$$u = e^{\Lambda_1 t}x_1 + e^{\Lambda_2 t}x_2 + F^{-1}\int_0^t [e^{\Lambda_2(t-\tau)} - e^{\Lambda_1(t-\tau)}]f(\tau)d\tau\,, \qquad (15)$$

где x_1, x_2 – произвольные элементы из E.

Известная формула ([5] – [7]) для решения задачи (13), (14) получается из (15) при $x_1 = F^{-1}(\Lambda_2u_0 - u_0')$, $x_2 = F^{-1}(u_0' - \Lambda_1u_0)$, найденных по формуле (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* Об операторном определителе Вандермонда // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2002. Т. 7. Вып. 2. С. 235-236.
2. *Фомин В.И.* Операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2002. Т. 7. Вып. 2. С. 237-238.
3. *Фомин В.И.* Об общем решении линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка в банаховом пространстве // Тез. докл. VII науч. конф. ТГТУ. Тамбов: ТГТУ, 2002. С. 173-174.
4. *Фомин В.И.* Об общем решении линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка в банаховом пространстве // Сб. материалов шк. «Понтрягинские чтения – XIII». Воронеж: ВГУ, 2002. С. 154-155.
5. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Тез. докл. шк. «Понтрягинские чтения – XI». Воронеж: ВГУ, 2000. С. 145.
6. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве (на англ. яз.) // Вестн. ТГТУ. 2000. Т. 6. №4. С. 643-646.
7. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения . 2002. Т. 38. № 8. С. 1140-1141.

Поступила в редакцию 18 декабря 2002 г.