

УДК 517.98

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

© А.А. Артемов

Ключевые слова: однополостный гиперболоид; преобразование Пуассона; гипергеометрическая функция; оператор Лапласа–Бельтрами.

Для произвольной функции на границе однополостного гиперболоида в $\mathbb{R}^n$ дается асимптотическое разложение ее преобразования Пуассона на бесконечности.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Преобразование Пуассона $P_{\sigma, \varepsilon}$ сопоставляет бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(s)$ на границе S (сфера) однополостного гиперболоида $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^n$ функцию $(P_{\sigma, \varepsilon}\varphi)(s)$ из $C^\infty(\mathcal{X})$. Важным является вопрос о поведении функции $(P_{\sigma, \varepsilon}\varphi)(s)$ при стремлении x к S . Для K -финитных функций φ (т. е. для функций φ с конечным рядом Фурье) ответ дается сходящимися рядами. Более трудным является случай произвольной φ (не обязательно K -финитной). Здесь мы можем предъявить лишь асимптотическое разложение.

В первом параграфе мы приводим некоторый материал (мы опираемся на [1]) о гармоническом анализе на однополостном гиперболоиде, в частности о преобразовании Пуассона, и даем формулу разложения для K -финитной функции.

Второй параграф является основным, мы рассматриваем произвольные функции φ (не обязательно K -финитные) и доказываем теорему об асимптотическом разложении на границе для таких функций.

§ 1. Преобразование Пуассона для однополостного гиперболоида

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Мы рассматриваем группу $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$, это связная компонента единицы группы линейных преобразований g пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих форму $[x, y]$. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, в соответствии с этим мы будем записывать вектор в виде строки.

Пусть S – сечение конуса $[x, x] = 0$ плоскостью $x_1 = 1$. Оно состоит из точек $s = (1, s_2, \dots, s_n)$, $s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$, так что S есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть Δ_S – оператор Лапласа–Бельтрами на S и ds – евклидова мера на S . Мера всей сферы S есть Ω_{n-1} , где

$$\Omega_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}.$$

Представление T_σ , $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G действует на $\mathcal{D}(S)$:

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right)(sg)_1^\sigma.$$

Оператор A_σ на $\mathcal{D}(S)$, определенный формулой

$$(A_\sigma\varphi)(s) = \int_S (-[s, t])^{2-n-\sigma} \varphi(t) dt,$$

сплетает представления T_σ и $T_{2-n-\sigma}$. Он мероморфно зависит от σ с (простыми) полюсами в точках $\sigma \in (2-n)/2 + \mathbb{N}$.

Пусть K – подгруппа в G , сохраняющая координату x_1 . Эта подгруппа есть максимальная компактная подгруппа группы G , она изоморфна $SO(n-1)$. Ограничение представления T_σ на K есть представление ρ подгруппы K вращениями в $\mathcal{D}(S)$. Оно разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l , действующих в пространствах H_l , $l \in \mathbb{N}$. Пространство H_l состоит из ограничений на S однородных гармонических многочленов от $x_2, \dots, x_n$ степени l . Оно является собственным пространством для оператора Лапласа–Бельтрами Δ_S и оператора A_σ с собственными значениями соответственно

$$\mu_l = l(3-n-l), \quad (1.1)$$

$$a(\sigma, l) = (-1)^l 2^{-\sigma} \pi^{(n-2)/2} \frac{\Gamma(-\sigma - (n-2)/2) \Gamma(3-n-\sigma)}{\Gamma(3-n-\sigma-l) \Gamma(-\sigma+l)}. \quad (1.2)$$

Для проекций φ_l функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ на H_l (компонент Фурье) справедлива оценка

$$|\varphi_l(s)|^2 \leq \frac{\dim H_l}{\Omega_{n-1}} \cdot \|\varphi\|^2. \quad (1.3)$$

Представление T_σ неприводимо для всех σ , кроме $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2-n-\mathbb{N}$. Если T_σ неприводимо, то T_σ эквивалентно $T_{2-n-\sigma}$ (с помощью A_σ или его вычета). Представление T_σ и оператор A_σ могут быть продолжены на $\mathcal{D}'(S)$.

Однополостный гиперболоид $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^n$ задается уравнением $[x, x] = 1$. Группа G действует на $\mathcal{X}$ транзитивно. Стационарная подгруппа H точки $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$ изоморфна $SO_0(1, n-2)$. Введем полярные координаты (t, s) на $\mathcal{X}$, где $t \in \mathbb{R}$, $s = (1, s_2, \dots, s_n) \in S$, а именно:

$$x = (\text{sh}t, \text{ch}t \cdot s_2, \dots, \text{ch}t \cdot s_n).$$

В полярных координатах t, s оператор Лапласа–Бельтрами $\Delta_{\mathcal{X}}$ дается формулой

$$\Delta_{\mathcal{X}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (n-2)\text{th}t \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{ch}^2 t} \Delta_S.$$

Пространство инвариантных относительно H элементов в представлении T_σ имеет размерность 2. Для σ общего положения базис в этом пространстве состоит из двух обобщенных функций ($\varepsilon = 0, 1$):

$$\theta_{\sigma, \varepsilon} = [x^0, s]^{\sigma, \varepsilon} = s_n^{\sigma, \varepsilon}.$$

Оператор A_σ переводит $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ в $\theta_{2-n-\sigma, \varepsilon}$ с множителем:

$$A_\sigma \theta_{\sigma, \varepsilon} = j(\sigma, \varepsilon) \theta_{2-n-\sigma, \varepsilon},$$

где

$$\begin{aligned} j(\sigma, \varepsilon) &= 2^{-\sigma} \pi^{(n-4)/2} \Gamma(\sigma+1) \Gamma(-\sigma - (n-2)/2) \times \\ &\times [(-1)^\varepsilon \sin(\sigma + n/2) \pi - \sin(n/2) \pi]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функция $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ порождает преобразование Пуассона $P_{\sigma, \varepsilon}$, действующее из $\mathcal{D}(S)$ в $C^\infty(\mathcal{X})$:

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x) = \int_S [x, s]^{\sigma, \varepsilon} \varphi(s) ds.$$

Преобразование Пуассона мероморфно зависит от σ . С оператором A_σ преобразование $P_{\sigma, \varepsilon}$ взаимодействует так:

$$P_{\sigma, \varepsilon} A_\sigma = j(\sigma, \varepsilon) P_{2-n-\sigma, \varepsilon}.$$

Для функции $\varphi \in H_l$ ее преобразование Пуассона распадается в произведение функции φ на функцию, зависящую только от t :

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x) = R_{\sigma, \varepsilon, l}(t) \varphi(s), \quad (1.5)$$

где $x \in \mathcal{X}$ имеет полярные координаты $t, s, t \in \mathbb{R}, s \in S$. Радиальная часть $R_{\sigma, \varepsilon, l}(t)$ имеет четность $\varepsilon + l$.

Функции u из образа преобразования Пуассона $P_{\sigma, \varepsilon}$ имеют четность ε и удовлетворяют уравнению Пуассона

$$\Delta_{\mathcal{X}} u = \sigma(\sigma + n - 2) \cdot u.$$

Разделяя переменные в уравнении Пуассона с помощью (1.5), мы получим для радиальной части уравнение, сводящееся к гипергеометрическому. Запишем радиальную часть с помощью гипергеометрических функций Гаусса $F(a, b; c; z)$, см. [2], гл. 2, от переменной

$$b = (\text{cht})^{-2}.$$

В силу условия четности достаточно это сделать для $t > 0$. Для $\sigma \notin (2-n)/2 + \mathbb{Z}$ мы имеем

$$\begin{aligned} R_{\sigma, \varepsilon, l}(t) &= b^{-\sigma/2} (-1)^\varepsilon a(2-n-\sigma, l) F_{2-n-\sigma, l}(b) + \\ &+ b^{(\sigma+n-2)/2} (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) F_{\sigma, \varepsilon}(b), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$F_{\sigma, l}(b) = F\left(\frac{\sigma + n - 2 + l}{2}, \frac{\sigma + 1 - l}{2}; \sigma + \frac{n}{2}; b\right), \quad (1.7)$$

$a(\sigma, l)$ и $j(\sigma)$ – множители (1.2) и (1.4). Коэффициенты $g_k(\sigma, l)$ гипергеометрического ряда $F_{\sigma, l}(b)$ оказываются многочленами от $\mu_l = l(3-n-l)$ (см. (1.1)):

$$g_k(\sigma, l) = \left\{ 2^{2k} k! (\sigma + n/2)^{[k]} \right\}^{-1} \prod_{m=0}^{k-1} [\mu_l + (\sigma + n - 2 + 2m)(\sigma + 1 + 2m)],$$

где мы использовали обозначение $t^{[k]} = t(t+1) \dots (t+k-1)$.

Введем следующие операторы $C_{\sigma, k}$ и $W_{\sigma, k}$ на $\mathcal{D}(S)$. На подпространствах H_l они являются умножениями на числа $a(2-n-\sigma, l) \cdot g_k(2-n-\sigma, l)$ и $g_k(\sigma, l)$ соответственно. Операторы $C_{\sigma, k}$ и $W_{\sigma, k}$ определены и непрерывны на всем пространстве $\mathcal{D}(S)$. Операторы $W_{\sigma, k}$ – многочлены от оператора Лапласа–Бельтрами Δ_S .

Т е о р е м а 1.1. Пусть $\sigma \notin (2-n)/2 + \mathbb{Z}$. Для K -финитной функции φ из $\mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуассона $(P_{\sigma,\varepsilon} \varphi)(x)$ в области $x_1 > 0$ имеет место следующее разложение по степеням b :

$$\begin{aligned} (P_{\sigma,\varepsilon} \varphi)(x) &= b^{-\sigma/2} (-1)^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma,k} \varphi)(s) \cdot b^k + \\ &+ b^{(\sigma+n-2)/2} (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} (W_{\sigma,k} \varphi)(s) \cdot b^k, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где x имеет полярные координаты (t, s) , $t > 0$.

§ 2. Асимптотика преобразования Пуассона для произвольной функции φ

Пусть φ – произвольная функция из $\mathcal{D}(S)$ (не обязательно K -финитная). Тогда равенство (1.8) является асимптотическим разложением. Сформулируем точные утверждения.

Разложим функцию $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ в сумму ее проекций

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l, \quad \varphi_l \in H_l,$$

и запишем $P_{\sigma,\varepsilon} \varphi$ для $t > 0$ в виде

$$(P_{\sigma,\varepsilon} \varphi)(x) = (-1)^\varepsilon b^{-\sigma/2} (P_{\sigma,\varepsilon}^+ \varphi)(x) + (-1)^\varepsilon b^{(\sigma+n-2)/2} (P_{\sigma,\varepsilon}^- \varphi)(x),$$

где

$$\begin{aligned} (P_{\sigma,\varepsilon}^+ \varphi)(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} a(2-n-\sigma, l) F_{2-n-\sigma, l}(b) \varphi_l(s), \\ (P_{\sigma,\varepsilon}^- \varphi)(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} F_{\sigma, l}(b) \varphi_l(s). \end{aligned}$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть σ – общего положения: $\sigma \notin n/2 + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуассона $(P_{\sigma,\varepsilon} \varphi)(x)$ имеет следующее асимптотическое разложение при $t \rightarrow +\infty$ по степеням $b = (\text{cht})^{-2}$:

$$\begin{aligned} (P_{\sigma,\varepsilon} \varphi)(x) &\sim b^{-\sigma/2} (-1)^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma,k} \varphi)(s) \cdot b^k + \\ &+ b^{(\sigma+n-2)/2} (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} (W_{\sigma,k} \varphi)(s) \cdot b^k, \end{aligned}$$

где x имеет полярные координаты (t, s) , $t > 0$. Асимптотическое разложение понимается как асимптотические разложения двух функций:

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^+ \varphi)(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} (C_{\sigma,k} \varphi)(s) b^k, \quad (2.1)$$

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^- \varphi)(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} (W_{\sigma,k} \varphi)(s) b^k, \quad (2.2)$$

а именно, для всякого $N \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| (P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(x) - \sum_{k=0}^N (C_{\sigma, k} \varphi)(s) b^k \right| \leq C \cdot b^{N+1},$$

$$\left| (P_{\sigma, \varepsilon}^- \varphi)(x) - \sum_{k=0}^N (W_{\sigma, k} \varphi)(s) b^k \right| \leq C \cdot b^{N+1},$$

для всех $s \in S$ и всех $t \geq t_0$, где $t_0 > 0$ – некоторое число.

Доказательство этой теоремы опирается на ряд лемм (леммы 2.2 – 2.7).

Обозначим

$$Y(\sigma, l; b) = a(2 - n - \sigma, l) F_{2-n-\sigma, l}(b),$$

где a и F даются формулами (1.2), (1.7).

Нам будет нужно выражение присутствующей здесь гипергеометрической функции от $b = (\text{cht})^{-2}$ в виде гипергеометрической функции от $(1 - T)/2$, где $T = \text{tht}$, при $t > 0$. Для этого мы используем квадратичное преобразование [2] 2.1(27); мы имеем

$$F\left(\frac{-\sigma + l}{2}, \frac{3 - n - \sigma - l}{2}; \frac{4 - n}{2} - \sigma; b\right) =$$

$$= F\left(-\sigma + l, 3 - n - \sigma - l; \frac{4 - n}{2} - \sigma; \frac{1 - T}{2}\right).$$

Обозначим

$$X(\sigma, l; T) = a(2 - n - \sigma, l) \cdot F\left(-\sigma + l, 3 - n - \sigma - l; \frac{4 - n}{2} - \sigma; \frac{1 - T}{2}\right). \quad (2.3)$$

Тогда для $t > 0$ (т. е. для $T > 0$) мы имеем

$$Y(\sigma, l; b) = X(\sigma, l; T), \quad b = 1 - T^2,$$

Л е м м а 2.2. *Функции Y и X выражаются через $R_{\sigma, \varepsilon, l}$ следующим образом:*

$$Y(\sigma, l; b) = X(\sigma, l; T) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(-1)^\varepsilon + \frac{\sin(n/2)\pi}{\sin(\sigma + n/2)\pi} \right] b^{\sigma/2} R_{\sigma, \varepsilon, l}(t). \quad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим равенство (1.6) на $(-1)^\varepsilon \sin(\sigma + n/2)\pi + \sin(n/2)\pi$ и просуммируем по $\varepsilon = 0, 1$. Тогда слагаемые с $F_{\sigma, l}(b)$ исчезнут. После умножения на $b^{\sigma/2}$ мы получим (2.4). $\square$

Л е м м а 2.3. *Для функции Y справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$Y(\sigma, l; b) = Y(\sigma, l - 2; b) + \frac{2l + n - 5}{\sigma + 1} Y(\sigma + 1, l - 1; b). \quad (2.5)$$

Точно такое же соотношение справедливо для X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $X_k(\sigma, l)$ коэффициенты функции $X(\sigma, l; T)$ в разложении по $(1 - T)/2$. Мы имеем:

$$X_k(\sigma, l) = 2^{\sigma+n-2} \pi^{(n-2)/2} \frac{\Gamma(-\sigma + l + k) \Gamma(\sigma - k + (n - 2)/2)}{\Gamma(-\sigma) \Gamma(\sigma + n - 2 + l - k)}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что для этих коэффициентов справедливо соотношение, указанное в лемме. $\square$

Л е м м а 2.4. При $\operatorname{Re} \sigma > -1$ справедлива оценка

$$|b^{\sigma/2} R_{\sigma,\varepsilon,l}(t)| \leq C$$

для всех $l \in \mathbb{N}$ и всех $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим разложение (1.5) к зональной сферической функции (многочлену Гегенбауэра):

$$\psi_l(s) = C_l^{(n-3)/2}(s_n) / C_l^{(n-3)/2}(1),$$

и возьмем $x = (\operatorname{sh} t, 0, \dots, 0, \operatorname{ch} t)$ – с полярными координатами t и $s^0 = (1, 0, \dots, 0, 1)$. Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} R_{\sigma,\varepsilon,l}(t) &= (P_{\sigma,\varepsilon} \psi_l)(\operatorname{sh} t, 0, \dots, 0, \operatorname{ch} t) = \\ &= \int_S (-\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \cdot s_n)^{\sigma,\varepsilon} \psi_l(s) ds. \end{aligned}$$

Обозначим $\rho = \operatorname{Re} \sigma$. Поскольку $|\psi_l| \leq 1$, мы получаем (напомним, что $n \geq 4$):

$$\begin{aligned} |b^{\sigma/2} R_{\sigma,\varepsilon,l}(t)| &\leq \int_S |-T + s_n|^\rho ds \\ &= \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 |-T + u|^\rho (1-u^2)^{(n-4)/2} du \\ &\leq \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 |-T + u|^\rho du \\ &\leq \Omega_{n-2} \frac{1}{\rho+1} \max\{2, 2^{\rho+1}\}. \quad \square \end{aligned}$$

Л е м м а 2.5. Для всякого $\sigma \notin n/2 + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$, существуют постоянные C и K (зависящие только от σ) такие, что

$$|Y(\sigma, l; b)| = |X(\sigma, l; T)| \leq C \cdot (l+1)^K \quad (2.6)$$

для всех $l \in \mathbb{N}$ и $t > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сейчас удобнее использовать $X(\sigma, l; T)$. Для $\operatorname{Re} \sigma > -1$ оценка (2.6) с $K = 0$ сразу следует из лемм 2.2 и 2.4.

Пусть $-2 < \operatorname{Re} \sigma \leq -1$. Применим к $X(\sigma, l; T)$ последовательно несколько раз рекуррентное соотношение (2.5), пока мы не дойдем до $X(\sigma, 0; T)$ или $X(\sigma, 1; T)$ в зависимости от того, четно или нечетно l :

$$X(\sigma, l; T) = X(\sigma, d; T) + \frac{1}{\sigma+1} \sum (2l - 4k + n - 5) X(\sigma+1, l-2k-1; T), \quad (2.7)$$

где $d = 0$ или $d = 1$ соответственно для четного или нечетного l , суммирование идет по $k = 0, 1, \dots, k \leq (l-2)/2$. К функциям $X(\sigma+1, \dots)$ мы имеем право применить доказанную оценку (2.6), тогда (предполагая $\sigma \neq -1$) мы с помощью (2.7) получаем:

$$|X(\sigma, l; T)| \leq |X(\sigma, d; T)| + Cl^2. \quad (2.8)$$

Каждая из двух ($d = 0, 1$) функций $X(\sigma, d; T)$ ограничена для $T \in [0, 1]$, поскольку для таких T аргумент $(1-T)/2$ гипергеометрической функции пробегает отрезок $[0, 1/2]$. Поэтому из (2.8) мы получаем оценку

$$|X(\sigma, l; T)| \leq C_1 + Cl^2$$

и отсюда оценку (2.6) с $K = 2$:

$$|X(\sigma, l; T)| \leq C(l+1)^2, \quad -2 < \operatorname{Re} \sigma \leq -1, \quad \sigma \neq -1.$$

Аналогично мы поступаем с полосой $-3 < \operatorname{Re} \sigma \leq -2$ с исключенной точкой $\sigma = -2$: опять мы пишем (2.7) и используем для $X(\sigma + 1, \dots)$ уже доказанную оценку (2.6), в итоге получаем неравенство

$$|X(\sigma, l; T)| \leq |X(\sigma, d; T)| + Cl^4$$

и затем (2.6) с $K = 4$, и т. д. □

Л е м м а 2.6. Пусть $\sigma \notin (n/2) + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют постоянные C и K , зависящие только от σ , такие, что

$$\left| \left(\frac{d}{db} \right)^k Y(\sigma, l; b) \right| \leq C \cdot (l+1)^K, \quad (2.9)$$

для всех $l \in \mathbb{N}$ и $t \geq t_0$, где $t_0 > 0$ – некоторое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем аналогичное утверждение для $X(\sigma, l; T)$, а именно, при условиях леммы для всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют постоянные C и K , зависящие только от σ , такие, что

$$\left| \left(\frac{d}{dT} \right)^k X(\sigma, l; T) \right| \leq C \cdot (l+1)^K, \quad (2.10)$$

для всех $l \in \mathbb{N}$ и $T \in [0, 1]$.

В самом деле, в силу [2] 2.1(7) мы из (2.3) получаем

$$\left(\frac{d}{dT} \right)^k X(\sigma, l; T) = \sigma^{(k)} X(\sigma - k, l; T).$$

Теперь (2.10) следует из леммы 5.8.

Так как $b = 1 - T^2$, то производные по b и по T связаны некоторым соотношением, см. [3] 0.433(1). Поэтому

$$\left(\frac{d}{db} \right)^k Y(\sigma, l; b) = \left(-\frac{1}{2} \right)^k \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} T^{-k-j} \left(\frac{d}{dT} \right)^{k-j} X(\sigma, l; T), \quad (2.11)$$

где

$$c_{kj} = (-1)^j \frac{(k-1+j)!}{2^j j! (k-1-j)!}.$$

Возьмем некоторое число $t_0 > 0$. Обозначим $T_0 = \sqrt{1-t_0}$. Тогда $T_0 > 0$. Неравенство (2.9) для $t \geq t_0$ получается с помощью соотношения (2.11) и неравенства (2.10), взятого для $t \geq t_0$, т. е. для $T \in [T_0, 1]$. □

Л е м м а 2.7. Оба ряда

$$(P_{\sigma}^{+} \varphi)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} Y(\sigma, l; b) \varphi_l(s), \quad (2.12)$$

$$(P_{\sigma}^{-} \varphi)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} F_{\sigma, l}(b) \varphi_l(s) \quad (2.13)$$

и все их производные по b равномерно сходятся при $t \geq t_0 > 0$. Следовательно, их можно почленно дифференцировать по b и переходить к пределу при $b \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала формулу (2.12). Из леммы 2.6 и оценки (1.3) для φ_l следует, что ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} C (l+1)^{K-h} \quad (2.14)$$

с некоторыми C, K и произвольным $h \in \mathbb{N}$ является мажорантой для k раз продифференцированного по b ряда (2.12) на отрезке $[0, b_0]$, $b_0 = (\text{cht}_0)^{-2}$. Возьмем $h > K + 1$, тогда эта мажоранта сходится.

Теперь рассмотрим формулу (2.13). Ее можно переписать так:

$$(P_{\sigma}^{-} \varphi)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a(\sigma, l)} Y(2-n-\sigma, l; b) \varphi_l.$$

Коэффициент $a(\sigma, l)^{-1}$ ведет себя при $l \rightarrow \infty$ как $\text{const} \cdot l^{2-n-2\sigma}$, поэтому мажорантой для k раз продифференцированного по b ряда (2.13) на $[0, b_0]$ будет ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} C (l+1)^{K-h+2-n-2\rho},$$

где $\rho = \text{Re } \sigma$, с некоторыми C, K и произвольным $h \in \mathbb{N}$. Возьмем $h > K + 3 - n - 2\rho$, тогда эта мажоранта сходится. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.1. Докажем (2.1). Из леммы 2.7 следует, что многочлен Тейлора

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{db} \right)^k (P_{\sigma}^{+} \varphi)(x) \cdot b^k \quad (2.15)$$

функции $(P_{\sigma}^{+} \varphi)(x)$ по степеням b получается суммированием по l многочленов Тейлора функций $P_{\sigma}^{+} \varphi_l(x)$. Но последние многочлены — это частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma, k} \varphi_l)(s) b^k$. Таким образом, многочлен Тейлора (2.15) равен

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N (C_{\sigma, k} \varphi_l)(s) b^k.$$

Здесь суммирование по l можно переставить с суммированием по k (конечным) и внести под знак оператора $C_{\sigma, k}$ — в силу непрерывности последнего. Мы получаем, что многочлен Тейлора (2.15) равен

$$\sum_{k=0}^N (C_{\sigma, k} \varphi)(s) \cdot b^k.$$

Это частичная сумма ряда из (2.1). По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа разность между функцией $(P_{\sigma}^{+}\varphi)(x)$ и ее многочленом Тейлора есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N+1)!} \left(\frac{d}{db} \right)^{N+1} (P_{\sigma}^{+}\varphi)(x) \Big|_{b=c} b^{N+1} \\ &= \frac{1}{(N+1)!} \left(\frac{d}{db} \right)^{N+1} \sum_{l=0}^{\infty} Y(\sigma, l; b) \varphi_l(s) \Big|_{b=c} b^{N+1} \\ &= \frac{1}{(N+1)!} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{d}{db} \right)^{N+1} Y(\sigma, l; b) \Big|_{b=c} \varphi_l(s) \right\} b^{N+1}, \end{aligned}$$

где $0 < c < b$, и мы использовали лемму 2.7. Члены ряда, стоящего в фигурных скобках, уже в сущности были оценены в лемме 2.6. Мажорантой для этого ряда для $t \geq t_0$, $s \in S$ служит ряд (2.14) с $K = N+1$, сходящийся при $h > K+1$. Следовательно, упоминавшаяся разность по абсолютной величине не превосходит $C \cdot b^{N+1}$ для всех $t \geq t_0$, $s \in S$, что и доказывает (2.1).

Формула (2.2) доказывается аналогично. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артемов А.А.* Преобразование Пуассона для однополостного гиперboloида // Матем. сб., 2004. Т. 195. № 5. С. 33–58.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00325); АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (проект № 1.1.2/1474); ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (государственный контракт № 14.740.11.0349); темплана 1.5.07.

Поступила в редакцию 25 августа 2010 г.

Artemov A. A. Boundary behavior of a Poisson transform for a hyperboloid of one sheet.

For an arbitrary function on the boundary of the hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^n$, an asymptotic decomposition of its Poisson transform at infinity is given.

Key words: hyperboloid of one sheet; Poisson transform; hypergeometric function; Laplace–Beltrami operator.