4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
5. *Жуковский Е.С.* Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения: дис. канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1983. 133 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 07-01-00305, 09-01-97503), Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Zhukovskaya T.V. Upper and lower solutions of equations with monotonous operators. Statements on operator inequalities are under discussion. Conditions for existence of upper and lower solutions with operators are established. Obtained results are applied to investigation of equation with autoadjustable delay.

Key words: monotone operator; Banach space cone; upper and lower solutions; solutions estimations; operator inequalities; equation with autoadjustable delay.

УДК 517.958

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© **А. Ю. Сазонов, Ю. Г. Фомичева**

Ключевые слова: весовые функциональные пространства; разложение функции в ряд.

В данной работе получены условия, обеспечивающие сходимость числовых рядов, составленных из коэффициентов Фурье разложения функции $\varphi \in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^+)$ в ряд Фурье по системе собственных функций, а также найдено условие сходимости функционального ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p v_p$ в весовом функциональном пространстве $H_{k,+}^{s+1}(\Omega^+)$.

Пусть $\mathbb{R}_+^{n+1} = \left\{x \in R^{n+1} : x = (x_1, ..., x_n, y) = (x', y),\ x' \in \mathbb{R}^n, y > 0, y \in \mathbb{R}\right\}$, Ω^+ – произвольная область пространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ограниченная гиперплоскостью $\Gamma^0 : y = 0$ и произвольной поверхностью Γ^+ типа Ляпунова. В области Ω^+ рассматривается оператор

$$\begin{gathered} P(D_{x'}, B_y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c, \\ B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{k}{>}0, \mathrm{c}{\leqslant}\ 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $P(D_{x'}, B_y)$ – оператор B-эллиптического типа ([1]):
существует $\delta > 0$, такое, что для любого $q = (q_1, ..., q_{n+1})$, $|q| \neq 0$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i q_j + b q_{n+1}^2 \geqslant \delta\, |q|^2\,, a_{ij} = a_{ji}. \tag{2}$$

Следуя [5], введем следующие обозначения:
$C_{+}^{s}(\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0})$ – множество функций, s раз непрерывно дифференцируемых в области $\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0}$, четных по переменной y;
$H_{k,+}^{s}(\Omega^{+})$– замыкание множества $C_{+}^{s}(\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0})$ по норме

$$||u||_{H_{k,+}^{s}}^{2}=\int_{\Omega^{+}}|u|^{2}y^{k}dx+\sum_{|\alpha|=s}\int_{\Omega^{+}}\left|D_{x'}^{\alpha'}\frac{\partial^{\alpha_{n+1}}u}{(y\partial y)^{\alpha_{n+1}}}\right|^{2}y^{k+2\alpha_{n+1}}dx, \tag{3}$$

где $|\alpha|=\alpha_{1}+...+\alpha_{n}+\alpha_{n+1}$, $\alpha=(\alpha_{1},...,\alpha_{n+1})$, α_{i} – целые неотрицательные числа,

$$D_{x'}=(D_{x_{1}},...,D_{x_{n}}),D_{x_{j}}=\frac{\partial}{\partial x_{j}},j=1,2,...,n;$$

$L_{2,k}(\Omega^{+})$ – пространство функций, квадратично суммируемых с весом y^{k} по области Ω^{+}, в котором введена естественная норма. Положим $H_{k,+}^{0}(\Omega^{+})=L_{2,k}(\Omega^{+})$; $\overset{\circ}{C}{}_{+}^{1}(\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0})$– подмножество функций пространства $C_{+}^{1}(\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0})$, равных нулю вблизи поверхности Γ^{+}; $\overset{\circ}{H}{}_{k,+}^{1}(\Omega^{+})$ – замыкание подмножества $\overset{\circ}{C}{}_{+}^{1}(\Omega^{+}\bigcup\Gamma^{0})$ по норме пространства $H_{k,+}^{1}(\Omega^{+})$.

Пусть $v_{p}(x',y)$– собственные функции, а λ_{p} – соответствующие собственные значения краевой задачи $P(D_{x'},B_{y})v+\lambda v=0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\Gamma^{0}}=0$, $v|_{\Gamma^{+}}=0$, $x\in\Omega^{+}$.

Существование системы собственных значений λ_{p} и соответствующих им собственных функций $v_{p}(x',y)$, четных по переменной y, непрерывно дифференцируемых в области Ω^{+} сколь угодное число раз, доказана в работах [2, 3] . Система функций $v_{p}(x',y)$ плотна в пространстве $L_{2,k}(\Omega^{+})$.

Обозначим через φ_{p} коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi(x',y)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $\{v_{p}(x',y)\}$, $(p=1,2,...)$.

В данной работе получены условия, обеспечивающие сходимость числовых рядов, составленных из коэффициентов Фурье разложения функции $\varphi\in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$ в ряд Фурье по системе собственных функций, а также найдено условие сходимости функционального ряда $\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_{p}v_{p}$в весовом функциональном пространстве $H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$.

Л е м м а 1. *Пусть функция* $\varphi\in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$ *удовлетворяет условию:*
функцииφ, $P\varphi,\ldots,$ $P^{\left[\frac{s}{2}\right]}\varphi$ *принадлежат пространству* $\overset{\circ}{H}{}_{k,+}^{1}(\Omega^{+})$.

Тогда для функции φ *справедливы неравенства:*
при четном s

$$\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_{p}^{2}\lambda_{p}^{s+1}\leqslant\int_{\Omega^{+}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(P^{\frac{s}{2}}\varphi\right)\frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(P^{\frac{s}{2}}\varphi\right)+b\left(P^{\frac{s}{2}}\varphi\right)^{2}-c\left(P^{\frac{s}{2}}\varphi\right)^{2}\right]y^{k}dx', \tag{4}$$

при нечетном s

$$\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_{p}^{2}\lambda_{p}^{s+1}\leqslant\int_{\Omega^{+}}\left(P^{\frac{s+1}{2}}\varphi\right)^{2}y^{k}dx'. \tag{5}$$

Числовые ряды, стоящие в левых частях (4) *и* (5), *сходятся.*

Л е м м а 2. *Билинейный ряд вида*

$$\sum_{p=1}^{\infty}v_{p}^{2}(x)\lambda_{p}^{-\left[\frac{n+k+1}{2}\right]-1}, \tag{7}$$

где $\left[\frac{n+k+1}{2}\right]$ *целая часть числа* $\frac{n+k+1}{2}$, *сходится равномерно во всей замкнутой области* $\bar{\Omega}^{+}$.

Т е о р е м а. *Если для функции* $\varphi \in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$ *выполняются условия леммы 1 и условия леммы 2, то функция* φ *представима в виде ряда* $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p v_p$, *абсолютно и равномерно сходящегося к функции* φ *в замкнутой области* $\bar{\Omega}^{+}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А.* О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // ДАН СССР. 1964. Т. 158. № 2.
2. *Киприянов И.А.* Асимптотическое распределение собственных значений и собственных функций одного класса сингулярных эллиптических операторов // Труды МИАН СССР. 1972. Т. 117.
3. *Катрахов В.В.* О задаче на собственные значения для сингулярных эллиптических операторов // ДАН СССР. 1972. Т. 207. № 2.
4. *Киприянов И.А.* Преобразования Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Труды МИАН СССР. 1967. Т.89.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 07-01-00305, 09-01-97503), Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Sazonov A.Yu., Fomicheva Yu.G. On a Fourier expansion procedure for functions from some classes of weight potentials. Conditions for convergence of numerical series, consisting of function's $\varphi \in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$ Fourier's coefficients by system of eigenfunctions and conditions for convergence of series $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p v_p$ in weight functional space $H_{k,+}^{s+1}(\Omega^{+})$.

Key words: weight functional space; function expansion procedure.