УДК 62-52

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

© **О.В. Ведищева, С.В. Диденко, Т.Б. Заусонина, С.М. Лобанов**

Vedisheva O.V., Didenko S.V., Zausonina T.B., Lobanov S.M. Some issues of sub-optimal non-linear system control according to the quadric criterion. The article looks at the problem of controling a common non-linear system on the basis of the quadric criterion, which cannot be redused to the problem of the state regulator. To estimate the optimal control, a method is used in this problem of sequential approximations that converges at each quite small interval of time. On the strength of the obtained results, problems are considered of sub-optimal non-linear system control based on the quadric criterion with mixed and control limitations.

Введение. Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{0.1}$$

в котором $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — m-мерный действительный вектор управления и $f = (f^1, \ldots, f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{1+n+m}$.

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \tag{0.2}$$

задано, а задача управления системой (0.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [\langle e(t), Q(t)e(t)\rangle +$$

$$+\langle u(t), R(t)u(t)\rangle]\, dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle, \tag{0.3}$$

где T — фиксированное конечное время, $Q(t)$ и P — положительно полуопределенные $(n \times n)$ -матрицы, $R(t)$ — положительно определенная $(m \times m)$-матрица и $e(t)$ — ошибка системы, т.е.

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

для всех значений $t_0 \leq t \leq T$, где $z = (z^1, \ldots, z^n)$ — n-мерный действительный вектор, характеризующий заданный режим функционирования системы (0.1).

Во многих практических ситуациях режим $z(t)$ устроен достаточно плохо и задача (0.1)—(0.3) не может быть сведена к задаче о регуляторе состояния (см., например, [1, с. 657]). При этом, если система (0.1) линейна, то сформулированная выше задача достаточно проста и ее, видимо, можно считать полностью решенной (см., например, [1, 2]). Кроме того, весьма важным представляется то обстоятельство, что здесь решение удается получить в виде закона управления с обратной связью. В общем случае для получения оценок решения (или собственно решения) задачи (0.1)—(0.3) в виде закона управления используют различные методы, которые в той или иной форме используют линеаризацию и (или) последовательные приближения (см., например, [2—4]).

Основной целью настоящей работы является разработка метода, приводящего к конструктивной процедуре получения оценки решения задачи (0.1)—(0.3) в виде закона управления с обратной связью. Данный метод базируется на методе последовательных приближений, сходящийся на всех достаточно малых отрезках времени. В качестве приложения полученных результатов рассматриваются задачи об управлении системой (0.1) по критерию (0.3) со смешанными ограничениями и ограничениями на управление.

1. Метод последовательных приближений. Следуя [3], обозначим через $u_N(t), x_N(t)$ — некоторое N-е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (0.1)—(0.3). Тогда $(N+1)$-е приближение $u_{N+1}(t), x_{N+1}(t)$

может быть получено как решение задачи о минимизации функционала

$$I_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}[\langle e(t), Q(t)e(t)\rangle +$$

$$+\langle u(t), R(t)u(t)\rangle]\,dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \quad (1.1)$$

с ограничением

$$\dot{x} = f(t, x_N, u_N) + A_N(t)(x - x_N) +$$

$$+B_N(t)(u - u_N), \quad x(t_0) = c, \quad (1.2)$$

в котором $A_N(t)$ и $B_N(t)$ — $(n\times n)$- и $(n\times m)$ -матрицы, задаваемые равенствами

$$A_N(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_N(t)\\ u=u_N(t)}} \quad (1.3)$$

и

$$B_N(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_N(t)\\ u=u_N(t)}} \quad (1.4)$$

соответственно.

Задача (1.1), (1.2) представляет собой вариант задачи слежения для линейной системы, и ее решение, как известно, дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) =$$

$$= R^{-1}(t)B'_N(t)[h_{N+1}(t) - K_{N+1}(t)x_{N+1}(t)], \quad (1.5)$$

в котором $K_{N+1}(t)$ — положительно определенное при $t_0 \le t < T$ решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}_{N+1}(t) = -K_{N+1}(t)A_N(t) - A'_N(t)K_{N+1}(t) + \quad (1.6)$$

$$+K_{N+1}(t)B_N(t)R^{-1}(t)B'_N(t)K_{N+1}(t) - Q(t)$$

с граничным условием

$$K_{N+1}(T) = P, \quad (1.7)$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) =$$

$$= -[A_N(t) - B_N(t)R^{-1}(t)B'_N(t)K_{N+1}(t)]'h_{N+1}(t) -$$

$$-Q(t)z(t) + K_{N+1}(t)[f(t, x_N(t), u_N(t)) -$$

$$-A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)] \quad (1.8)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Q(T)z(T) \quad (1.9)$$

(см., например, [1, с. 699]).

Если построенные выше последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots \quad (1.10)$$

и

$$u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots \quad (1.11)$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$, то из (1.10) и (1.11) можно выбрать подпоследовательности

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots \quad (1.12)$$

и

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \ldots, u_{N_k}, \ldots \quad (1.13)$$

равномерно на $[t_0, T]$ сходящиеся к некоторым непрерывным функциям $x^*(t)$ и $u^*(t)$, где

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty.$$

Тогда, если окажется, что последовательность (1.12) совпадает с последовательностью (1.10), а последовательность (1.13) — с последовательностью (1.11), то, используя соотношения (1.3)—(1.9), можно перейти к рассмотрению вопроса о том, будет ли $u^*(t)$ оптимальным управлением в задаче (0.1)—(0.3).

Заметим теперь, что показать эквивалентность последовательностей (1.10), (1.12) и (1.11), (1.13) в общем случае совсем непросто. Однако для задачи (0.1)—(0.3) несложно построить метод последовательных приближений, идейно близкий к упомянутому выше, но не имеющий формальных проблем со сходимостью.

Именно, следуя идее знаменитой модификации метода Ньютона (см., например, [6, с. 470]), для всех значений $N = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}[\langle e(t), Q(t)e(t)\rangle +$$

$$+(t), R(t)u(t)\rangle]\,dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \quad (1.14)$$

с ограничением

$$\dot{x} = f(t, x_N, u_N) + A(t)(x - x_N) + B(t)(u - u_N),$$

$$x(t_0) = c, \quad (1.15)$$

в котором $A(t)$ и $B(t)$ — $(n \times n)$- и $(n \times m)$ -матрицы, задаваемые равенствами

$$A(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=z(t)\\ u=0}} \tag{1.16}$$

и

$$B(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=z(t)\\ u=0}} \tag{1.17}$$

соответственно.

Для фиксированных функций x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (1.14), (1.15) по аналогии с (1.5) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) =$$

$$= R^{-1}(t)B'(t)[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \tag{1.18}$$

в котором $x_{N+1}(t)$ — решение уравнения (1.15), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(t_0) = c,$$

$K(t)$ — положительно определенное при $t_0 \leq t < T$ решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) +$$

$$+K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) - Q(t) \tag{1.19}$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \tag{1.20}$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) =$$

$$= -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'h_{N+1}(t) -$$

$$-Q(t)z(t) + K(t)[f(t, x_N(t), u_N(t)) -$$

$$-A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)] \tag{1.21}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Q(T)z(T). \tag{1.22}$$

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ каким-либо образом задано, то соотношения (1.18)—(1.22) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях T позволяет получить достаточно хорошее приближение к решению задачи (0.1)—(0.3). Именно эта схема и будет рассматриваться в дальнейшем. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{1.23}$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}(t)B'(t)[Q(T)z(T) - K(t)c]. \tag{1.24}$$

З а м е ч а н и е. 1. Переход от задачи (1.1), (1.2) к задаче (1.14), (1.15), очевидно, влечет за собой снижение скорости сходимости последовательных приближений, если, конечно, таковая имеется. Однако, в последнем случае схема приближений существенно упрощается и исследование ее сходимости не вызывает больших затруднений.

2. Основная теорема. Пусть L_2 — множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T — часть множества L_2, такая, что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (0.1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющее начальному условию (0.2). Тогда имеет место следующая

Т е о р е м а. *Пусть функция $f = (f^1, \ldots, f^n)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными*

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{1+n+m}$. Тогда для каждой точки (t_0, c) пространства $\mathbb{R}^{1+n}$ найдется такое действительное число $T_0 > t_0$, что для всех значений $t_0 < T < T_0$ справедливы равенства

$$\lim_{N\to\infty} u_N(t) = u^*(t) \tag{2.1}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = x^*(t), \tag{2.2}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$, $u^*(t)$ — некоторая функция, определенная и непрерывная на $[t_0, T]$, а $x^*(t)$ — соответствующее решение уравнения (0.1) с начальным условием

$$x^*(t_0) = c. \tag{2.3}$$

При этом оказывается, что для всех значений $t_0 \le t \le T$

$$u^*(t) = R^{-1}(t)B'(t)[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \quad (2.4)$$

где $h^*(t)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{h}^*(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'h^*(t)-$$
$$-Q(t)z(t) + K(t)[f(t, x^*(t), u^*(t))-$$
$$-A(t)x^*(t) - B(t)u^*(t)] \quad (2.5)$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Q(T)z(T). \quad (2.6)$$

Более того, для каждой функции $u \in L_2^T$

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*) \le \lim_{N\to\infty} J_N(u). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ и $H(t)$ — решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]X(t),$$
$$X(t_0) = E$$

и, соответственно,

$$\dot{H}(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'H(t),$$
$$H(T) = E,$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица. Тогда при использовании закона (1.18) уравнение (1.15) эквивалентно уравнению

$$x_{N+1}(t) = X(t)c+$$
$$+\int_{t_0}^{t} X(t-\tau)[B(\tau)R^{-1}(\tau)B'(\tau)h_{N+1}(\tau)+ \quad (2.8)$$
$$+f(\tau, x_N(\tau), u_N(\tau)) - A(\tau)x_N(\tau) - B(t)u_N(\tau)]\,d\tau,$$

а уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) — уравнению

$$h_{N+1}(t) = H(t)Q(T)z(T)+$$
$$+\int_{T}^{t} H(t-\tau)[K(\tau)(f(\tau, x_N(\tau), u_N(\tau))- \quad (2.9)$$
$$-A(\tau)x_N(\tau) - B(\tau)u_N(\tau)) - Q(\tau)z(\tau)]\,d\tau.$$

Принимая во внимание (2.9), перепишем уравнение (2.8) в следующем эквивалентном виде:

$$x_{N+1}(t) = X(t)c+$$
$$+\int_{t_0}^{t} X(t-\tau)\{f(x_N(\tau), u_N(\tau)) - A(\tau)x_N(\tau)-$$
$$-B(\tau)u_N(\tau) + B(\tau)R^{-1}(\tau)B(\tau)[H(\tau)Q(T)z(T)+$$
$$+\int_{T}^{\tau} H(\tau-s)(K(s)(f(s, x_N(s), u_N(s))-$$
$$-A(s)x_N(s) - B(s)u_N(s)) - Q(s)z(s))\,ds]\}\,d\tau.$$

Тогда с учетом (1.18), система (2.8), (2.9) может быть представлена в символической форме

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} [f_1(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau))+$$
$$+\int_{\tau}^{T} f_2(\tau, s, x_N(s), h_N(s))\,ds]\,d\tau, \quad (2.10)$$

$$h_{N+1}(t) = H(t)h_0 + \int_{\tau}^{T} f_3(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau))\,d\tau, \quad (2.11)$$

где

$$h_0 = Q(T)z(T),$$

а $f_1 = (f_1^1, \dots, f_1^n)$, $f_2 = (f_2^1, \dots, f_2^n)$ и $f_3 = (f_3^1, \dots, f_3^n)$ — соответствующие векторные функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_l^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f_l^i}{\partial h^j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3$$

в пространстве $[t_0, T] \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть теперь a —некоторое положительное число. Обозначим через Σ — множество точек $(t, x, h) \in \mathbb{R}^{1+2n}$, для которых выполнены неравенства

$$t_0 \le t \le T, \quad |x - c| \le a, \quad |h - h_0| \le a, \quad (2.12)$$

где $|x|$ — евклидова длина вектора x. Так как Σ — компактное множество, то найдутся такие положительные числа M и L, что для всех значений t, x и h, удовлетворяющих условиям (2.12), выполнены неравенства

$$|f_l(t, \tau, x, h)| \le M, \quad l = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

и

$$\left|\frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial x^j}\right| \le L, \quad \left|\frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial h^j}\right| \le L, \quad (2.14)$$
$$i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3$$

Обозначим через Ω множество всех непрерывных пар (x,h) функций, определенных на отрезке $[t_0,T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^n$ и при $t_0 \le t \le T$ удовлетворяющих условиям

$$|x(t)-c| \le a, \quad |h(t)-h_0| \le a, \tag{2.15}$$

т.е. Ω — множество непрерывных пар (x,h) функций, графики которых лежат в Σ. При этом будем рассматривать часть Ω_T множества Ω, такую, что наряду с неравенствами (2.15) при $(x,h) \in \Omega_T$ выполнялись бы также и неравенства

$$|X(t)c-c| \le \frac{a}{2}, \quad |H(t)h_0-h_0| \le \frac{a}{2} \tag{2.16}$$

и

$$|x(t)-X(t)c| \le \frac{a}{2},$$

$$|h(t)-H(t)h_0| \le \frac{a}{2}. \tag{2.17}$$

Тогда в силу неравенств

$$|x(t)-c| \le |x(t)-X(t)c| + |X(t)c-c|$$

и

$$|h(t)-h_0| \le |h(t)-H(t)h_0| + |H(t)h_0-h_0|$$

из условий (2.16) и (2.17) следуют неравенства (2.15) и, таким образом, принадлежность пары (x,h) к множеству Ω.

Для всех значений $t_0 \le t \le T$ положим

$$\varphi(t) = (x(t),h(t))$$

и будем говорить, что $\varphi \in \Omega_T$, если $(x,h) \in \Omega_T$. Обозначим через F оператор, задаваемый правыми частями системы (2.10), (2.11). Тогда, как легко видеть, число T может быть выбрано столь малым, что если $\varphi \in \Omega_T$, то функция

$$\varphi^* = F\varphi \tag{2.18}$$

также принадлежит к Ω_T, где $\varphi^* = (x^*,h^*)$.

В самом деле, для того чтобы функция φ^*, задаваемая соотношением (2.18), принадлежала к Ω_T, достаточно, чтобы при $t_0 \le t \le T$ были выполнены неравенства

$$|x^*(t)-X(t)c| \le \frac{a}{2}, \quad |h^*(t)-H(t)h_0| \le \frac{a}{2}.$$

Но в силу (2.10), (2.11) и (2.13) имеем

$$|h^*(t)-H(t)h_0| =$$

$$= \left|\int\limits_t^T f_3(t,\tau,x(\tau),h(\tau))\,d\tau\right| \le M(T-t_0)$$

и

$$|x^*(t)-X(t)c| =$$

$$= \left|\int\limits_{t_0}^t [f_1(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\tau^T f_2(\tau,s,x(s),h(s))ds]d\tau\right| \le$$

$$\le M((T-t_0)+1)(T-t_0).$$

Отсюда следует, что при

$$M((T-t_0)+1)(T-t_0) \le \frac{a}{2} \tag{2.19}$$

условие, предъявляемое к оператору F в (2.18), выполнено.

Пусть теперь $\varphi = (x,h)$ и $\psi = (y,g)$ — некоторые две функции, принадлежащие к множеству Ω_T. Тогда при выполнении неравенства (2.19) функции

$$\varphi^* = F\varphi$$

и

$$\psi^* = F\psi$$

также принадлежат к Ω_T, где $\varphi^* = (x^*,h^*)$ и $\psi^* = (y^*,g^*)$. При этом оказывается, что

$$\|\varphi^*-\psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \le k\|\varphi-\psi\|, \tag{2.20}$$

где

$$\|\varphi\| = \max_{t_0 \le t \le T} |\varphi(t)|$$

и k — некоторое положительное число, не зависящее от φ и ψ и при всех достаточно малых значениях $T > t_0$ удовлетворяющее условию

$$k < 1. \tag{2.21}$$

В самом деле, в силу неравенств (2.14) и формулы Лангража для всех значений $t_0 \le t \le T$

$$|f_l(t,\tau,x(t),h(t)) - f_l(t,\tau,y(t),g(t))| \le$$

$$\le n^2L(|x(t)-y(t)| + |h(t)-g(t)|),$$

$$l = 1,2,3 \tag{2.22}$$

(см., например, [7, с. 163]). Поэтому

$$\left|\int\limits_t^T [f_3(\tau,x(\tau),h(\tau)) - f_3(\tau,y(\tau),g(\tau))]d\tau\right| \le \tag{2.23}$$

$$\leq n^2L[\int_t^T |x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau + \int_t^T |h(\tau)-g(\tau)|\,d\tau].$$

Но

$$\int_t^T |x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \leq \int_t^T |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau \quad (2.24)$$

и

$$\int_t^T |h(\tau)-g(\tau)|d\tau \leq \int_t^T |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau. \quad (2.25)$$

Тогда, если

$$h^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t,\tau,x(\tau),h(\tau))\,d\tau$$

и

$$g^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t,\tau,y(\tau),g(\tau))\,d\tau,$$

то из неравенств (2.23)—(2.25) следует, что

$$\|h^*-g^*\| \leq 2n^2L(T-t_0)\|\varphi-\psi\|. \quad (2.26)$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.22)

$$\Big|\int_{t_0}^t \{f_1(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) - f_1(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) +$$

$$+\int_\tau^T [f_2(\tau,s,x(s),h(s)) -$$

$$-f_2(\tau,s,y(s),g(s))]\,ds\}\,d\tau\Big| \leq \quad (2.27)$$

$$\leq n^2L\int_{t_0}^t [|x(\tau)-y(\tau)| + |h(\tau)-g(\tau)| +$$

$$+\int_\tau^T (|x(s)-y(s)| + |h(s)-g(s)|)\,ds]\,d\tau.$$

Но

$$\int_{t_0}^t |x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau \quad (2.28)$$

и

$$\int_{t_0}^t |h(\tau)-g(\tau)|\,d\tau \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau. \quad (2.29)$$

Тогда, если

$$x^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t [f_1(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) +$$

$$+\int_\tau^T f_2(\tau,s,x(s),h(s))\,ds]\,d\tau$$

и

$$y^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t [f_1(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) +$$

$$+\int_\tau^T f_2(\tau,s,y(s),g(s))\,ds]\,d\tau,$$

то из неравенств (2.27)—(2.29) и (2.24), (2.25) следует, что

$$\|x^*-y^*\| \leq$$

$$\leq 2n^2L((T-t_0)+1)(T-t_0)\|\varphi-\psi\|. \quad (2.30)$$

При этом, согласно неравенству треугольника, несложно заметить, что

$$\|\varphi^*-\psi^*\| \leq \|x^*-y^*\| + \|h^*-g^*\|. \quad (2.31)$$

Поэтому, объединяя неравенства (2.26), (2.30) и (2.31), окончательно получаем, что

$$\|\varphi^*-\psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leq$$

$$\leq 4n^2L((T-t_0)+1)(T-t_0)\|\varphi-\psi\|.$$

Таким образом, если

$$4n^2L((T-t_0)+1)(T-t_0) < 1, \quad (2.32)$$

то, полагая

$$k = 4n^2L((T-t_0)+1)(T-t_0),$$

видим, что при выполнении условия (2.32) выполнены также и условия (2.20) и (2.21). Сказанное означает, что существует такое действительное число T_0, что при $t_0 < T < T_0$ число T удовлетворяет условиям (2.19) и (2.32) и обеспечивает выполнение требований, предъявляемых к (2.18), (2.20) и (2.21). Поэтому везде в дальнейшем будем полагать число T выбранным так, что неравенства (2.19) и (2.32) для него выполнены.

Для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и $N = 0,1,2,\ldots$ положим

$$\varphi_N(t) = (x_N(t), h_N(t))$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots, \qquad (2.33)$$

определенных и непрерывных на отрезке $[t_0, T]$, в силу системы (2.11), (2.12) приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.34)$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, h_0). \qquad (2.35)$$

Поскольку функция (2.35) принадлежит к множеству Ω_T, то в силу равенства (2.34) все функции последовательности (2.33) также принадлежат к Ω_T. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi, \qquad (2.36)$$

в котором в силу условий (2.20), (2.21) F является сжимающим оператором, отображающим множество Ω_T в себя. Поэтому уравнение (2.36) имеет на множестве Ω решение φ^*, которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \qquad (2.37)$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$ (см., например, [7, с. 165]). Но, так как по построению

$$h_0 = Q(T)z(T),$$

то согласно (2.35) последовательность (2.34) удовлетворяет начальным приближениям (1.23) и (1.24). Поэтому из равенств (1.18) и (2.37) следует существование функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$, построенных по формулам (2.1) и (2.2), причем функция $x^*(t)$ является соответствующим $u^*(t)$ решением уравнения (0.1) с начальным условием (2.3). При этом уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) переходит в уравнение (2.5) с граничным условием (2.6), а закон управления (1.18) — в (2.4). Более того, по построению

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*)$$

и

$$J_N(u_N) \le J_N(u)$$

для всех $u \in L_2^T$, откуда и следует цепочка (2.7).

Таким образом, теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. По аналогии с модифицированным методом Ньютона матрицы $A(t)$ и $B(t)$ следовало бы задавать по формулам

$$A(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0(t)\\ u=u_0(t)}}$$

и

$$B(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0(t)\\ u=u_0(t)}},$$

где $x_0(t)$ и $u_0(t)$ — некоторое начальное приближение к решению задачи (0.1)—(0.3) (см., например, [6, с. 470]). Однако, как видно из доказательства теоремы, выбор матриц $A(t)$ и $B(t)$ по формулам (1.16) и (1.17) принципиально здесь влияет только на оценку величины T_0 и скорость сходимости. Гораздо более важным представляется то обстоятельство, что в последнем случае выбор имеет более чем прозрачное физическое обоснование.

Вообще говоря, матрицы $A(t)$ и $B(t)$ можно задавать достаточно произвольно, исходя, например, из допустимости значения T_0. Плата же за произвольность выбора этих матриц очевидна — снижение скорости сходимости метода.

З а м е ч а н и е 3. Необходимо отметить, что если задача (0.1)—(0.3) имеет решение класса L_2^T, то (2.7) не гарантирует, что функция u^* будет именно этим решением. Другими словами, в общем случае функция u^* является только лишь приближением к решению исходной задачи, качество которого оценивается цепочкой (2.7).

3. Приближенная задача о регуляторе состояния. Непосредственно использование закона управления (33) в реальном времени может быть осложнено тем обстоятельством, что для нахождения функции h^* требуется, вообще говоря, знание оптимального управления $u^*(t)$ и состояния $x^*(t)$ на всем отрезке $[t_0, T]$. Однако, если окажется что функция x^* будет достаточно близка к режиму z, то это обстоятельство может быть обойдено с помощью приближенной к (0.1)—(0.3) задачи о регуляторе состояния.

В самом деле, исключительно для простоты обозначений рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\langle \delta x(t), Q(t)\delta x(t)\rangle + \langle \delta u(t), R(t)\delta u(t)\rangle]\, dt + \frac{1}{2}\langle \delta x(T), P\delta x(T)\rangle \qquad (3.1)$$

при ограничениях (0.1) и (0.2), где для всех значений $t_0 \le t \le T$

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

и
$$\delta u(t) = u(t) - u^*(t).$$
Тогда, поскольку при $t_0 \le t \le T$
$$\dot{x}^* = f(t, x^*, u^*),$$
а решение $x^*(t)$ удовлетворяет начальному условию (32), то, как известно, хорошим приближением к задаче (3.1), (0.1), (0.2) является задача о минимизации функционала (3.1) при ограничении
$$\dot{\delta x} = A^*(t)\delta x + B^*(t)\delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \qquad (3.2)$$
где $A(t)$ и $B(t)$ — $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, задаваемые равенствами
$$A^*(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x^*(t)\\ u=u^*(t)}}$$
и
$$B^*(t) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=x^*(t)\\ u=u^*(t)}}$$
соответственно. Решение же задачи (3.1), (3.2) дается законом управления с обратной связью
$$\delta u(t) = -R^{-1}(t)B^{*\prime}(t)K(t)\delta x(t),$$
в котором $K(t)$ — положительно определенное при $t_0 \le t < T$ решение матричного дифференциального уравнения Риккати
$$\dot{K}(t) = -K(t)A^*(t) -$$
$$-A^{*\prime}(t)K(t) + K(t)B^*(t)R^{-1}(t)B^{*\prime}(t)K(t) - Q(t)$$
с граничным условием
$$K(T) = P$$
и который без труда может быть реализован в реальном времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.
4. *Красовский А.А.* Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1969.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 25 октября 2002 г.