УДК 517.925.5+517.929

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ МНОГОСТАДИЙНЫЙ СИНТЕЗ ВЕЩЕСТВА

© И.А. Мельник

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений; большая размерность; предельные теоремы; дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Исследованы свойства решений и доказано, что последняя компонента решения этой системы при достаточно большой размерности является приближенным решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе мы продолжаем исследование связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих многостадийный синтез вещества, и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Первый результат в этом направлении был получен Г.В. Демиденко в [1] при изучении почти линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau} x_1 + g(t, x_n), & t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} (x_{j-1} - x_j), & j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau} x_{n-1} - \theta x_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Размерность n системы определяется числом стадий, $\tau > 0$ – время протекания процесса, $x_j(t)$ – концентрация вещества на j -й стадии. При очень большом числе стадий $n \gg 1$ возникает сложная задача нахождения концентрации продукта синтеза $x_n(t)$. Способ решения этой задачи был предложен в [1] и основан на доказательстве теорем о предельном переходе от (1.1) к уравнению с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)).$$

Следует отметить, что Г.В. Демиденко предложил ряд методов, с использованием которых были доказаны предельные теоремы для различных классов систем (см., например, [2–12]). В данной работе мы рассматриваем одну систему нелинейных дифференциальных уравнений, обобщающую (1.1), и устанавливаем для нее предельную теорему. Работа продолжает наши исследования [11, 12].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными данными

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau} \frac{\bar{x}_1}{1 + \rho \bar{x}_1^\gamma} + g(t, \bar{x}_n), & t > 0, \\ \frac{d\bar{x}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \left(\frac{\bar{x}_{j-1}}{1 + \rho \bar{x}_{j-1}^\gamma} - \frac{\bar{x}_j}{1 + \rho \bar{x}_j^\gamma} \right), & j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{d\bar{x}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \frac{\bar{x}_{n-1}}{1 + \rho \bar{x}_{n-1}^\gamma} - \theta \bar{x}_n, & \bar{x}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\theta \geq 0$, $\tau, \rho, \gamma > 0$. Функция $g(t, z) \in C(\bar{\mathbb{R}}_2^+)$ неотрицательна, ограничена $0 \leq g(t, z) \leq G$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|g(t, z_1) - g(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|, \quad t > 0, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что при данных предположениях задача Коши (2.1) однозначно разрешима на полуоси $\{t > 0\}$, при этом все компоненты решения неотрицательны. В этом нетрудно убедиться, следуя, например, схеме из [11].

Будем неограниченно увеличивать число n уравнений системы и рассмотрим последовательности функций $\{\bar{x}_j^n(t)\}$, составленные из j -х компонент решений задач Коши вида (2.1). В работе [11] была установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Существует $n_1 > 0$ такое, что при всех $n > n_1$ имеют место оценки*

$$0 \leq \bar{x}_j^n(t) < \frac{\tau G(1 + \rho)}{n - 1}, \quad j = 1, \dots, n - 1, \quad t \in [0, T].$$

В настоящей работе, опираясь на эту теорему и результаты, установленные Г.В. Демиденко в [1] (см. теоремы 1–4), будут доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. Последовательность $\{\bar{x}_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$, $T > \tau$:

$$\bar{x}_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty. \tag{2.2}$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, & 0 \leq t \leq \tau. \end{cases} \tag{2.3}$$

Из доказательства теоремы 2 вытекают оценки скорости сходимости (2.2), из которых следует, что при малых значениях параметра нелинейности $\gamma \approx 0$ сходимость (2.2) существенно замедляется.

Теорема 3. При $\gamma > 1/2$ имеет место оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |\bar{x}_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geq n_0(\gamma).$$

Теорема 4. При $0 < \gamma \leq 1/2$ имеет место оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |\bar{x}_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{\gamma/2}}, \quad n \geq n_0(\gamma).$$

Из теорем 2–4 мы получаем эффективный метод приближенного нахождения последней компоненты решения задачи (2.1) при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздывающим аргументом.

Отметим, что доказательство теоремы 2 в случае, если параметр нелинейности $\gamma > 1$, опубликовано в [11]. В работе [12] установлены предельные теоремы для более широкого класса нелинейных систем, который включает системы из (2.1) при $\gamma > 1$.

Численные расчеты для некоторых систем вида (1.1), (2.1) проводились в работах [13, 14].

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

При изучении сходимости последовательности $\{\bar{x}_n^n(t)\}$ нам понадобится свойство этих функций, указанное в следующей лемме.

Лемма 1. Для последней компоненты $\bar{x}_n^n(t)$ решения задачи Коши (2.1) справедливо интегральное соотношение

$$\bar{x}_n^n(t) = \int_0^t \Psi_n(t, \xi_0) g(\xi_0, \bar{x}_n^n(\xi_0)) d\xi_0, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n(t, \xi_0) &= \int_{\xi_0}^t \int_{\xi_0}^{\xi_1} \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \Phi_j(\xi_j) e^{-\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \Phi_j(\xi) d\xi} \times \\ &\times e^{-\theta(t-\xi_{n-1})} d\xi_1 \dots d\xi_{n-2} d\xi_{n-1}, \\ \Phi_j(\xi) &= \frac{n-1}{\tau(1 + \rho(\bar{x}_j^n(\xi))^\gamma)}, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Соотношение (3.1) нетрудно получить, последовательно интегрируя каждое из уравнений системы (2.1).

Исследуем предельные свойства последовательности функций $\{\Psi_n(t, \xi_0)\}$ при увеличении числа уравнений n в системе.

Лемма 2. Для любых $T > \tau$ и $\delta > 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место равномерная сходимость

$$\Psi_n(t, \xi_0) \rightarrow \begin{cases} 0, & t - \xi_0 \in [0, \tau(1 - \delta)], \\ e^{-\theta(t-\xi_0-\tau)}, & t - \xi_0 \in [\tau(1 + \delta), T]. \end{cases}$$

Отметим, что лемма 2 является аналогом теорем 1, 2 из [1].

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для функций $\Phi_j(\xi)$ справедливы оценки

$$\frac{n-1}{\tilde{\tau}_n} \leq \Phi_j(\xi) \leq \frac{n-1}{\tau}, \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{\tau}_n = \tau \left(1 + \rho \left(\frac{\tau G(1 + \rho)}{n-1} \right)^\gamma \right).$$

В силу (3.2) получаем оценку

$$\begin{aligned} 0 \leq \Psi_n(t, \xi_0) &\leq \int_{\xi_0}^t \int_{\xi_0}^{\xi_1} \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{n-1}} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-1} e^{-\frac{n-1}{\tilde{\tau}_n}(\xi_{n-1}-\xi_0)} \times \\ &\times e^{-\theta(t-\xi_{n-1})} d\xi_1 \dots d\xi_{n-2} d\xi_{n-1} = \\ &= \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-1} \frac{e^{-\theta(t-\xi_0)}}{\tilde{\omega}^{n-1}} S_n(t - \xi_0), \end{aligned}$$

где

$$S_n(t - \xi_0) = 1 - e^{-\tilde{\omega}(t-\xi_0)} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(\tilde{\omega}(t - \xi_0))^j}{j!},$$

$$\tilde{\omega} = \frac{n-1}{\tilde{\tau}_n} - \theta.$$

Используя рассуждения из работы [1], нетрудно показать, что при $0 < t < \tau$ и

$$(n-1)^{1+\gamma} - \theta\tau(n-1)^\gamma - \rho\theta\tau(\tau G(1 + \rho))^\gamma > 0 \tag{3.3}$$

выполнены оценки

$$0 \leq S_n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}t}{n-1}\right)} \left(\frac{\tilde{\omega}t}{n-1} e^{1 - \frac{\tilde{\omega}t}{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Из сказанного выше вытекает, что при $0 < t - \xi_0 < \tau$ и указанных номерах n справедлива оценка

$$0 \leq \Psi_n(t, \xi_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}(t - \xi_0)}{n-1}\right)} \left(\frac{(t - \xi_0)}{\tau} e^{1 - (t - \xi_0)/\tau}\right)^{n-1}$$

Из этой оценки для любого $\delta > 0$ вытекает равномерная сходимость

$$\Psi_n(t, \xi_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad t - \xi_0 \in [0, \tau(1 - \delta)].$$

Действительно, при указанных t и ξ_0 получаем неравенства $1 - \tilde{\omega}(t - \xi_0)/(n-1) > \delta > 0$, а также $e^{1 - (t - \xi_0)/\tau} (t - \xi_0)/\tau < 1$ при

$$(n-1)^\gamma > -\frac{\rho(\tau G(1 + \rho))^\gamma (1 + \ln(1 - \delta))}{\delta + \ln(1 - \delta)}.$$

Пусть теперь $t - \xi_0 > \tau$. Сделаем замену переменных $\eta_j = \xi_j - \xi_0$, $j = 0, \dots, n-1$, представим функцию $\Psi_n(t, \xi_0)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \Psi_n(t, \xi_0) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\eta_{n-1}} \dots \int_0^{\eta_2} \prod_{j=1}^{n-1} \varphi_j(\eta_j + \xi_0) e^{-\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \varphi_j(\xi + \xi_0) d\xi} \times \\ &\times e^{-\theta(t - \xi_0 - \eta_{n-1})} d\eta_1 \dots d\eta_{n-2} d\eta_{n-1} - \\ &- \int_{t - \xi_0}^{+\infty} \int_0^{\eta_{n-1}} \dots \int_0^{\eta_2} \prod_{j=1}^{n-1} \varphi_j(\eta_j + \xi_0) e^{-\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \varphi_j(\xi + \xi_0) d\xi} \times \\ &\times e^{-\theta(t - \xi_0 - \eta_{n-1})} d\eta_1 \dots d\eta_{n-2} d\eta_{n-1} \\ &= H_n^1(t, \xi_0) - H_n^2(t, \xi_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя (3.2), получаем неравенства

$$0 \leq H_n^2(t, \xi_0) \leq \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{n-1} \frac{e^{-\theta(t - \xi_0)}}{\tilde{\omega}^{n-1}} (1 - S_n(t - \xi_0)).$$

По аналогии с [1] имеем

$$0 \leq 1 - S_n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{\tilde{\omega}t}{n-1} - 1\right)} \left(\frac{\tilde{\omega}t}{n-1} e^{1 - \frac{\tilde{\omega}t}{n-1}}\right)^{n-1}$$

при $t > \tau$ и n таких, что выполнены неравенства (3.3) и

$$(n-1)^{1+\gamma} (t/\tau - 1) - \rho(\tau G(1 + \rho))^\gamma (n-1) - \theta t (n-1)^\gamma - \rho \theta t (\tau G(1 + \rho))^\gamma > 0.$$

Из сказанного выше вытекает, что при $t - \xi_0 > \tau$ и указанных номерах n справедлива оценка

$$0 \leq H_n^2(t, \xi_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{\tilde{\omega}(t - \xi_0)}{n-1} - 1\right)} \left(\frac{(t - \xi_0)}{\tau} e^{1 - (t - \xi_0)/\tau}\right)^{n-1}.$$

Из этой оценки для любых $\delta > 0$ и $T > \tau$ вытекает равномерная сходимость

$$H_n^2(t, \xi_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad t - \xi_0 \in [\tau(1 + \delta), T].$$

Действительно, при указанных t , ξ_0 и n получаем неравенства $\tilde{\omega}(t - \xi_0)/(n-1) - 1 > \delta/2 > 0$, а также $e^{1 - (t - \xi_0)/\tau} (t - \xi_0)/\tau < 1$ при

$$(n-1)^\gamma > \frac{\rho(\tau G(1 + \rho))^\gamma (1 + \ln(1 + \delta))}{\delta - \ln(1 + \delta)}.$$

Первое слагаемое в (3.4) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} H_n^1(t, \xi_0) &= e^{-\theta(t - \xi_0)} \int_0^{+\infty} \int_{\eta_1}^{+\infty} \dots \int_{\eta_{n-2}}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} \varphi_j(\eta_j + \xi_0) \times \\ &\times e^{-\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} (\varphi_j(\xi + \xi_0) - \theta) d\xi} d\eta_{n-1} \dots d\eta_2 d\eta_1. \end{aligned}$$

Каждый из сомножителей можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi_j(\eta_j + \xi_0) e^{-\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} (\varphi_j(\xi + \xi_0) - \theta) d\xi} &= \\ &= -\frac{\varphi_j(\eta_j + \xi_0)}{\varphi_j(\eta_j + \xi_0) - \theta} \frac{d}{d\eta_j} e^{-\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} (\varphi_j(\xi + \xi_0) - \theta) d\xi} \end{aligned}$$

Из (3.2) вытекают неравенства

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{-1} \leq \frac{\varphi_j(\eta_j + \xi_0)}{\varphi_j(\eta_j + \xi_0) - \theta} \leq \left(1 - \frac{\theta\tilde{\tau}_n}{n-1}\right)^{-1}.$$

Тогда, очевидно, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{-1} &\leq \int_{\eta_{n-2}}^{+\infty} \varphi_{n-1}(\eta_{n-1} + \xi_0) \times \\ &\times e^{-\int_{\eta_{n-2}}^{\eta_{n-1}} (\varphi_{n-1}(\xi + \xi_0) - \theta) d\xi} d\eta_{n-1} \leq \left(1 - \frac{\theta\tilde{\tau}_n}{n-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Остальные интегралы оцениваются аналогично. Откуда имеем

$$\begin{aligned} e^{-\theta(t-\xi_0)} \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{-n+1} &\leq H_n^1(t, \xi_0) \leq \\ &\leq e^{-\theta(t-\xi_0)} \left(1 - \frac{\theta\tilde{\tau}_n}{n-1}\right)^{-n+1}, \end{aligned}$$

т. е. $H_n^1(t, \xi_0)$ равномерно сходится к $e^{-\theta(t-\xi_0-\tau)}$ при $n \rightarrow \infty$ на любом отрезке $t - \xi_0 \in [0, T]$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся оценки, вытекающие из доказательства леммы 2.

Следствие 1. Пусть $t - \xi_0 \in [0, T]$, $\xi_0 \geq 0$, тогда, начиная с некоторого номера n , справедливы оценки

$$0 \leq \psi_n(t, \xi_0) \leq 2e^{-\theta(t-\xi_0-\tau)}.$$

Следствие 2. Пусть $t - \xi_0 \in [0, \tau(1-\delta)]$, $\xi_0 \geq 0$ и n удовлетворяет неравенствам

$$(n-1)^{1+\gamma} - \theta\tau(n-1)^\gamma - \rho\theta\tau(\tau G(1+\rho))^\gamma > 0, \quad (3.5)$$

$$(n-1)^\gamma > -\frac{\rho(\tau G(1+\rho))^\gamma(1+\ln(1-\delta))}{\delta + \ln(1-\delta)}, \quad (3.6)$$

тогда

$$0 \leq \psi_n(t, \xi_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)} \delta}.$$

Следствие 3. Пусть $t - \xi_0 \in [\tau(1+\delta), T]$, $\xi_0 \geq 0$ и n удовлетворяет (3.5) и неравенствам

$$\begin{aligned} (n-1)^{1+\gamma}\delta/2 - \rho(\tau G(1+\rho))^\gamma(n-1) - \\ - \theta T(n-1)^\gamma - \rho\theta T(\tau G(1+\rho))^\gamma > 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$(n-1)^\gamma > \frac{\rho(\tau G(1+\rho))^\gamma(1+\ln(1+\delta))}{\delta - \ln(1+\delta)}, \quad (3.8)$$

тогда

$$\left| \psi_n(t, \xi_0) - e^{-\theta(t-\xi_0-\tau)} \right| \leq e^{-\theta(t-\xi_0)} A_n + \frac{1}{\sqrt{n-1} \delta},$$

$$A_n = \left| \left(1 - \frac{\theta\tilde{\tau}_n}{n-1}\right)^{-n+1} - e^{\theta\tau} \right|.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Для доказательства теоремы 2 мы будем использовать результаты из [1], установленные для последовательности $\{x_n^n(t)\}$, составленной из последних компонент решений задач Коши для систем вида (1.1) с нулевыми начальными условиями. Именно, имеет место равномерная сходимость

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $y(t)$ – решение начальной задачи (2.3), при этом

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \gg 1.$$

Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$|x_n^n(t) - \bar{x}_n^n(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оценим разность $x_n^n(t) - \bar{x}_n^n(t)$. Для $x_n^n(t)$ справедливо соотношение

$$x_n^n(t) = \int_0^t \psi_n^0(t, s) g(s, x_n^n(s)) ds,$$

где $\psi_n^0(t, s)$ совпадает с $\psi_n(t, s)$ при $\rho = 0$. Из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} x_n^n(t) - \bar{x}_n^n(t) &= \int_0^t (\psi_n^0(t, s) - \psi_n(t, s)) g(s, x_n^n(s)) ds + \\ &+ \int_0^t \psi_n(t, s) (g(s, x_n^n(s)) - g(s, \bar{x}_n^n(s))) ds = \\ &= I_n^1(t) + I_n^2(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Рассмотрим первый интеграл $I_n^1(t)$. Возьмем произвольно $\delta \in (0, 1/2)$. Тогда из следствия 2 при $0 \leq t - s \leq \tau(1-\delta)$ и n , удовлетворяющих (3.5) и (3.6), вытекает неравенство

$$\max_{t \in [0, \tau(1-\delta)]} |I_n^1(t)| \leq \frac{\tau G(1-\delta)}{\sqrt{n-1} \delta}. \quad (4.2)$$

Из следствий 1 и 2 при указанных n получаем оценку

$$\max_{t \in [\tau(1-\delta), \tau(1+\delta)]} |I_n^1(t)| \leq \frac{\tau G(1-\delta)}{\sqrt{n-1} \delta} + 8Ge^{0\tau} \tau \delta. \quad (4.3)$$

Оценим теперь $I_n^1(t)$ на отрезке $[\tau(1+\delta), T]$. Запишем его в виде

$$I_n^1(t) = \int_0^{t-\tau(1+\delta)} \left(\left(\psi_n^0(t, s) - e^{-\theta(t-s-\tau)} \right) - \left(\psi_n(t, s) - e^{-\theta(t-s-\tau)} \right) \right) g(s, x_n^n(s)) ds + \int_{t-\tau(1+\delta)}^t \left(\psi_n^0(t, s) - \psi_n(t, s) \right) g(s, x_n^n(s)) ds.$$

Для второго слагаемого, очевидно, справедлива оценка (4.3). Для первого слагаемого воспользуемся оценкой из следствия 3. Таким образом, при n , удовлетворяющих (3.5)–(3.8), выполнено неравенство

$$\max_{t \in [\tau(1+\delta), T]} |I_n^1(t)| \leq \frac{2GT}{\sqrt{n-1} \delta} + 8Ge^{0\tau} \tau \delta + 2GA_n \frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}. \quad (4.4)$$

Из оценок (4.2)–(4.4) для первого слагаемого в (4.1) получаем

$$\max_{t \in [0, T]} |I_n^1(t)| \leq \frac{2GT}{\sqrt{n-1} \delta} + 8Ge^{0\tau} \tau \delta + 2GA_n \frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma > 1/2$. Положим, $\delta = (n-1)^{-1/4}$. Тогда, очевидно, найдется $n_0(\gamma) > 0$ такое, что для $n > n_0(\gamma)$ выполнены неравенства (3.5)–(3.8). В этом случае из оценки (4.5) следует

$$\max_{t \in [0, T]} |I_n^1(t)| \leq \frac{c}{(n-1)^{1/4}}. \quad (4.6)$$

Если $0 < \gamma \leq 1/2$, тогда при выборе δ существенную роль играют неравенства (3.6) и (3.8), которые накладывают ограничения вида $(n-1)^\gamma > c_1 \delta^{-2}$. Положив $\delta = \sqrt{2c_1} (n-1)^{-\gamma/2}$, из (4.5) получаем оценку

$$\max_{t \in [0, T]} |I_n^1(t)| \leq \frac{c}{(n-1)^{\gamma/2}}. \quad (4.7)$$

Таким образом, при всех $\gamma > 0$ имеем $\max_{t \in [0, T]} |I_n^1(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Из (4.1) в силу условия Липшица получаем неравенство

$$|x_n^n(t) - \bar{x}_n^n(t)| \leq \max_{s \in [0, T]} |I_n^1(s)| + 2e^{0\tau} L \int_0^t |x_n^n(s) - \bar{x}_n^n(s)| ds.$$

Используя неравенство Гронуолла, имеем

$$|x_n^n(t) - \bar{x}_n^n(t)| \leq \max_{s \in [0, T]} |I_n^1(s)| e^{Mt}, \quad M = 2e^{0\tau} L.$$

Как отмечалось выше, последовательность $\{x_n^n(t)\}$ на отрезке $[0, T]$ равномерно сходится к решению начальной задачи (2.3). Тогда из полученной оценки вытекает равномерная сходимость (2.2).

Оценки, указанные в теоремах 3, 4, вытекают из (4.6) и (4.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихошвай В.А., Фадеев С.И., Демиденко Г.В., Матушкин Ю.Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1. С. 73-94.
2. Демиденко Г.В., Лихошвай В.А. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. № 3. С. 538-552.
3. Demidenko G.V., Khropova Yu.E., Kotova T.V. On one class of infinite-order systems of differential equations and on delay differential equations // Proceedings of the Fifth International Conference on Bioinformatics of Genome Regulation and Structure (Novosibirsk, Russia, 2006, July 16-22.). Novosibirsk: Institute of Cytology and Genetics, 2006. V. 3. P. 29-32.
4. Demidenko G.V., Khropova Yu.E. On properties of solutions of one delay differential equation // Proceedings of the Fifth International Conference on Bioinformatics of Genome Regulation and Structure (Novosibirsk, Russia, July 16-22, 2006). Novosibirsk: Institute of Cytology and Genetics, 2006. V. 3. P. 38-42.
5. Демиденко Г.В., Лихошвай В.А., Котова Т.В., Хропова Ю.Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47. № 1. С. 58-68.
6. Мудров А.В. О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7. Вып. 2. С. 57-69.
7. Демиденко Г.В., Лихошвай В.А., Мудров А.В. О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 34-46.
8. Демиденко Г.В., Мельник И.А., Хропова Ю.Е. Уравнения с запаздывающим аргументом в задачах многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2009. 26 с. (Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. № 233).
9. Демиденко Г.В., Мельник И.А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 3. С. 528-546.
10. Demidenko G.V., Kotova T.V. Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // Analyses Applied. 2010. V. 8. №. 2. P. 63-74.
11. Котова Т.В., Мельник И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами. Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. № 253).
12. Матвеева И.И., Мельник И.А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений большой размерности. Новосибирск, 2011. 17 с. (Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. № 261).
13. Лихошвай В.А., Фадеев С.И., Штокало Д.Н. Об исследовании нелинейных моделей многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2010. 37 с. (Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. № 246).
14. Ващенко Г.В., Новиков Е.А. Параллельная реализация явного метода Эйлера с контролем точности вычислений // Журнал СФУ. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4. № 1. С. 70-76.

БЛАГОДАРНОСТИ: Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г.В. Демиденко и кандидату физико-математических наук И.И. Матвеевой за полезные дискуссии и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 107).

Поступила в редакцию 11 августа 2011 г.

Melnik I.A. ON ONE NONLINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS MODELING MULTISTAGE SUBSTANCE SYNTHESIS

We consider a nonlinear system of ordinary differential equations of a large dimension. We study properties of its solutions and prove that the last component of the solution to the system for sufficiently large dimension is an approximate solution to a delay differential equation.

Key words: systems of ordinary differential equations; large dimension; limit theorems; delay differential equation.