

УДК 517.911, 517.968

АПРИОРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ И НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ МНОЖЕСТВА ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ

© А.И. Булгаков, Е.В. Малютина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: управляемая импульсная система; зависимость от параметров; фазовые ограничения по управлению; априорная ограниченность; дифференциальное включение с импульсными воздействиями.

Для множества фазовых траекторий управляемой импульсной системы с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием сформулировано свойство непрерывной зависимости от параметров.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное векторное пространство с нормой $|\cdot|$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $V_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon)$ — замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ радиусом $\varepsilon > 0$; K — метрическое пространство; $V_K(\xi_0, \varepsilon)$ — замкнутый шар пространства K с центром в точке $\xi_0 \in K$ радиусом $\varepsilon > 0$.

Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Тогда $h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U] = \sup_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1; U] = \max\{h^+[U_1; U]; h^+[U; U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_p < b$) — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_p, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, p$, с нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть заданы непрерывная, локально ограниченная функция $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу, локально ограниченное многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием и импульсными воздействиями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t), \xi), \quad t \in [a, b], \quad \xi \in K \\ u(t) &\in U(t, x(t), \xi), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \dots, p, \quad (2)$$

$$x(a) = x_0 \quad (x_0 \in \mathbb{R}^n), \quad (3)$$

где отображения $I_k : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Под *допустимым управлением на отрезке* $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$) системы (1)–(3) при $\xi \in K$ будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой существует кусочно-непрерывная функция $x : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяющая при всех $t \in [a, \tau]$ представлению

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s), u(s), \xi) ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \chi_{(t_k, \tau]}(t) \Delta(x(t_k)), \quad (4)$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, \dots, p$, удовлетворяют равенствам (2), что при почти всех $t \in [a, \tau]$ выполняется включение

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi). \quad (5)$$

Пару (u, x) будем называть *допустимой на отрезке* $[a, \tau]$. Систему (1)–(3) будем называть *управляемой импульсной системой с фазовыми ограничениями по управлению*, поскольку управление $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ зависит от фазовой траектории $x : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Отметим, что в силу теоремы об измеримом выборе [1–3] управляемая система (1)–(2) с начальным состоянием (3) эквивалентна при каждом фиксированном $\xi \in K$ задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in f(t, x(t), U(t, x(t), \xi), \xi), \quad t \in [a, \tau] \quad (6)$$

с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3).

Включение (6) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) будем называть дифференциальным включением, порожденным управляемой импульсной системой (1)–(2) с начальным состоянием (3). Задача (6), (2), (3) описывает все множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(2).

Пусть $H(x_0, \tau, \xi)$ — множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы (1)–(2) с начальным состоянием (3) на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$). Обозначим $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ — множество всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(2) с начальным состоянием (3) на отрезке $[a, \tau]$.

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{B} \in K$. Будем говорить, что множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(2) с начальным состоянием (3) *априорно ограничено в совокупности на множестве* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ и любых $(x_0, \xi) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ не существует $x \in \tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$, для которого выполняется неравенство $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > r$.

Используя результаты работ [4–10] можно доказать следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Пусть множество всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(2) априорно ограничено в точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times K$. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau, \xi) \neq \emptyset$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(2) с начальным состоянием $x(a) = x_0$ априорно ограничено в совокупности на множестве $V_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times V_K(\xi_0, \varepsilon)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ обладают свойством Ω , если найдутся непрерывные отображения $\omega_1 : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times K \rightarrow [0, \infty)$, $\omega_2 : [a, b] \times [0, \infty) \times K \rightarrow [0, \infty)$, неубывающие при любых $t \in [a, b]$, $\xi \in K$ такие, что для любых $t \in [a, b]$, $\xi \in K$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$|f(t, x_1, u_1, \xi) - f(t, x_2, u_2, \xi)| \leq \omega_1(t, |x_1 - x_2|, |u_1 - u_2|, \xi), \quad (7)$$

$$h[U(t, x_1, \xi), U(t, x_2, \xi)] \leq \omega_2(t, |x_1 - x_2|, \xi). \quad (8)$$

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ и импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$, обладают свойством $\mathcal{A}$ в точке $\xi \in K$, если

1) отображения f , U обладают свойством Ω ;

2) для каждого $k = 1, 2, \dots, p$ найдется непрерывная функция $\tilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \times K \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, неубывающая по первому аргументу при $\xi \in K$ и удовлетворяющая равенству $\tilde{I}_k(0, \xi) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x, \xi) - I_k(y, \xi)| \leq \tilde{I}_k(|x - y|, \xi);$$

3) задача $\dot{y}(t) = \varphi(t, y(t), \xi)$, $\Delta(y(t_k)) = \tilde{I}_k(y(t_k), \xi)$, $k = 1, \dots, p$, $y(a) = 0$ имеет только нулевые локальные решения
здесь функция $\varphi : [a, b] \times [0, \infty) \times K \rightarrow [0, \infty)$ определена равенством

$$\varphi(t, y, \xi) = \omega_1(t, y, \omega_2(t, y, \xi), \xi),$$

где функции $\omega_1 : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times K \rightarrow [0, \infty)$, $\omega_2 : [a, b] \times [0, \infty) \times K \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяют неравенствам (7), (8) соответственно.

Т е о р е м а 2. Пусть отображения $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ и импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, обладают свойством $\mathcal{A}$ в точке $\xi_0 \in K$ и пусть множество всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)–(3) априорно ограничено в точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times K$. Тогда

1) для любого $y \in \tilde{H}(x_0, b, \xi_0)$ и любых последовательностей $x_i \in V_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon)$, $\xi_i \in V_K(\xi_0, \varepsilon)$ $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям $x_i \rightarrow x_0$ в $\mathbb{R}^n$, $\xi_i \rightarrow \xi_0$ в K при $i \rightarrow \infty$, найдется такая последовательность $y_i \in \tilde{H}(x_i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$, что $y_i \rightarrow y$ в пространстве $\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, где число $\varepsilon > 0$ удовлетворяет теореме 1;

2) для любой последовательности $y_i \in \tilde{H}(x_i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$, имеющей предел $\tilde{y}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, найдется такая последовательность $z_i \in \tilde{H}(x_0, b, \xi_0)$, $i = 1, 2, \dots$, что $z_i \rightarrow \tilde{y}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. и мех. 1959. № 2. С. 25–32.
2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
3. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. // Екатеринбург УГТУ-УПИ. 2010.
4. Булгаков А.И., Панасенко Е.А., Сергеева А.О. Продолжаемость допустимых пар управляемой системы с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием // Вестник ТГУ. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1645–1647.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.
6. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Ч. I–VI // Вестник Тамб. ун-та. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.
7. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
8. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
9. Красовский Н.Н. Управление динамической системой // М.: Наука, 1985.
10. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09–01–97503, № 11–01–00645, № 11–01–00626), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V. A priori boundedness and continuous dependence on parameters of a set of phase trajectories of a controllable pulse system with constraints by control. We find conditions of continuous dependence on parameters for the set of the phase trajectories of the controllable impulse delay system with constraints by control.

Key words: controllable impulse system; dependence on parameters; constraints by control; a priori boundedness, differential inclusion with impulses.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

Малютина Елена Валерьевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zont85@mail.ru.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

УДК 517.93

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА δ -РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© А. И. Булгаков, В. В. Скоморохов, О. В. Филиппова

Ключевые слова: дифференциальные включения с импульсными воздействиями; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ -решение.

В работе дано определение приближенного решения (δ -решения) дифференциального включения с импульсными воздействиями, установлены асимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений с внешними возмущениями. Найдено необходимое и достаточное условие устойчивости аппроксимации дифференциальных включений относительно внешних возмущений.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $B_X[x, \varepsilon]$ — открытый шар пространства X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$. Пусть $U \subset X$. Тогда $\bar{U}$ — замыкание множества U ; $\text{co} U$ — выпуклая оболочка множества U ; $h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U] \equiv \sup_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ — полуклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1; U] = \max\{h^+[U_1; U]; h^+[U; U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathcal{U} \in [a, b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$