УДК 517.98

Канонические представления для гиперболоидов: взаимодействие с надалгеброй [1]

© В. Ф. Молчанов

Ключевые слова: гиперболоиды, надгруппы, канонические представления, преобразования Пуассона и Фурье.

Для канонических представлений на гиперболоидах вычислено в явном виде взаимодействие преобразований Пуассона с надалгеброй (алгеброй Ли группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$).

Мы исследуем взаимодействия преобразований Пуассона и Фурье, связанных с каноническими представлениями группы $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ на гиперболоиде $\mathcal{X} = G/H$, где $H = \mathrm{SO}_0(p,q-1)$, и операторов Ли надгруппы $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, то есть операторов, отвечающих в каноническиях представлениях элементам из алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$ надгруппы $\widetilde{G}$.

Вообще, задачу о взаимодействии можно рассматривать как некоторую версию классической задачи о действии группы (алгебры Ли) в базисе, диагональном для некоторой подгруппы. Ее достоинство, в частности, состоит в том, что при решении не нужно использовать крайне трудную теорему Планшереля. Тем не менее, даже в рамках этой версии вычисление явных формул представляет собой весьма тяжелую аналитическую задачу. Эта версия была обнаружена в [2], [3] – для плоскости Лобачевского с надгруппой $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Для гиперболоида $\mathcal{X}$ и надгруппы $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(p+1,q)$ формулы взаимодействия были получены в [4], [5]. Гиперболоид с надгруппой $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ был рассмотрен в [6] для частного случая $q = 1$ (тогда гиперболоид есть пространство Лобачевского). Сейчас мы рассматриваем общий случай: $p > 1$, $q > 1$, он значительно сложнее указанного частного случая.

Основную роль играют формулы для одного специального элемента Y_0 из надалгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$, см. ниже (3). Ими мы и ограничиваемся в настоящей заметке. Для других $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ формулы получаются с помощью соотношений коммутации. Отметим, что формулы взаимодействия для элементов из алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$, не входящих в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G, содержат дифференциальные операторы *четвертого* порядка.

Преобразования Фурье двойственны преобразованиям Пуассона, это дает возможность написать формулы взаимодействия для преобразования Фурье.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

Комментарии по поводу вида коэффициентов a, b, c в теореме 1 и связи с граничными представлениями – точно такие же, что и в [3–6].

Группа $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, $n = p+q$, сохраняющих билинейную форму

$$[x,y] = -x_1y_1 - \ldots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \ldots + x_ny_n.$$

Подгруппа K в G, состоящая из элементов $g \in G$, перестановочных с матрицей I этой формы, является максимальной компактной подгруппой в G. Она изоморфна $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$.

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает гиперболоид $[x,x] = 1$. Это – однородное пространство группы G относительно сдвигов $x \mapsto xg$. Стационарная подгруппа H точки $x^0 = (0,\ldots,0,1)$ есть $\mathrm{SO}_0(p,q-1)$. Мы будем использовать новую реализацию гиперболоида $\mathcal{X}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$|x| = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Сопоставим точке $x \in \mathcal{X}$ точку $y = x/|x|$. Полученное множество $\mathcal{Y}$ есть прямое произведение единичного шара $B \subset \mathbb{R}^p$ и единичной сферы $S_2 \subset \mathbb{R}^q$. Они задаются следующим образом. Разобьем координаты точки $y \in \mathcal{Y}$ на две группы и запишем эту точку в виде: $y = (u_1,\ldots,u_p,v_{p+1},\ldots,v_n)$, так что она есть пара $y = (u,v)$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$. Тогда $B \subset \mathbb{R}^p$ есть шар $u_1^2 + \ldots + u_p^2 < 1$, а $S_2 \subset \mathbb{R}^q$ есть сфера $v_{p+1}^2 + \ldots + v_n^2 = 1$.

Обозначим стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^p$ через $\langle u,w\rangle$ и обозначим через $|u|$ соответствующую норму. Точно те же обозначения введем и в $\mathbb{R}^q$. Обозначим

$$a = 1 - \langle u,u\rangle. \tag{1}$$

Напомним [1] некоторый материал о представлениях $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,1$, группы G, связанных с конусом.

Обозначим через S сечение конуса $[x,x] = 0$, состоящее из точек s таких, что $|s| = 1$. Как и выше, запишем точку $s \in S$ в виде $s = (\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta_{p+1},\ldots,\eta_n)$, так что она есть пара $s = (\xi,\eta)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, $\eta \in \mathbb{R}^q$. Сечение S есть прямое произведение двух единичных сфер $S_1 \subset \mathbb{R}^p$ и $S_2 \subset \mathbb{R}^q$, задаваемых уравнениями $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$, соответственно. Пусть Δ_1 и Δ_2 – операторы Лапласа–Бельтрами на S_1 и S_2, соответственно. Пусть ds – евклидова мера на S. Обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ пространство функций φ из $\mathcal{D}(S)$ четности ε:

$$\varphi(-s) = (-1)^\varepsilon \varphi(s).$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует в нем по формуле

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{|sg|}\right) \cdot |sg|^\sigma.$$

Если σ – не целое, то $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо и эквивалентно $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$.

Максимально вырожденная серия представлений $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, надгруппы $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ устроена следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(tx) = t^{-\lambda-n,\nu} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

мы используем обозначение $t^{\mu,\nu} = |t|^\mu \operatorname{sgn}^\nu t$. Представление $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$ действует в нем сдвигами. Реализуем это пространство на многообразии $\widetilde{\mathcal{Y}}$ в $\mathbb{R}^n$, определяемое условием $|y| = 1$ (оно содержит $\mathcal{Y}$), ограничивая функции на $\widetilde{\mathcal{Y}}$. Мы получаем некоторое пространство $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\widetilde{\mathcal{Y}})$ функций f на $\widetilde{\mathcal{Y}}$ четности ν. Представление $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$ действует в нем следующим образом:

$$\bigl(\widetilde{R}_{\lambda,\nu}(g) f\bigr)(y) = f\left(\frac{yg}{|yg|}\right) \ |yg|^{-\lambda-n}, \quad g \in \widetilde{G}. \tag{2}$$

Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$ группы G получаются как ограничения на G и на $\overline{\mathcal{Y}}$ представлений $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$. Они действуют в пространстве $\mathcal{D}_\nu(\overline{\mathcal{Y}})$ функций из $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{Y}})$ четности ν в точности по формуле (2). Их можно распространить на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\overline{\mathcal{Y}})$ обобщенных функций четности ν.

Алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$ группы $\widetilde{G}$ состоит из матриц $X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ с нулевым следом. Она распадается в прямую сумму $\mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, где подпространства $\mathfrak{g}$ (алгебра Ли группы G) и $\mathfrak{m}$ выделяются уравнениями $X' = -IXI$ и $X' = IXI$, соответственно (штрих означает транспонирование).

Дифференциальные операторы $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}(X)$ не зависят от ν, поэтому мы опускаем ν в обозначении и пишем $\widetilde{R}_\lambda(X)$. Их можно рассматривать как дифференциальные операторы на $\mathcal{Y}$. В частности, возьмем следующий элемент из $\mathfrak{m}$:

$$Y_0 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} qE_p & 0 \\ 0 & -pE_q \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где E_l – единичная матрица порядка l. Он образует базис в централизаторе группы K в $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Мы имеем

$$\widetilde{R}_\lambda(Y_0) = \sum_{k=1}^{p} u_k \frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{p}{n}(\lambda + n).$$

Рассмотрим оператор $P_{\lambda,\nu,\sigma} : \ \mathcal{D}_\nu(S) \to C^\infty(\mathcal{Y})$, задаваемый формулой

$$(P_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi)(y) = a^{(-\lambda-\sigma-n)/2} \int_S [y,s]^{\sigma,\nu} \varphi(s)\, ds,$$

где a дается формулой (1). Этот оператор сплетает $T_{2-n-\sigma,\nu}$ с $R_{\lambda,\nu}$. Назовем его *преобразованием Пуассона, связанным с каноническим представлением* $R_{\lambda,\nu}$. Полюсы преобразования Пуассона по σ, зависящие от λ, располагаются в точках

$$\sigma = \lambda - 2k, \quad \sigma = 2 - n - \lambda + 2l, \quad k,\, l \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 *Пусть σ – не полюс преобразования Пуассона $P_{\lambda,\nu,\sigma}$. Оператор $\widetilde{R}_\lambda(X)$, $X \in \mathfrak{m}$, взаимодействует с этим преобразованием следующим образом:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_\lambda(X)P_{\lambda,\nu,\sigma} &= a(\lambda,\sigma)P_{\lambda,\nu,\sigma+2}\,K_\sigma(X)\\
&+ b(\lambda,\sigma)P_{\lambda,\nu,\sigma}\,E_\sigma(X)\\
&+ c(\lambda,\sigma)P_{\lambda,\nu,\sigma-2}\,C(X),
\end{aligned}$$

где коэффициенты a, b, c даются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
a(\lambda,\sigma) &= \frac{\lambda+\sigma+n}{(\sigma+1)(\sigma+2)(2\sigma+n-2)(2\sigma+n)},\\
b(\lambda,\sigma) &= \frac{2\lambda+n}{(2\sigma+n-4)(2\sigma+n)},\\
c(\lambda,\sigma) &= \frac{(\lambda-\sigma+2)\sigma(\sigma-1)}{(2\sigma+n-4)(2\sigma+n-2)},
\end{aligned}$$

а $K_\sigma(X)$, $E_\sigma(X)$, $C(X)$ – дифференциальные операторы на S порядка $4, 2, 0$, соответственно (оператор $C(X)$ не зависит от σ), линейно зависящие от $X \in \mathfrak{m}$; для элемента Y_0 эти операторы имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
K_\sigma(Y_0) &= (\Delta_1-\Delta_2)^2\\
&+ (2\sigma^2+2n\sigma+nq+2(p-q))\Delta_1\\
&+ (2\sigma^2+2n\sigma+np-2(p-q))\Delta_2\\
&+ (\sigma+2)(\sigma+p)(\sigma+q)(\sigma+n-2).\\
E_\sigma(Y_0) &= \Delta_1-\Delta_2+\frac{p-q}{n}\,\sigma(\sigma+n-2),\\
C(Y_0) &= 1.
\end{aligned}$$

Литература

1. В. Ф. Молчанов. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Матем. сб., 1970, том 81, № 3, 358–375.

2. V. F. Molchanov. Canonical representations and overgroups. Preprint Math. Inst. Univ. Leiden, No. MI 2002-05 (2002).

3. V. F. Molchanov. Canonical representations and overgroups. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2 (Adv. Math. Sci. – 54), 2003, vol. 210, 213–224.

4. V. F. Molchanov. Canonical representations and overgroups for hyperboloids of one sheet and Lobachevsky spaces. Acta Appl. Math. 2005, vol. 86, 115–129.

5. В. Ф. Молчанов. Канонические представления и надгруппы для гиперболоидов. Функц. анализ и его прил., 2005, том 39, вып. 4, 48–61.

6. V. F. Molchanov. Canonical representations on Lobachevsky spaces: an interaction with an overalgebra. Acta Appl. Math. 2007, vol. 99, 321–337.

V. F. Molchanov. Canonical representations for hyperboloids: an interaction with an overalgebra. For canonical representations on hyperboloids, an interaction of Poisson transforms with an overalgebra is determined explicitly (the overalgebra is the Lie algebra of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$).
Keywords: hyperboloids, overgroups, canonical representations, Poisson and Fourier transforms.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Конечномерный анализ на однополостном гиперболоиде [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова

Ключевые слова: гиперболоид, тензорные произведения, преобразования Пуассона и Фурье, формула Планшереля.

Тензорное произведение двух неприводимых конечномерных представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ реализуется как представление группы G в функциях на однополостном гиперболоиде в $\mathbb{R}^3$. Дается разложение этого представления в терминах гиперболоида.

В построении [2] полиномиального квантования на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$ существенную роль играл конечномерный анализ на этом гиперболоиде, то есть разложение на неприводимые составляющие представлений группы G сдвигами в многочленах на $\mathcal{X}$. Эти представления могут быть рассматриваемы как конечномерный аналог канонических представлений. Такие представления появляются, когда мы умножаем тензорно неприводимые конечномерные представления π_l группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на их контраградиентные представления $\widehat{\pi}_l$. В настоящей работе мы хотим изучить в таком же духе тензорные произведения $\pi_l \otimes \widehat{\pi}_m$, $l \neq m$.

Группа $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.