УДК 517. 928. 4

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЧЕРЕЗ КОФ И СОФ

© В.И. Фомин

Fomin V.I. About the representation of the solution of the Cauchy problem for linear differential equation of the second order in Banach space via COF and SOF. Formula for solution of the Cauchy problem by means of exponential cosine and sine operator – function is suqqested.

В банаховом пространстве E изучается задача Коши

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t),\ 0 \le t < \infty, \tag{1}$$
$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u'_0, \tag{2}$$

где $B, C \in L(E)$; $f(t) \in C([0,\infty); E)$.

Пусть операторный дискриминант $D = B^2 - 4C$ удовлетворяет следующим условиям:

$$D = F^2, \tag{3}$$
$$BF = FB, \tag{4}$$

где $F \in GL(E) = \{Q \in L(E) \mid \exists\, Q^{-1} \in L(E)\}$.

Рассмотрим экспоненциальные косинус и синус оператор-функции с производящим оператором $\frac{1}{4}F^2$:

$$C(t) = C(t, \frac{1}{4}F^2) = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}Ft} + e^{-\frac{1}{2}Ft}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} D^k}{2^{2k}(2k)!},$$

$$S(t) = S(t, \frac{1}{4}F^2) = F^{-1}(e^{\frac{1}{2}Ft} - e^{-\frac{1}{2}Ft}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} D^k}{2^{2k}(2k+1)!}$$

Заметим, что

$$C(0) = I,\ S(0) = 0; \tag{5}$$
$$C'(t) = \frac{1}{4}F^2 S(t),\ S'(t) = C(t); \tag{6}$$
$$C''(t) = \frac{1}{4}F^2 C(t),\ S''(t) = \frac{1}{4}F^2 S(t). \tag{7}$$

Т е о р е м а. При выполнении условий (3), (4) задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}Bt}[C(t)u_0 + S(t)(u'_0 + \frac{1}{2}Bu_0) +$$
$$+ \int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau]. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5) функция (8) удовлетворяет начальному условию $u(0) = u_0$. Далее,

$$u'(t) = -\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}Bt}[C(t)u_0 + S(t)(u'_0 + \frac{1}{2}Bu_0) +$$
$$+ \int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau] +$$
$$+ e^{-\frac{1}{2}Bt}[C'(t)u_0 + S'(t)(u'_0 + \frac{1}{2}Bu_0) +$$
$$+ \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau],$$

или

$$u'(t) = -\frac{1}{2}Bu(t) +$$
$$+ e^{-\frac{1}{2}Bt}[C'(t)u_0 + S'(t)(u'_0 + \frac{1}{2}Bu_0) + \tag{9}$$
$$+ \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau].$$

В силу (5), (6) функция (8) удовлетворяет начальному условию $u'(0) = u'_0$. Вычислим $u''(t)$:

$$u''(t) = -\frac{1}{2}Bu'(t) - \frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}Bt} \times$$

$$\times[C'(t)u_0 + S'(t)(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0) +$$

$$+\int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau] +$$

$$+e^{-\frac{1}{2}Bt}[C''(t)u_0 + S''(t)(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0) +$$

$$+\int_0^t S''(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)d\tau + e^{\frac{1}{2}Bt} f(t)].$$

В силу (4), (7), (9)

$$u''(t) = -\frac{1}{2}Bu'(t) - \frac{1}{2}B(u'(t) + \frac{1}{2}Bu(t)) +$$

$$+\frac{1}{4}F^2u(t) + f(t),$$

или, учитывая равенство $F^2 - B^2 = -4C$, $u''(t) = f(t) - Bu'(t) - Cu(t)$.

Тогда

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t) - Bu'(t) - Cu(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Решение (8) можно записать в виде

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}Bt}[C(t)u_0 + S(t)(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0)] +$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)e^{-\frac{1}{2}B(t-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

З а м е ч а н и е 2. В терминах корней $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(-B-F)$, $\Lambda_2 = \frac{1}{2}(-B+F)$ характеристического уравнения $\Lambda^2 + B\Lambda + C = 0$ решение задачи (1), (2) получено в [1] – [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* // О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве: Тез. докл. / «Понтрягинские чтения – XI». Воронеж: Изд-во ВГУ, 2000.
2. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве (на англ. яз.) // Вестн. ТГТУ. 2000. Т. 6. № 4. С. 643-646.
3. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1140-1141.

Поступила в редакцию 15 мая 2003 г.