6. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.

7. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 2 // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1262-1267.

8. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 6 // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1290-1296.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №№ 09-01-97503, 11-01-00626, 11-01-00645), Министерства образования и науки РФ (АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы) проект № 2.1.1/9359; ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы госконтракты №№ П688, 14.740.11.0682, 14.740.11.0349; темплан 1.8.11).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V. A-priori boundedness of solutions to functional-differential inclusions with upper semicontinuous right-hand side and with multivalued impulses. For the Cauchy problem for a functional-differential inclusion with multivalued impulses the conditions of compactness and connectness of the solution set are formulated.

Keywords: functional-differential inclusion; multivalued impulses, a-priori boundedness.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Малютина Елена Валерьевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zont85@bk.ru

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911, 517.968

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© А.И. Булгаков, Е.В. Малютина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: управляемая импульсная система с фазовыми ограничениями по управлению, априорная ограниченность, дифференциальное включение с импульсными воздействиями.

Для управляемых импульсных систем с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием рассмотрены вопросы продолжаемости допустимых пар. Получены оценки допустимых траекторий, аналогичные оценкам В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппова. Сформулировано определение допустимой квазитраектории. Получены достаточные условия выполнения принципа плотности для рассматриваемой системы.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $|\ |$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ ($\text{conv}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}_{[a,b]}}=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty[a,b]}=\text{vraisup}\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$. Пусть $A\subset\text{comp}[\mathbb{R}^n]$. Обозначим $|A|=\max\{|a|:a\in A\}$, $\text{co}\,A$ — выпуклая замкнутая оболочка множества A.

Пусть $t_k\in[a,b]$ $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2],\ldots,(t_m,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|:\ t\in[a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ — множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$.

Пусть заданы непрерывная функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\text{conv}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием и импульсными воздействиями

$$\begin{array}{llll}\dot{x}=f(t,x[p(t)],u(t)), & x(t)=\varphi(t), & \text{если} & p(t)<a,\quad t\in[a,b],\\ u(t)\in U(t,x[g(t)]), & x(t)=\psi(t), & \text{если} & g(t)<a,\end{array}\tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k))=I_k(x(t_k)),\ k=1,\ldots,m,\tag{2}$$

$$x(a)=x_0\ \ (x_0\in\mathbb{R}^n),\tag{3}$$

где непрерывные функции $\varphi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$, $\psi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ ограничены, а непрерывные функции $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ для любого $t\in[a,b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t)\leqslant t$, $g(t)\leqslant t$. Отображения $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,...,m$, непрерывны, $\Delta x(t_k)=$ $=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=1,2,...,m$.

Пусть $\tau\in[a,b]$. Определим непрерывные операторы $\mathcal{P}_\tau:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,\tau]$, $\mathcal{G}_\tau:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,\tau]$ равенствами

$$(\mathcal{P}_\tau x)(t)=\begin{cases}x[p(t)], & \text{если}\ \ p(t)\in[a,\tau],\\ \varphi[p(t)], & \text{если}\ \ p(t)<a,\end{cases}\tag{4}$$

$$(\mathcal{G}_\tau x)(t)=\begin{cases}x[g(t)], & \text{если}\ \ g(t)\in[a,\tau],\\ \psi[g(t)], & \text{если}\ \ g(t)<a.\end{cases}\tag{5}$$

Под *допустимым управлением* на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau\in(a,b])$ системы (1)-(2) будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u:[a,\tau]\to\mathbb{R}^m$, для которой существует кусочно-непрерывная функция $x:[a,\tau]\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при всех $t\in[a,\tau]$ представлению

$$x(t)=x_0+\int\limits_a^t f(s,(\mathcal{P}_\tau x)(s),u(s))ds+\sum_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)),\tag{6}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k=1,...m$ удовлетворяют равенствам (2), что при почти всех $t\in[a,\tau]$ выполняется включение

$$u(t)\in U(t,(\mathcal{G}_\tau x)(t)).\tag{7}$$

Пару (u,x) будем называть *допустимой* на отрезке $[a,\tau]$. Систему (1)-(2) будем называть *управляемой импульсной системой с фазовыми ограничениями по управлению*, поскольку выбор управления зависит от состояния управляемого объекта.

Отметим, что в силу теоремы об измеримом выборе (см. [1]–[3]) управляемая система (1)-(2) с начальным состоянием (3) эквивалентна задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in f(t, (P_\tau x)(t),\ U(t, (G_\tau x)(t))),\ t \in [a, \tau], \tag{8}$$

с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3), где операторы $P_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to \mathbf{L}^n_\infty[a, \tau]$, $G_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to \mathbf{L}^n_\infty[a, \tau]$ определены равенствами (4), (5) соответственно.

Включение (8) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) будем называть дифференциальным включением, порожденным управляемой импульсной системой (1)-(2) с начальным состоянием (3). Задача (8), (2), (3) описывает все множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)-(2).

Допустимую пару (u_0, x_0) на отрезке $[a, \tau_0]$ $(\tau_0 \in (a, b))$ будем называть *продолжаемой*, если найдется такая допустимая пара (u_1, x_1) на отрезке $[a, \tau_1]$ $(\tau_1 \in (\tau, b])$, что $u_1 = u_0$ и $x_1 = x_0$ на $[a, \tau_0]$.

Будем говорить, что (u, x) — *допустимая пара на интервале* $[a, c)$ $(c \in (a, b))$, если функция $u : [a, c) \to \mathbb{R}^m$ измерима по Лебегу, для функции $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ при всех $t \in [a, \tau]$ $(\tau \in (a, c))$ имеет место представление (6) и для каждого $\tau \in [a, c)$ при почти всех $t \in [a, \tau]$ $(\tau \in (a, c))$ выполняется включение (7).

Будем говорить, что допустимая пара (u, x) на интервале $[a, c)$ $(c \in (a, b))$ *непродолжаема*, если не существует такой допустимой пары (u_1, x_1) на интервале $[a, c_1)$ $(c_1 \in (c, b])$, что $u_1 = u$ и $x_1 = x$ на $[a, c)$.

Допустимую пару управляемой импульсной системы (1)-(2) с начальным состоянием (3) на $[a, b]$ будем называть *непродолжаемой.*

Используя результаты работ [4]–[6] можно доказать следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Существует такое $\tau \in (a, b]$, для которого существует допустимая пара на отрезке $[a, \tau]$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть (u, x) — допустимая пара на интервале $[a, c)$ $(c \in (a, b))$, эта пара непродолжаема в том и только в том случае, когда $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} |x(t)| = \infty$.*

Т е о р е м а 3. *Любую допустимую пару на отрезке $[a, \tau]$ можно продолжить до непродолжаемой.*

Пусть $H(x_0, \tau)$ — множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы (1)-(2) с начальным состоянием (3) на отрезке $[a, \tau](\tau \in (a, b])$.

Будем говорить, что множество допустимых пар управляемой импульсной системы (1)–(2) с начальным состоянием (3) *априорно ограничено*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует допустимой пары $(u, x) \in H(x_0, \tau)$, для которой выполняется неравенство $\|x\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} > r$.

Т е о р е м а 4. *Пусть множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы (1)-(2) с начальным состоянием (3) априорно ограничено. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau) \neq \varnothing$ и существует такое $r > 0$, что для каждых $\tau \in (a, b]$, $(u, x) \in H(x_0, \tau)$ выполняется неравенство $\|x\|_{\widetilde{C}[a,\tau]} \leqslant r$.*

Определим отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F(t, x, y) = f(t, x, U(t, y)). \tag{9}$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством (9), и импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если

1) найдется непрерывное отображение $l : [a, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, не убывающее по второму аргументу, что для любых $t \in [a, b]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|F(t, x, y)| \leqslant l(t, |x| + |y|),$$

2) для каждого $k=1,2,\dots,m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k:\mathbb{R}^1_+\to\mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая для любого $x\in\mathbb{R}^n$ оценке

$$|I_k(x)|\le\widetilde{I}_k(|x|), \tag{10}$$

3) множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y}(t)=l(t,y(t)+\gamma),\ \Delta(y(t_k))=\widetilde{I}_k(y(t_k)),\ \ k=1,...m,\ y(a)=|x_0|$$

априорно ограничено, где $\gamma=\max\{\sup\limits_{t\in(-\infty,a)}|\varphi(t)|,\ \sup\limits_{t\in(-\infty,a)}|\psi(t)|\}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть отображение* $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *и импульсные воздействия* $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,...,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$. *Тогда для любого* $\tau\in(a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau)$ *непусто и существует такое* $r>0$, *что для любой пары* $(u,x)\in\in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|x\|_{\widetilde{C}[a,\tau]}\leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество фазовых траекторий, порожденных управляемой импульсной системой (1)-(2) с начальным состоянием (3) *почти реализует расстояние от любой суммируемой функции до значений решений включения* (8), если для любого $v\in\mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\varepsilon>0$ существует решение $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ включения (8) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3), что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|q(t)-v(t)|\leqslant\rho[v(t),f(t,(\mathcal{P}_bx)(t),U(t,(\mathcal{G}_bx)(t)))]+\varepsilon, \tag{11}$$

где $q(t)\equiv f(t,(\mathcal{P}_bx)(t),u(t))$ при всех $t\in[a,b]$ удовлетворяет равенству (6), непрерывные отображения $\mathcal{P}_b:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$, $\mathcal{G}_b:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ определены равенствами (4), (5) при $\tau=b$.

Если равенство (11) выполняется при $\varepsilon=0$, то будем говорить, что множество решений, порожденное управляемой системой (1), реализует расстояние.

Т е о р е м а 6. *Пусть множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы* (1)-(2) *с начальным состоянием* (3) *априорно ограничено. Тогда множество решений, порожденных управляемой импульсной системой* (1)-(2) *с начальным состоянием* (3), *почти реализует расстояние от любой суммируемой функции до значений решений включения* (8).

Если отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *выпуклозначно, то неравенство* (11) *выполняется при* $\varepsilon=0$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть отображение* $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *и импульсные воздействия* $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,...,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$. *Тогда множество решений, порожденных управляемой импульсной системой* (1)-(2) *с начальным состоянием* (3), *почти реализует расстояние от любой суммируемой функции до значений решений включения* (8).

Если отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *выпуклозначно, то неравенство* (11) *выполняется при* $\varepsilon=0$.

З а м е ч а н и е 1. *Из того, что управляемая импульсная система* (1)-(2) *с начальным состоянием* (3) *эквивалентна включению* (8) *с импульсными воздействиями* (2) *и начальным условием* (3), *вытекает, что если множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы* (1)-(2) *с начальным состоянием* (3) *априорно ограничено, то для любой функции* $v\in\boldsymbol{L}^n[a,b]$ *и любого* $\varepsilon>0$ *существует допустимая пара* $(u,x)\in\in H(x_0,b)$, *для которой при почти всех* $t\in[a,b]$ *выполняется неравенство*

$$|v(t)-f(t,(\mathcal{P}_bx)(t),u(t))|\leqslant\rho[v(t),f(t,(\mathcal{P}_bx)(t),U(t,(\mathcal{G}_bx)(t)))]+\varepsilon \tag{12}$$

и включение

$$u(t) \in U(t, (\mathcal{G}_b x)(t)), \tag{13}$$

где непрерывные отображения $\mathcal{P}_b : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to \boldsymbol{L}^n_\infty[a,b]$, $\mathcal{G}_b : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to \boldsymbol{L}^n_\infty[a,b]$ *определены равенствами* (4), (5) *при* $\tau = b$.

Если отображение $F : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *выпуклозначно, то неравенство* (12) *выполняется при* $\varepsilon = 0$, *при этом управление* $u : [a,b]\to\mathbb{R}^m$ *удовлетворяет включению* (13).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть заданы $\varepsilon, \delta \geqslant 0$, $\nu \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$. Будем говорить, что отображения $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* $\Omega^{\nu,\varepsilon,\delta}$, если найдутся непрерывные функции $\omega_1 : [a,b] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega_2 : [a,b] \times \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, неубывающие по последним аргументам при каждом фиксированном $t \in [a,b]$, что для любых $t \in [a,b]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)| \leqslant \omega_1(t, |x_1 - x_2|, |u_1 - u_2|), \tag{14}$$

$$h[U(t,x_1), U(t,x_2)] \leqslant \omega_2(t, |x_1 - x_2|). \tag{15}$$

При этом множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y}(t) = \nu(t) + \varepsilon + \omega(t, y(t)),\ \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)),\ \ k = 1,...m,\ y(a) = \delta \tag{16}$$

априорно ограничено. Здесь в равенствах (16) непрерывная функция $\omega : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ имеет вид

$$\omega(t,x) = \omega_1(t, x, \omega_2(t,x)), \tag{17}$$

где функции $\omega_1 : [a,b] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega_2 : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ удовлетворяют оценкам (14), (15) соответственно, $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ удовлетворяют соотношению (10).

Будем предполагать, что для функций $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{18}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяет равенству (2).

И пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}(t), f(t, (\mathcal{P}_b y)(t), U(t, (\mathcal{G}_b y)(t)))] \leq \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{19}$$

где непрерывные отображения $\mathcal{P}_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n_\infty[a,b]$, $\mathcal{G}_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ определены равенствами (4), (5) при $\tau = b$ соответственно, функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (18).

Т е о р е м а 7. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (18), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (19). *Далее, пусть отображения* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* $\Omega^{\nu,\varepsilon,\delta}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta = |x_0 - y(a)|$, x_0 *— начальное состояние* (3). *Тогда для любой допустимой пары* $(u,x) \in H(x_0, b)$ *управляемой системы* (1)-(2) *с начальным состоянием* x_0, *для которой выполняются соотношения* (12) *с* $v = \widetilde{q}$ *и* (13) *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa, \varepsilon, \delta), \tag{20}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + \omega(t, \xi(\varkappa, \varepsilon, \delta)(t)), \tag{21}$$

где функция $q(t) = f(t, (\mathcal{P}_b x)(t), u(t))$ *из равенства* (6), *функция* $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *удовлетворяет равенству* (18), *функция* $\xi(\varkappa, \varepsilon, \delta)$ *— верхнее решение задачи* (16) *при* $\nu = \varkappa$ *и* $\delta = |x_0 - y(a)|$, *функция* $\omega : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *имеет вид* (17).

Т е о р е м а 8. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (18), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (19). *Далее, пусть отображения* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* $\Omega^{\nu,\varepsilon,\delta}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta = |x_0 - y(a)|$, x_0 *— начальное состояние* (3) *и множество всех допустимых пар управляемой системы априорно ограничено. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *существует допустимая пара* $(u,x) \in H(x_0,b)$, *для которой справедливы оценки* (20), (21).

Если отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *выпуклозначно, то утверждение справедливо при* $\varepsilon = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть отображение* $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *и импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$ *и пусть отображения* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* $\Omega^{\nu,\varepsilon,\delta}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta = |x_0 - y(a)|$, x_0 *— начальное состояние* (3). *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *существует допустимая пара* $(u,x) \in H(x_0,b)$, *для которой справедливы оценки* (20), (21).

Если отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенное равенством* (9), *выпуклозначно, то утверждение справедливо при* $\varepsilon = 0$.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, имеющая представление (18), является *допустимой квазитраекторией* управляемой импульсной системы (1)-(2), если найдется такая последовательность измеримых функций $u_i : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $i = 1,2,\ldots$, удовлетворяющих при каждом $i = 1,2,\ldots$ и при почти всех $t \in [a,b]$ включению

$$u_i(t) \in U(t, (\mathcal{G}_b y)(t)),$$

что последовательность $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, для любого $t \in [a,b]$ определенная равенством

$$x_i(t) = x_0 + \int\limits_a^t f(s, (\mathcal{P}_b x_i)(s), u_i(s))ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(x_i(t_k)),$$

сходится к y в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Пусть $\mathcal{H}(x_0,b)$ — множество всех допустимых квазитраекторий управляемой импульсной системы (1)-(2).

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\begin{aligned} \dot{x} \in coF(t, (\mathcal{P}_b x)(t), (\mathcal{G}_b x)(t)), \ \ t \in [a,b], \\ \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1,\ldots,m, \ \ x(a) = x_0, \end{aligned} \tag{22}$$

где отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством (9), операторы $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m.$

Пусть $H_{\mathrm{co}}(x_0,b)$ — множество всех решений задачи (22).

Т е о р е м а 9. *Справедливо равенство* $\mathcal{H}(x_0,b) = H_{\mathrm{co}}(x_0,b)$.

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что отображения $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* Ω, если выполняется свойство $\Omega^{0,0,0}$, причем для любого $t \in [a,b]$ имеет место равенство $\omega(t,0) = 0$, где функция $\omega : [a,b] \times \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ задана соотношением (17) и задача (16) при $\nu = 0$, $\varepsilon = 0$, $y(a) = 0$ имеет только нулевые локальные решения.

Пусть $H(x_0,b)$ — множество всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)-(2).

Т е о р е м а 10. *Пусть множество всех допустимых пар управляемой импульсной системы* (1)-(2) *априорно ограничено. Далее, пусть отображения* $f : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойством* Ω. *Тогда* $H(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H(x_0,b)} = H_{\text{co}}(x_0,b), \tag{23}$$

где $\overline{H(x_0,b)}$– *замыкание в пространстве* $\widetilde{C}^n[a,b]$ *множества* $H(x_0,b)$.

С л е д с т в и е 3. *Пусть отображения* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv}[\mathbb{R}^m]$ *обладают свойствами* $\mathcal{A}$ *и* Ω. *Тогда* $H(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство* (23).

З а м е ч а н и е 2. *Отметим, что в регулярном случае (без импульсных воздействий), и если функции* $\omega_1 : [a,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega_2 : [a,b]\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ *в соотношениях* (14), (15) *линейны, то неравенства* (20), (21) *аналогичны оценкам А.Ф. Филиппова, В.И. Благодатских для дифференциальных включений (см.* [5], [6], [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. и мех., 1959, № 2. С. 25–32.

2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

3. *Ченцов А.Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. // Екатеринбург УГТУ-УПИ, 2010.

4. *Булгаков А.И., Панасенко Е.А., Сергеева А.О.* Продолжаемость допустимых пар управляемой системы с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием // Вестник ТГУ. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1645-1647.

5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.

6. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI // Вестник Тамб. ун-та. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275-1313.

7. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194-252.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №№ 09-01-97503, 11-01-00626, 11-01-00645), Министерства образования и науки РФ (АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы) проект № 2.1.1/9359; ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы госконтракты №№ П688, 14.740.11.0682, 14.740.11.0349; темплан 1.8.11).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V. Some properties of controllable impulsive system with phase constrains by control and with delay. For controllable impulsive system with phase constrains by control and with delay there are considered the questions of extendability of admissible pairs. The admissible trajectories estimations similar to those of V.I.Blagodatskikh and A.F.Filippov are received. The definition of admissible quasitrajectory is formulated. The sufficient conditions for the density principle to be held are considered.

Key words: controllable impulsive system with phase constrains by control and with delay; a-priori boundedness; differential inclusion with impulses.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Малютина Елена Валерьевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zont85@bk.ru

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911, 517.968

ОБ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ИМЕЮЩЕЙ ФАЗОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПО УПРАВЛЕНИЮ

© А.И. Булгаков, Е.А. Панасенко, А.О. Сергеева

Ключевые слова: управляемая система с фазовыми ограничениями по управлению, дифференциальное включение.

Для управляемой системы с запаздыванием получены оценки допустимых траекторий, аналогичные оценкам В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппова. Сформулировано определение допустимой квазитраектории. Получены достаточные условия выполнения принципа плотности для рассматриваемой системы.

Данная статья является продолжением исследований, проведенных в работе [1].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $|\ |$, $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$, $\rho[\cdot,\cdot]$ — расстояние между точкой и множеством, $h[\cdot,\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу между множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}_{[a,b]}}=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]$; $\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty[a,b]}=\mathrm{vraisup}\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathbf{D}^n[a,b]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{D}^n[a,b]}=|x(a)|+\int\limits_a^b|\dot{x}(s)|\,ds$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$. Пусть $A\subset\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Обозначим $|A|=\max\{|a|:a\in A\}$, $\mathrm{co}\,A$ — выпуклая замкнутая оболочка множества А.

Пусть заданы непрерывная функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием

$$\begin{array}{lll}\dot{x}=f(t,x[p(t)],u(t)), & x(t)=\varphi(t), & \text{если}\quad p(t)<a,\quad t\in[a,b],\\ u(t)\in U(t,x[g(t)]), & x(t)=\psi(t), & \text{если}\qquad g(t)<a,\end{array}\tag{1}$$

$$x(a)=x_0\quad(x_0\in\mathbb{R}^n),\tag{2}$$

где непрерывные функции $\varphi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$, $\psi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ ограничены, а непрерывные функции $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ для любого $t\in[a,b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t)\leqslant t$, $g(t)\leqslant t$.