Секция: ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ.
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ

УДК 517.911, 517.968

ОЦЕНКИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ОПЕРАТОРОМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ЗНАЧЕНИЙ. Часть I

© **А.И. Булгаков, Е.В. Малютина, О.В. Филиппова**

Ключевые слова: дифференциальное включение; импульсные воздействия; обобщенное решение; выпуклость по переключению значений.
Для множества обобщенных решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений, получены оценки, аналогичные оценкам А.Ф. Филиппова.

Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями были исследованы в монографиях [1 – 4]. Здесь рассматривается задача Коши функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. Сформулировано понятие обобщенного решения для такой задачи и найдены оценки обобщенных решений, аналогичные оценкам В.И. Благодатских и А.Ф. Филиппова.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$, $\mathbf{L}^1_+(\mathcal{U})$ — множество неотрицательных функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ пространства $\mathbf{L}^1(\mathcal{U})$.

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – пространство матриц размерностью $n\times n$ с действительными компонентами.

Далее, пусть $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция соответствующего множества.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ ($Q(\mathbf{L}^n[a,b])$) множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ — расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U] \equiv \sup\limits_{x\in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U] = \max\{h^+[U_1;U]; h^+[U;U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k,

$k = 1, 2, \ldots, m,$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : \ t \in [a, b]\},$ $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a, b]$.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Обозначим через $sw\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m,$$

элементов $x_i \in \Phi, i = 1, 2, \ldots, m,$ где непересекающиеся измеримые подмножества $\mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ отрезка $[a, b],$ удовлетворяют условию $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = [a, b]$. Пусть далее $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией и найдется такое симметричное отображение $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathbf{L}^1_+[a, b],$ принимающее нулевое значение на диагонали произведения $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b],$ непрерывное на ней, что для любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется оценка

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|P(x, y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{4}$$

Отметим, что правая часть включения (1) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$ $k = 1, 2, ..., m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k),$ $k = 1, 2, ..., m.$

Под *обобщенным решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b],$ для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x),$ что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k, b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{5}$$

где $\Delta(x(t_k)),$ $k = 1, ...m$ удовлетворяют равенствам (2).

Следует отметить, что если множество $\Phi(x)$ в (1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (1)–(3) совпадает с классическим решением (см. [5, 6]).

Отметим также, что к задаче (1)–(3) сводятся, например, математические модели сложных многокомпонентных систем автоматического управления с импульсными воздействиями, в которых в связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой (регулируется разными правыми частями). Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения задачи (1)–(3) и составляют множество всех таких траекторий.

По заданному отображению $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a, b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{sw}\Phi(x). \tag{6}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ будем называть *«овыпукленным по переключению» отображением.*

Будем говорить (см. [7]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau-$ сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau-$ множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров. Из этого условия вытекает, что овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенный равенством (6), также вольтерров. Кроме того, в силу оценки (4) оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывен по Хаусдорфу (см. [6]).

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (1)-(3) *почти реализует в пространстве суммируемых функций расстояние от любой суммируемой функции до значений обобщенных решений*, если для любого $v \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обобщенное решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (1)–(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{7}$$

где функция $q \in \widetilde{\Phi}(x)$ удовлетворяет равенству (5).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если для каждого $k = 1,2,...,m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \le \widetilde{I}_k(|x-y|). \tag{8}$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1,2,...,m)$, если импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, удовлетворяющий условиям: $\Gamma(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \le \|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})};$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1,...m, \quad y(a) = p \tag{9}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \tag{10}$$

отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяют неравенству (7), $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, числа $\varepsilon, p \geq 0$.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{11}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k=1,2,...,m$, удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q};\Phi(y)] \leq \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{12}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (11).

Т е о р е м а 1. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (11), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (12). *Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k=1,2,...,m$, *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k=1,2,...,m)$, *где* $\varepsilon \geq 0$, $p=|x_0-y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)–(3). *Тогда для любого решения* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)–(3), *удовлетворяющего для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *неравенству* (7), *в котором функция* $q \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ *из представления* (5), *а функция* $v=\widetilde{q}$ *из соотношения* (11), *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t)-y(t)| \leq \xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t)$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t)-\widetilde{q}(t)| \leq \varkappa(t)+\varepsilon+(\Gamma(\xi(\varkappa,\varepsilon,p)))(t),$$

где $\xi(\varkappa,\varepsilon,p)-$ *верхнее решение задачи* (9) *при* $u=\varkappa$ *и* $p=|x_0-y(a)|$.

Л е м м а 1. *Пусть* B *– Банахово пространство и пусть ограниченные множества* A_1, A_2, B_1, $B_2 \subset B$. *Обозначим* $\mathcal{K}_1 = A_1 \bigcup B_1$, $\mathcal{K}_2 = A_2 \bigcup B_2$. *Тогда*

$$h_B[\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2] \leqslant \max\{h_B[A_1,A_2],h_B[B_1,B_2]\}.$$

Л е м м а 2. *Пусть множества* $\Phi_i \in \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, $i=1,2$ *и измеримые отображения* $F_i : [a,b] \to comp[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$ *связаны между собой соотношениями* $\Phi_i = S(F_i(\cdot))$, $i=1,2$. *Тогда для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется равенство*

$$h_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2] = \int\limits_{\mathcal{U}} h[F_1(t);F_2(t)]dt.$$

П р и м е р. Пусть многозначное отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством

$$\mathcal{P}(x) = N_1(x) \cup N_2(x) \cup \ldots \cup N_r(x), \tag{13}$$

где $N_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, $i=1,2,\ldots,r$ — многозначные операторы Немыцкого, порожденные отображениями $F_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2,\ldots,r$, и заданные равенствами

$$N_i x = \{z \in \mathbf{L}^n[a,b] : z(t) \in F_i(t,x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}, \tag{14}$$

здесь отображения $F_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2,\ldots,r$, удовлетворяют условиям:
1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображения $F_i(\cdot,x)$ измеримы (см. [8]);
2) существуют суммируемые функции $l_i : [a,b] \to [0,\infty)$ такие, что для любых $x,y \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняются неравенства

$$h[F_i(t,x);F_i(t,y)] \leqslant l_i(t)|x-y|, \quad i=1,2\ldots r; \tag{15}$$

3) функции $\|F_i(t,0)\| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенные равенствами

$$\|F_i(t,0)\| = \sup_{y \in F_i(t,0)} |y|, \quad i=1,2,\ldots,r,$$

суммируемы.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями

$$\dot{x} \in \mathcal{P}x \tag{16}$$

$$\Delta(x(t_k)) = \widehat{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{17}$$

$$x(a) = x_0, \tag{18}$$

где для любого $k = 1, 2, ..., m$ операторы $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеют вид

$$\widehat{I}_k x = A_k x + g_k,$$

здесь $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $g_k \in \mathbb{R}^n$; отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством (13).

В этом случае «овыпукленное по переключению» отображение $\widetilde{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ порождается отображением $\widetilde{F} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, которое имеет вид

$$\widetilde{F}(t,x) = F_1(t,x) \cup F_2(t,x) \cup \ldots \cup F_r(t,x).$$

Под обобщенным решением задачи (16)-(18) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая включению $q \in \widetilde{P}x$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{19}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$ удовлетворяют равенству (17).

Так как для любого $k = 1, 2, ..., m$, выполняется неравенство

$$|\widehat{I}_k x - \widehat{I}_k y| \leqslant \|A_k\||x-y|,$$

то отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяющее оценке (8), имеет вид

$$\widetilde{I}_k x = \|A_k\| x. \tag{20}$$

Таким образом, импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, обладают свойством $\mathcal{A}$ (см. определение 2).

Пусть отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, задано равенством

$$(\Gamma x)(t) = l(t)x(t), \tag{21}$$

где суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$l(t) = \max\{l_1(t), l_2(t), \ldots, l_r(t)\}, \tag{22}$$

где функции $l_i : [a,b] \to [0,\infty)$ удовлетворяют оценкам (15). При этом $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условию: $\Gamma(0) = 0$.

Пусть множество $\mathcal{U} \subset [a,b]$ измеримо и функции $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Из лемм 1, 2 и неравенств (15) следует

$$\begin{gathered} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\mathcal{P}x, \mathcal{P}y] \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,r} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[N_i x, N_i y] = \\ = \max_{i=1,2,\ldots,r} \int\limits_{\mathcal{U}} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[F_i(t,x(t)), F_i(t,y(t))]dt \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,r} \int\limits_{\mathcal{U}} l_i(t)|x(t)-y(t)|dt. \end{gathered} \tag{23}$$

Из определения функции $l : [a,b] \to [0,\infty)$ (см. (22) для любого $i = 1,2,\ldots,r$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathcal{U}} l_i(t)|x(t)-y(t)|dt \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} l(t)|x(t)-y(t)|dt. \tag{24}$$

Поэтому из неравенств (23), (24) следует, что для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ и любых $x,y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ выполняется соотношение

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\mathcal{P}x,\mathcal{P}y] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} l(t)|x(t)-y(t)|dt = ||\Gamma(Z(x-y))||_{L^1(\mathcal{U})}, \tag{25}$$

где суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ определена равенством (22), отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ задано равенством (21), непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано формулой (10).

Таким образом, отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ с импульсными воздействиями $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, обладает свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, \widehat{I}_k, k = 1,2,...,m)$ при $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, заданном равенством (21).

Рассмотрим решение задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1,2,...m, \quad y(a) = p, \tag{27}$$

где числа $\varepsilon, p \geq 0$, функция $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ определено равенством (21). Решение задачи (27) на промежутке $[a,t_1]$ имеет вид

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t) = \int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau} ds + p\ e^{\int\limits_a^t l(s)ds}.$$

Рассмотрим продолжение решения задачи (27) на промежуток $(t_1,t_2]$. Из условия задачи получаем

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t_1+0) = \xi(u,\varepsilon,p)(t_1) + \|A_1\|\xi(u,\varepsilon,p)(t_1).$$

Поэтому решение задачи (27) на отрезке $[a,t_2]$ записывается в виде

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t) = \int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau} ds + (y(t_1) + \|A_1\|y(t_1))e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}$$

или

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t) = \int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau} ds + p\ e^{\int\limits_a^t l(s)ds} +$$

$$+ \|A_1\|\Big(\int\limits_a^{t_1} (u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau} ds + p\ e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds} \chi_{(t_1,b]}(t).$$

Так как

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t_2+0) = \xi(u,\varepsilon,p)(t_2) + \|A_2\|\xi(u,\varepsilon,p)(t_2),$$

то продолжение решения задачи (27) на полуинтервал $(t_2, t_3]$ имеет вид

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^t l(s)ds} +$$

$$+\|A_1\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$

$$+\|A_2\|\Big(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t).$$

На полуинтервал $(t_3, t_4]$

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^t l(s)ds} +$$

$$+\|A_1\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$

$$+\|A_2\|\Big(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$

$$+\|A_3\|\Big(\int\limits_a^{t_3}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_3} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_3} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_3}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_3\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t).$$

Окончательно получаем формулу

$$
\begin{aligned}
&\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int\limits_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^t l(s)ds}+\\
&+\sum_{k=1}^{m}\|A_k\|\left(\int\limits_a^{t_k}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_k} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_k} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_k}^t l(s)ds}\chi_{(t_k,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-1}\|A_1\|\|A_{k+1}\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=2}^{m-2}\|A_2\|\|A_{k+1}\|\left(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_{m-1}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_{m-1}} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_{m-1}} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_{m-1}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-2}\|A_1\|\|A_2\|\|A_{k+2}\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+2},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-3}\|A_2\|\|A_3\|\|A_{k+3}\|\left(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+3},b]}(t)+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\|A_{m-2}\|\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_{m-2}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_{m-2}} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_{m-2}} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_{m-2}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\|A_1\|\|A_2\|\dots\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Пусть для функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\widetilde{q}\in\mathbf{L}^n[a,b]$, что при любом $t\in[a,b]$ имеет место представление

$$y(t)=y(a)+\int\limits_a^t\widetilde{q}(s)ds+\sum_{k=1}^{m}\chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)),\tag{29}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k=1,2,\dots,m$ удовлетворяют равенству (17). Далее, пусть функция $\varkappa\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ удовлетворяет соотношению

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q},\mathcal{P}(y)]\leqslant\int\limits_{\mathcal{U}}\varkappa(s)ds.\tag{30}$$

Тогда из теоремы 1 вытекает, что для любой функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (29) и оценке (30), и любого $\varepsilon>0$ существует такое обобщенное решение x задачи (16)–(18), удовлетворяющее для любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ неравенству

$$\|q-\widetilde{q}\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}\leqslant\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi(x)]+\varepsilon\mu(\mathcal{U}),$$

в котором функция $q \in \widetilde{\Phi}(x)$ из представления (5), а функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ из соотношения (29), что для любого $t \in [a,b]$ выполняется

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t) \tag{31}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + l(t)\xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t), \tag{32}$$

где функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (30); функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ задана равенством (22); $\xi(\varkappa, \varepsilon, p) \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (28) при $u = \varkappa$ и $p = |x_0 - y(a)|$. Отметим, что если импульсные воздействия отсутствуют, то приведенные оценки (31), (32) совпадают с оценками В.И. Благодатских и А.Ф. Филиппова с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$ (см. [1], [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.
3. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.
5. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.
6. *Пучков Н.П., Булгаков А.И., Григоренко А.А., Коробко А.И., Корчагина Е.В., Мачина А.Н., Филиппова О.В., Шлыкова И.В.* О некоторых задачах функционально-дифференциальных включений // Вестник ТГТУ. 2008. Т. 14. № 4. С. 947-974.
7. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.
8. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. С. 480.
9. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды мат. инст. им. Стеклова, 1985. Т. 169. С. 194-252.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-97503); АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (проект № 2.1.1/1131); ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (государственные контракты № П688, № 14.740.11.0349, № 14.740.11.0682); темплана 1.5.10.

Поступила в редакцию 20 августа 2010 г.

Bulgakov A.I., Filippova O.V., Malyutina E.V. Estimations of generalized solutions to differential inclusions with impulses and with operator not necessarily convex-valued with respect to switching. Part I.

For generalized solutions set to differential inclusions with impulses and an operator not necessarily convex-valued with respect to switching there are received estimations similar to those of A.F. Filippov.

Key words: differential inclusion; impulses; generalized solution; convexity with respect to switching of values.