

УДК 331.4:530.71

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© Ю.Ю. Громов, В.А. Алеев, А.Г. Рошка

Gromov Y.Y., Aleev V.A., Roshka A.G. The linear programming problems solving in cases of inexact source data. The article describes the possibilities of using the fuzzy multitude methods for building and analysis in complicated systems modeling.

Практика применения математических методов и ЭВМ в решении вопросов, связанных с планированием при переходных процессах в сложных системах, несомненно, принесла свою пользу, однако она выявила и существенные трудности. Последние имеют разную природу. Отметим такие, как недостаточное совершенство математического аппарата, плохое информационное обеспечение (неполнота, недостоверность и неточность информации, невозможность ее оперативного использования из-за отсутствия автоматизированных баз данных), недостаточное алгоритмическое и программное обеспечение. Отметим также трудности, связанные с качеством моделирования. Обеспечить высокий уровень моделирования, ведущий к созданию адекватной рабочей модели сложной системы, хорошо «притертой» к ней и позволяющей отслеживать и прогнозировать развитие объекта планирования, — задача нелегкая.

В условиях искаженной, неточной, неполной информации польза рекомендаций, выработанных на основе использования детерминированных математических формализаций, становится, мягко говоря, сомнительной. Поэтому актуальной становится задача применения методов, основанных на использовании формализованной качественной информации, позволяющих решать задачи планирования в условиях неопределенности. При принятии решений на верхнем иерархическом уровне базовой является задача линейного программирования, формализующая процесс распределения входных координат с целью достижения максимума (минимума). Однако при управлении в сложных системах, как правило, помимо одного основного критерия необходимо использовать целый ряд других.

На ранних этапах развития системного анализа о факторах неопределенности и причинах, их порождающих, просто не упоминалось в силу принятого «глобального» допущения о детерминированной сущности рассматриваемых процессов и объектов.

Дальнейшее развитие системного анализа позволило отказаться от «глобального» допущения и использовать, при исследовании объектов и процессов, более реалистичный математический аппарат, основанный на методах теории нечетких функций и статистики. Однако возможность применения любого математического аппарата, даже самого совершенного, при исследовании реальных явлений всегда ограничена тем, что: должна быть априори принята неко-

торая система допущений; проведены необходимые экспериментальные исследования; поставлена и решена задача идентификации (т. е. определены параметры и структура математической модели, обеспечивающие наилучшее совпадение выходных координат модели и процесса при одинаковых входных воздействиях).

Реализация каждого из этих пунктов сопряжена со значительными трудностями: оценкой степени уверенности в выбранной системе допущений; сложностью, а порой и просто отсутствием возможности, проведения необходимого набора экспериментальных исследований; ненаблюдаемостью ряда параметров и разработкой, в связи с этим, специальных методов решения задачи идентификации.

Поэтому существуют объективные причины, существенно сдерживающие развитие системного анализа и прикладных аспектов его использования. Однако с развитием системного анализа был накоплен определенный опыт исследования субъектов сложных систем, и поэтому чрезвычайно актуальным является применение этого опыта при разработке более реалистичных математических моделей. Этому, в значительной мере, способствуют методы инженерии знаний [1–6, 11, 12], позволяющие строить и формализовать лингвистические переменные и утверждения путем введения соответствующих функций принадлежности.

Задача линейного программирования с векторной целевой функцией. Рассмотрим формализацию задач линейного программирования следующего вида:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_\gamma \mathbf{x} &\rightarrow \max, \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle &\leq \mathbf{b}_i, \\ \mathbf{x} &\geq 0, \\ \dim(f) &= m, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{c}_\gamma$, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{x}$, $\gamma = 1, m - n$ — мерные векторы.

Рассмотрим множество возможных решений задачи (1):

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq \mathbf{b}_i, i = 1, m, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

Пусть m_γ и M_γ соответственно минимальное и максимальное значения i -ой целевой функции, определенной на множестве $\mathbf{X}$:

$$m_\gamma = \min \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle, M_\gamma = \max \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle \text{ при } \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Предположим, что для всех γ выполняется неравенство

$$m_\gamma \leq M_\gamma, \gamma = \overline{1, k}.$$

Вводя в рассмотрение нечеткие цели, соответствующие каждой целевой функции (1), задачу (1) представим в виде:

$$\mu_D(\mathbf{x}) = \mu_1(f_1(\mathbf{x})) \cap \mu_2(f_2(\mathbf{x})) \cap \dots \cap \mu_k(f_k(\mathbf{x})) \rightarrow \max \text{ при } \mathbf{x} \in X, \quad (2)$$

где $\mu_\gamma(\cdot)$ – функция принадлежности нечеткой цели, в качестве которой рассматривается соответствующая целевая функция f_γ , $\gamma = \overline{1, k}$, D – нечеткое решение. Определим функции принадлежности $\mu_\gamma(\cdot)$ следующим образом:

$$\mu_\gamma(z_\gamma) = \begin{cases} 0, & z_\gamma < d_\gamma, \\ L((M_\gamma - z_\gamma)/\alpha_\gamma), & d_\gamma \leq z_\gamma \leq M_\gamma, \\ 1, & z_\gamma > M_\gamma. \end{cases} \quad (3)$$

$L(\cdot)$ – некоторая функция, обладающая следующими свойствами:

$L(\cdot)$ определена на $[0, \infty)$;

$L(\cdot)$ непрерывная неубывающая функция на всей области определения;

$L(0)=1$;

$L(\cdot)$ строго возрастающая функция на интервале $[(L(y)>0)^{-1}, \infty)$;

$L(\cdot)$ имеет обратную функцию на интервале $[(L(y)>0)^{-1}, \infty)$.

Величина $d_\gamma \in (m_\gamma, M_\gamma)$, пусть $\mu_\gamma(d_\gamma) = \delta_\gamma$, где $\delta_\gamma \in [0, 1]$. Величину α_γ в соответствии с (3) определим следующим образом:

$$\alpha_\gamma = (M_\gamma - d_\gamma)/L^{-1}(\delta_\gamma), \quad (4)$$

при этом, если $d_\gamma = M_\gamma$, то вместо (3) целесообразно использовать соотношение вида:

$$\mu_\gamma(z_\gamma) = \begin{cases} 0, & z_\gamma < d_\gamma, \\ 1, & z_\gamma > d_\gamma. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим следующие утверждения:

Утверждение 1. Каждое максимизирующее решение (2) с функциями принадлежности, определяемыми в соответствии с (3) или (5), является слабо эффективными для (1).

Доказательство. Доказательство утверждения проводится на основе теоремы, сформулированной и доказанной в [7, 8].

Утверждение 2. Для каждого $\mathbf{x} \in X$, являющегося эффективным для (1), существуют функции принадлежности μ_γ , $\gamma = \overline{1, k}$, в форме (3) или (5) такие, что $\mathbf{x}$ является максимизирующим решением в (2).

Утверждение 3. Если существует такой $\mathbf{x} \in X$, что $\mu_D > 0$, то (2) может быть представлена в эквивалентной форме, имеющей вид:

$$\mathbf{x}_{n+1} \rightarrow \min, \\ \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle + \alpha_\gamma \mathbf{x}_{n+1} \geq M_\gamma, \gamma = \overline{1, k},$$

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq \mathbf{b}_i, i = \overline{1, m}, \quad (6) \\ \mathbf{x} \geq 0 : \mathbf{x}_{n+1} \leq L^{-1}(\lambda),$$

где $\lambda = \min \delta_\gamma$.

Доказательство. В [9, 10] доказано, что задача (2) эквивалентна следующей задаче:

$$\lambda \rightarrow \max, \\ \mu_\gamma(\langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle) \geq \lambda, \gamma = \overline{1, k}, \quad (7) \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq \mathbf{b}_i, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \geq 0.$$

Используя утверждение 1, задачу (7) представим в виде:

$$\lambda \rightarrow \max, \\ L((M_\gamma - \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle)/\alpha_\gamma) \geq \lambda, \gamma = \overline{1, k}, \quad (8) \\ \mathbf{x} \geq 0, \lambda \geq \min \delta_\gamma.$$

Пусть $L^{-1}(\lambda) = \mathbf{x}_{n+1}$, тогда, в силу свойств функции $L(\cdot)$, задача (8) приводится к форме (6).

Рассмотрим возможность решения задачи (1), представленной в эквивалентной форме (6), с помощью введения параметра. Введем в рассмотрение параметр $\mathbf{Q}_\gamma$, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{Q}_\gamma = L^{-1}(\delta_\gamma), \gamma = \overline{1, k}.$$

Получение такой последовательности возможно, но в некоторых случаях необходимо ввести новую нумерацию используемых целевых функций. Тогда задача (6) заменится последовательностью задач вида:

$$\langle \mathbf{c}_k, \mathbf{x} \rangle \rightarrow \max, \\ \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle \geq d_\gamma, \gamma = \overline{1, L-1}, \\ \langle \mathbf{c}_\gamma, \mathbf{x} \rangle \geq M_\gamma - \alpha_\gamma \mathbf{Q}_\gamma, \gamma = \overline{L, k-1}, \quad (9) \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq \mathbf{b}_i, i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \geq 0, \\ \mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}_{L-1}, \mathbf{Q}_L], L = \overline{1, k-1},$$

где $\mathbf{Q} = L^{-1}(\lambda)$.

Рассмотрим следующее утверждение:

Утверждение 4. Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{Q} \in [0, \mathbf{Q}_{k-1}]$, является решением (9), тогда $\mathbf{x}(\mathbf{Q})$ – слабо эффективное решение задачи (1).

Доказательство утверждения следует непосредственно из теоремы, доказанной в работе [7].

Задача линейного программирования с векторной целевой функцией и нечеткими параметрами. Математическая формализация рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\min(\langle \mathbf{C}_1, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{C}_k, \mathbf{x} \rangle), \quad (10) \\ \mathbf{x} \in X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{A}_j, \mathbf{x} \rangle \leq \mathbf{B}_j, j = \overline{1, m}, \mathbf{x} \geq 0\},$$

где $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k, \mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j$ – нечеткие параметры.

Определение 1. Под множеством α -уровня для нечетких чисел $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_i$ будем понимать множество $[L]_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, построенное следующим образом:

$$[L]_{\alpha}(A, B, C) = \{(A, B, C) : \mu_{A_j}(A_j) \geq \alpha; \mu_{B_j}(B_j) \geq \alpha; \mu_{C_j}(C_j) \geq \alpha; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, m}; \}.$$

Будем считать, что для множества α -уровня выполняется следующий набор свойств

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \rightarrow [L]_{\alpha_1}(A, B, C) \supset [L]_{\alpha_2}(A, B, C).$$

Математическая формализация задачи (10) на множестве α -уровня примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \min(<C_1, x>, \dots, <C_k, x>), \\ x \in X(A, B) = \{x \in R^n : <A_j, x> \leq B_j, j = \overline{1, m}, x \geq 0\}, \\ (A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем определение α -эффективного (α -Парето)-оптимального решения.

Определение 2. Будем называть $x^* \in X(A^*, B^*)$ α -эффективным (α -Парето-оптимальным) решением задачи (11), если, и только если, не существует $x \in X(A, B)$, $(A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C)$ такой, что $<C_i, x> \leq <C_i^*, x^*>$, $i = \overline{1, k}$, а (A^*, B^*, C^*) – α -эффективные параметры.

Рассмотрим более сложную конструкцию целей, которая соответствует лингвистическим понятиям: «нечеткий минимум», «нечеткий максимум», «нечеткое равенство». С учетом более сложной конструкции целей задача (11) примет вид:

$$\begin{aligned} \min <C_i, x> \quad (i \in I_1); \\ \max <C_i, x> \quad (i \in I_2); \\ <C_i, x> \quad (i \in I_3); \\ x \in X(A, B); (A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C); \\ I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \overline{1, k}; I_i \cap I_{i+1} = \emptyset; i = 1, 2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функции принадлежности, соответствующие каждому из выделенных множеств индексов.

$$\begin{aligned} \underline{i \in I_1} \\ \mu_i(<C_i, x>) = \begin{cases} 1, <C_i, x>_1^R \geq <C_i, x> \\ D_i^R(<C_i, x>), <C_i, x>_1^R < <C_i, x> < <C_i, x>_0^R \\ 0, <C_i, x> \geq <C_i, x>_0^R \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{i \in I_2} \\ \mu_i(<C_i, x>) = \begin{cases} 0, <C_i, x>_1^L \geq <C_i, x> \\ D_i^L(<C_i, x>), <C_i, x>_1^L < <C_i, x> < <C_i, x>_0^L \\ 1, <C_i, x> \geq <C_i, x>_0^L \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{i \in I_3} \\ \mu_i(<C_i, x>) = \begin{cases} 0, <C_i, x> \leq <C_i, x>_1^L, \\ D_i^L(<C_i, x>), <C_i, x>_0^L < <C_i, x> < <C_i, x>_1^L \\ 1, <C_i, x>_1^L < <C_i, x> \leq <C_i, x>_1^R, \\ D_i^L(<C_i, x>), <C_i, x>_0^R < <C_i, x> < <C_i, x>_1^R \\ 0, <C_i, x> \geq <C_i, x>_0^R \end{cases} \end{aligned}$$

где $D_i^L(\cdot)$, $D_i^R(\cdot)$ – соответственно сильно монотонно возрастающая и убывающая функции, которые могут быть как линейны, так и нелинейны; $<C_i, x>_0^L$, $<C_i, x>_0^R$, $<C_i, x>_1^L$, $<C_i, x>_1^R$ – соответствуют пороговым значениям α , т. е. $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, индекс сверху (L или R) соответствует способу представления функции принадлежности: сильно монотонно возрастающая (L) и сильно монотонно убывающая – (R).

Ввиду того, что мы рассматриваем более сложный набор целей, для которого мы ввели в рассмотрение соответствующие функции принадлежности, вместо определения 2 будем использовать новое.

Определение 3. $x^* \in X(A^*, B^*)$ будем называть μ -эффективным (μ -Парето-оптимальным) решением задачи (2), если и только если не существует $x \in X(A, B)$, $(A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C)$ такого, что $\mu_i(<C_i, x>) \leq \mu_i$, $i = \overline{1, k}$, а (A, B, C) α -эффективные параметры.

Используя задачу (11), приведем к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} \min \mu_D(\mu_1(<C_1, x>), \dots, \mu_k(<C_k, x>), \alpha), \\ (x, A, B, C) \in \rho(\alpha), \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (12)$$

$\rho(\alpha)$ – множество μ -эффективных решений, соответствующих различным α -уровням.

Решение задачи (12) эквивалентно решению задачи вида:

$$\begin{aligned} \min \\ x \in X(A, B) \\ (A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C), \end{aligned} \quad \max(\mu_i - \mu_i(<C_i, x>)), \quad 1 \leq i \leq k \quad (13)$$

которая в свою очередь эквивалентна задаче:

$$\begin{aligned} \min \sigma, \\ \mu_i - \mu_i(<C_i, x>) \leq \sigma, i = \overline{1, k}, \\ A_j x \leq B_j, j = \overline{1, m}, x \geq 0, \\ (A, B, C) \in [L]_{\alpha}(A, B, C). \end{aligned} \quad (14)$$

Задача (14) является линейной, т. к. в общем виде используется функция принадлежности $\mu_i(\cdot)$, которая является нелинейной.

Для того чтобы вместо (14) рассматривать задачу линейного программирования, воспользуемся свойствами функций $D_i^L(\cdot)$, $D_i^R(\cdot)$

$$\begin{aligned} <C_i, x> \leq (D_i^R)^{-1}(\mu_i - b), i \in I_1 \cup I_3, \\ <C_i, x> \leq (D_i^L)^{-1}(\mu_i - b), i \in I_2 \cup I_3, \end{aligned}$$

введем в рассмотрение множества, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} S_i^R(C_i) = \{(x, b) : <C_i, x> \leq (D_i^R)^{-1}(\mu_i - b)\}, i \in I_1 \cup I_3, \\ S_i^L(C_i) = \{(x, b) : <C_i, x> \leq (D_i^L)^{-1}(\mu_i - b)\}, i \in I_2 \cup I_3, \\ T_j(A_j, B_j) = \{x : A_j x \leq B_j, j = \overline{1, k}\}. \end{aligned}$$

В соответствии со способом представления нечетких чисел и свойствами функций $D_i^L(\cdot)$, $D_i^R(\cdot)$ для введенных множеств справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_i^1 \leq C_i^2, S_i^R(C_i^1) \supset S_i^R(C_i^2), S_i^L(C_i^1) \subset S_i^L(C_i^2); \\ A_j^1 \leq A_j^2, T_j(A_j^1, B_j^1) \supset T_j(A_j^2, B_j^1); \\ B_j^1 \leq B_j^2, T_j(A_j^1, B_j^1) \subset T_j(A_j^1, B_j^2). \end{aligned}$$

Т. к. A, B, C – нечеткие числа, то они могут быть представлены с помощью интервалов, каждый из которых соответствует выбранному значению α : $[C_i^R, C_i^L]_{\alpha}$, $[B_i^R, B_i^L]_{\alpha}$, $[A_i^R, A_i^L]_{\alpha}$, тогда задача (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \min \sigma \\ \langle [C_i^L]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle \leq (D_i^R)^{-1}(\mu_i - \mathbf{b}), i \in I_1 \cup I_3, \\ \langle [C_i^R]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle \geq (D_i^L)^{-1}(\mu_i - \mathbf{b}), i \in I_2 \cup I_3, \\ \langle [A_j^L]_{\omega}, \mathbf{x} \rangle \leq [B_j^R]_{\omega}, j = \overline{1, m}, \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Сформулируем следующие утверждения.

Утверждение 5. Если $\mathbf{x}^*$ – единственное оптимальное решение задачи (15), то оно является также μ -эффективным (μ -Парето-оптимальным) решением задачи линейного программирования со многими целями.

Доказательство. Будем доказывать утверждение от противного. Пусть $\mathbf{x}^*$ не является μ -эффективным, тогда существует такое

$$\mathbf{x} \in X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \in [L]_{\alpha}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}),$$

что

$$\begin{aligned} \mu_i(\langle C_i, \mathbf{x} \rangle) &\geq \mu_i(\langle [C_i^L]_{\omega}, \mathbf{x} \rangle), (i \in I_1 \cup I_3^R), \\ \mu_i(\langle C_i, \mathbf{x} \rangle) &\geq \mu_i(\langle [C_i^R]_{\omega}, \mathbf{x} \rangle), (i \in I_2 \cup I_3^L), \\ \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^L]_{\omega}, \mathbf{x}^* \rangle)) &\geq \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^L]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle)) \geq \\ &\geq \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^L]_{\omega}, \mathbf{x} \rangle)), \\ &i \in I_1 \cup I_3^R \\ \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^R]_{\omega}, \mathbf{x}^* \rangle)) &\geq \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^R]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle)) \geq \\ &\geq \max(\mu_i - \mu_i(\langle [C_i^R]_{\omega}, \mathbf{x} \rangle)), \\ &i \in I_1 \cup I_3^L \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $\mathbf{x}^*$ является единственным оптимальным решением (15).

Утверждение 6. Если $\mathbf{x}^*$ μ -эффективное (μ -Парето-оптимальное) решение задачи линейного программирования со многими целями, то $\mathbf{x}^*$ является оптимальным решением (15) для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^*, \mathbf{b}^*$ не являются оптимальным решением задачи (6)

$$\begin{aligned} \mu_i - \mu_i(\langle [C_i^L]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle) &= \mathbf{b}^*, (i \in I_1 \cup I_3^R), \\ \mu_i - \mu_i(\langle [C_i^R]_{\alpha}, \mathbf{x} \rangle) &= \mathbf{b}^*, (i \in I_2 \cup I_3^L), \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим задачу линейного программирования с **векторным критерием**. Математическая формализация имеет вид:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{x}) &= -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ I_2(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max; \\ I_3(\mathbf{x}) &= 2x_3 \rightarrow \max; \\ I_4(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 \leq 1; x_2 \leq 1; x_3 \leq 1; x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1,5; x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 – виды используемых ресурсов. Определим границы интервалов нечеткости:

$$m_{\gamma} = \min_{\mathbf{x} \in X} c_{\gamma} \mathbf{x}; M_{\gamma} = \max_{\mathbf{x} \in X} c_{\gamma} \mathbf{x}; \gamma = 1, 4.$$

Соответственно получим следующие границы интервалов нечеткости:

$$\begin{aligned} m_1 &= -2,5; \quad \mu_1 = 0; \\ m_2 &= -1; \quad \mu_2 = 2; \\ m_3 &= 0; \quad \mu_3 = 1; \\ m_4 &= 0; \quad \mu_4 = 1,5. \end{aligned}$$

Воспользуемся для формализации функции принадлежности наиболее общей формой представления, принимая, что $L(y) = \max 0; 1 - y$ и d_{γ} и $\mathbf{b}_{\gamma}$, с учетом m_{γ} и μ_{γ} , равны:

$$\begin{aligned} d_1 &= -1,5; \quad \mu_1 = 1/3; \\ d_2 &= 0; \quad \mu_2 = 0,2; \\ d_3 &= 0,5; \quad \mu_3 = 0,2; \\ d_4 &= 0; \quad \mu_4 = 0; \\ L(y) &= 1 - y, y \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Определим набор α_{γ} следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma} &= (\mu_1 - d_{\gamma}) / (1 - \mathbf{b}_{\gamma}); \\ Q_{\gamma} &= L(\mathbf{b}_{\gamma}) = 1 - \mathbf{b}_{\gamma}, \gamma = 1, 4 \end{aligned}$$

и представим неубывающей последовательностью следующего вида:

$$\{2/3; 4/5; 4/5; 1\}.$$

Рассмотрим две задачи линейного программирования с параметром Q .

Задача 1

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -2,25Q, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 - 2,5Q, \\ x_3 &\geq 1 - 5Q/8, \\ x_1 \leq 1; x_2 \leq 1; x_3 &\leq 1; x_1 + x_2 + x_3 \leq 3/2; x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ Q &\in [0, 2/3]. \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -1,5Q, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 - 2,5Q, \\ x_3 &\geq 1 - 5Q/8, \\ x_1 \leq 1; x_2 \leq 1; x_3 &\leq 1; x_1 + x_2 + x_3 \leq 3/2; x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ Q &\in [2/3, 4/5]. \end{aligned}$$

Решения приведенных задач имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}(Q) = \begin{cases} (2,25Q; 0; 1,5 - 2,25Q), Q \in [2/7; 4/13] \\ (0,5 + 5Q/8; 0; 0,5 - 5Q/8), Q \in [4/13; 2/3], \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(Q) = \{(0,5 + 5Q/8; 0; 0,5 - 5Q/8), Q \in [4/13; 2/3]\}.$$

Используя направление решения, найдем диапазон изменения целевой функции:

$$I(\mathbf{x}(Q)) = \begin{cases} 2,25Q, Q \in [2/7; 4/13] \\ 0,5 + 5Q/8, Q \in [4/13; 4/5]. \end{cases}$$

Определим функцию принадлежности нечеткой цели следующим образом:

$$\mu(I(\mathbf{x}(Q))) = \begin{cases} 0, & I(\mathbf{x}(Q)) < 0 \\ 2/3 I(\mathbf{x}(Q)), & 0 \leq I(\mathbf{x}(Q)) \leq 3/2. \\ 1, & I(\mathbf{x}(Q)) \geq 1 \end{cases}$$

Используя полученные решения и диапазон изменения целевой функции, получим:

$$\mu(I(\mathbf{x}(\mathbf{Q}))) = \begin{cases} 1,5\mathbf{Q}, \mathbf{Q} \in [2/7; 4/13] \\ 1/3 + 5\mathbf{Q}/8, \mathbf{Q} \in [4/13; 4/5]. \end{cases}$$

Функция принадлежности нечеткого решения имеет вид:

$$\mu_D(I(\mathbf{x}(\mathbf{Q}))) = \mu(I(\mathbf{x}(\mathbf{Q}))) \wedge (1 - \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \in [2/7; 4/5].$$

Максимальное значение $\mu_D(\cdot)$ достигается при $\mathbf{Q} = 8/17$, что, в свою очередь, позволяет определить компоненты вектора, которые равны:

$$\mathbf{x}(8/17) = (0,79412; 0; 0,70588).$$

Заключение. В работе изложены методы решения ряда задач с исходными данными, которые представлены лишь набором общих оценок.

Примеры подтверждают правомерность использования аппарата нечетких множеств для решения задач линейного программирования с векторной целевой функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осуга С.* Обработка знаний: Пер. с япон. М.: Мир, 1989. 293 с.
2. *Поспелов Д.А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989. 184 с.
3. *Поспелов Г.С., Поспелов Д.А.* Искусственный интеллект – прикладные системы. М.: Знание, 1985. 48 с.
4. *Поспелов Г.С.* Искусственный интеллект – основа новой информационной технологии. М.: Наука, 1988. 280 с.
5. Построение экспертных систем: Пер. с англ. / Под ред. Ф. Хейса Рота, Д. Уотермана. М.: Мир, 1987. 441 с.
6. Представление и использование знаний: Пер. с япон. / Под ред. Х. Уэло, М. Исидзука. М.: Мир, 1989. 220 с.
7. *Buckley J.J.* Fuzzy programming and the Pareto optimal set. N. Y. // Fuzzy Sets and Systems. 1983. V. 10. № 1. P. 57-63.
8. *Buckley J.J.* Areply to «A note on fuzzy programming and the Pareto optimal set». N. Y. // Fuzzy Sets and Systems. 1984. V. 14. № 1. P. 81-82.
9. *Fuller R.* On stability in possibilistic linear equality with lipschitzan fuzzy numbers // Fuzzy sets and Systems. 1990. V. 34. № 2. P. 347-353.
10. *Inuiguchi M., Ichihashi H.* Relative modalities and their use in possibilistic linear programing // Fuzzy sets and Systems. 1990. V. 35. № 3. P. 303-323.
11. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М., 1963. 775 с.
12. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М., 1983. 336 с.

Поступила в редакцию 15 декабря 1999 г.

Адрес журнала в сети Интернет:
www.chat.ru/~tsureports