УДК 523

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© Б.З. Винокуров, Д.Е. Винокуров, А.В. Лукин

Vinokurov B.Z., Vinokurov D.E., Lukin A.V. Mathematical modeling of some forms of dynamic system stability. A general solution for a three-body task with the help of the «frozen coefficient» method is suggested. Some examples of restrained problem solutions are discussed. Lagrange cycle motion classes are analyzed. A program for PC able to produce motion trajectories on the screen is compiled.

I. ВВЕДЕНИЕ

Первый в истории человечества случай исследования динамической системы на устойчивость возник в 1687 г. перед И. Ньютоном при решении им *задачи двух тел* – задачи о формах движения планеты относительно Солнца. Тогда же им была предложена и математическая модель процесса движения – дифференциальные уравнения движения материальной точки. Именно так возникло дифференциальное исчисление. С тех пор метод Ньютона прочно вошел во всю современную физику: исследуются все взаимные связи параметров изучаемого физического процесса; подбирается наиболее подходящее дифференциальное уравнение, задающее эти связи; отыскивается решение этого уравнения; используя начальные или краевые условия задачи, выбирают конкретную форму процесса – задача решена.

Вскоре, однако, выяснилось, что далеко не всегда можно получить решение в аналитической форме, т. е. в виде комбинации элементарных математических функций, или бесконечного степенного ряда (только такое решение приводило к наглядной геометрической картине). В большинстве случаев этого не происходило, так как соответствующие реальному процессу дифференциальные уравнения оказывались *нелинейными* (содержащими произведения переменных и их производных). Именно таким и было первое уравнение для движения планет, полученное Ньютоном. К нашему счастью, оно оказалось решаемым в аналитическом виде.

Через столетие после Ньютона возникает проблема устойчивости солнечной системы, и, как частный случай, – *задача трех тел*. Физически процесс движения трех тел, казалось бы, почти неотличим от движения двух тел, в математическом отношении между ними – пропасть.

В задаче трех тел в трехмерном пространстве возникают девять дифференциальных уравнений второго порядка (3 тела и 3 измерения), требующих для своего решения восемнадцати интегрирований. Десять из них, да и то в неявном виде, можно выразить аналитически, остальные восемь не могут быть выражены в аналитической форме. Решение может быть получено лишь методом численного интегрирования.

Ж. Лагранж в 1772 г., рассматривая некоторые частные случаи движения трех тел, ввел приближенное интегрирование с помощью бесконечных степенных рядов, получаемых разложением функции движения по малым параметрам ее.

В следующем столетии Д. Адамс разработал общий метод численного интегрирования дифференциальных уравнений, но и тогда, при решении задачи трех тел, необходимо было перед численными расчетами произвести соответствующие преобразования координат третьего тела и времени. Решение было очень громоздким.

Предложенный нами метод решения задачи, называемый методом «замороженных коэффициентов», не является собственно интегральным, он применяется в особых случаях, когда представляется возможность вычислить основные параметры, и, считая их на некотором интервале неизменными – «замороженными», – продолжать расчеты далее по известному математическому соотношению. Главным недостатком метода служит накопление погрешностей приближения одного знака – решение довольно быстро «разваливается», в том случае, если оно циклическое. Но за это время уже можно оценить характер движения. Инфинитные движения наблюдаются без помех. Именно в таком плане и построена предлагаемая работа, в которой исследуется в исторической перспективе задача устойчивости движения трех взаимно тяготеющих тел. Много места этой теме отведено в трудах А. Пуанкаре, однако, это не выражение конкретных орбит, а только поиски условий устойчивости движения, то есть его цикличности [3, с. 264].

Следует отметить, что еще в 1774 г. Лагранж указал некоторые *частные* случаи существования аналитического решения задачи трех тел: например, если три тела находятся в вершинах правильного треугольника, то, при соответствующем распределении скоростей движения и масс этих тел, они будут всегда оставаться в вершинах правильного треугольника (сам треугольник будет изменять свои размеры и ориентацию в пространстве).

Впоследствии был найден и другой пример: два тела равной массы движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Третье тело малой массы движется взад-вперед через центр масс перпендикулярно плоскости орбит. Примечательно, что первый случай обнаружен в природе (группы астероидов, движущихся по орбите Юпитера в 60° впереди и позади него) [4, с. 304].

На современных компьютерах можно вывести на экран любое количество подобных траекторий конечного или бесконечного вида, а также отобрать устойчивые движения, что и показано в предлагаемой работе.

Проблема трех тел – это совсем не частный вопрос о движении тел, это проблема общеметодологического характера. Почему так сильно усложнилась задача о движении при введении всего одного тела? Принято утверждать, что здесь проявляется несовершенство математического метода – «виновата математика». Это не так! «Виновата физика» [2, с. 23]. Действительно, закон тяготения $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ – закон *статического поля*, он не описывает движения тел, помещенных в поле. Это движение привносится извне, в частности, в виде уравнения $Fdt = d(mv)$. (Кстати, неспроста именно здесь возникает проблема гравитационной и инерционной массы.) Попытка решить динамическую задачу методами статики и порождает указанное затруднение. К примеру, сравним с ньютоновским полем электромагнитное поле Максвелла: $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\mathrm{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, здесь параметры поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ органически связаны с их движением в пространстве и изменением со временем. В гравитационном поле Ньютона этого нет. Гравитационное поле Ньютона – не физический объект, это математическая абстракция, поэтому в законе тяготения отсутствует скорость распространения силы тяготения, нет близкодействия [1, с. 126].

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТРЕХ ТЕЛАХ

В произвольной системе координат XYZ в точках (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) расположены три тела с массами m_1, m_2, m_3 и расстояниями ρ_{12}, ρ_{23}, ρ_{31} (рис. 1)

$$\rho_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$
$$\rho_{23}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2$$
$$\rho_{31}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 .$$

Заданы также начальные скорости этих тел:

$$V_1(V_{x_1}, V_{y_1}),\ V_2(V_{x_2}, V_{y_2}),\ V_3(V_{x_3}, V_{y_3}) .$$

Силы тяготения между каждой парой тел, в соответствии с законом тяготения, задаются уравнениями:

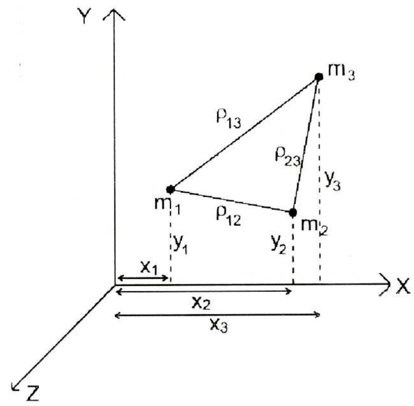

Рис. 1

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= k^2m_1m_2\frac{x_2-x_1}{\rho_{12}^3} + k^2m_1m_3\frac{x_3-x_1}{\rho_{13}^3}\\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= k^2m_1m_2\frac{y_2-y_1}{\rho_{12}^3} + k^2m_1m_3\frac{y_3-y_1}{\rho_{13}^3}\\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= k^2m_1m_2\frac{z_2-z_1}{\rho_{12}^3} + k^2m_1m_3\frac{z_3-z_1}{\rho_{13}^3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= k^2m_2m_3\frac{x_3-x_2}{\rho_{23}^3} + k^2m_2m_1\frac{x_1-x_2}{\rho_{12}^3}\\
m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= k^2m_2m_3\frac{y_3-y_2}{\rho_{23}^3} + k^2m_2m_1\frac{y_1-y_2}{\rho_{12}^3}\\
m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} &= k^2m_2m_3\frac{z_3-z_2}{\rho_{23}^3} + k^2m_2m_1\frac{z_1-z_2}{\rho_{12}^3}
\end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} &= k^2m_3m_1\frac{x_1-x_3}{\rho_{31}^3} + k^2m_3m_2\frac{x_2-x_3}{\rho_{23}^3}\\
m_3\frac{d^2y_3}{dt^2} &= k^2m_3m_1\frac{y_1-y_3}{\rho_{31}^3} + k^2m_3m_2\frac{y_2-y_3}{\rho_{23}^3}\\
m_3\frac{d^2z_3}{dt^2} &= k^2m_3m_1\frac{z_1-z_3}{\rho_{31}^3} + k^2m_3m_2\frac{z_2-z_3}{\rho_{23}^2}
\end{aligned}\right\}$$

k^2 – постоянная тяготения, k называется гауссовой постоянной.

Упростим задачу, не слишком отходя от реальности. Будем считать, что плоскость, проходящая через три материальные точки m_1, m_2, m_3, не меняет своего положения в пространстве. Большей частью так и бывает в действительности, например, для системы тройной звезды. Остальные звезды так далеки, что их влиянием пренебрегают. Тогда мы можем исключить третье измерение «z», что значительно упрощает вычисления, кроме того, экран компьютера рассчитан именно на два измерения [4, с. 345].

Нам известны все величины, находящиеся в правой части уравнений, таким образом, мы можем вычислить $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ для всех трех тел. Но $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ – есть ускорения тел, расположенных в этих точках, и поэтому мы можем для каждого из этих тел найти смещения Δx и Δy, используя закон смещения тела при равноускоренном движении, при этом мы обязаны считать ускорения $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ постоянными, хотя этого нет, так как координаты непрестанно изменяются. Но за небольшой промежуток времени Δt это ускорение с известной степенью приближения считают постоянным, и тогда, используя формулы $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{W}\Delta t$ и $\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{V}_0 \Delta t + \frac{\vec{W}(\Delta t)^2}{2}$ ($\vec{W}$ – ускорения материальных точек), можно вычислить *новые* координаты x и y наших тел, а также *новые* скорости. Исходя из значений новых координат x и y, вычисляем новые значения ρ_{12}, ρ_{23}, ρ_{13}. Тем самым, мы вновь возвращаемся к началу задачи, но уже с новыми значениями переменных. Используя описанный выше прием решения, мы получаем все значения координат и скоростей.

Так как задача трех тел типично астрономическая задача, воспользуемся приемами астрономической практики, где единицы измерения массы, длины и времени вводятся иные, чем принятые в механике: массу тел будем выражать в массах Солнца, $m_\odot = 1$; расстояние – в астрономических единицах, т. е. в средних расстояниях Земли от Солнца, $1{,}496 \cdot 10^8$ км = = 1 а.е.; время – в средних солнечных сутках: 86400 секунд = 1 сутки. Единица скорости 1 километр в секунду принимает следующий вид:

1 км·с$^{-1}$ = $5{,}775 \cdot 10^{-4}$ а.е.·сутки$^{-1}$.

Гауссова постоянная k:

$$k = \frac{2\pi}{365{,}26\sqrt{1 + 2{,}8 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}0172,$$

$$k^2 = 2{,}96 \cdot 10^{-4}.$$

III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заданы 12 *переменных* величин (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) – декартовы координаты трех материальных точек с четырьмя *постоянными*: массами (m_1, m_2, m_3) и гравитационной *постоянной* $k^2 = 2{,}95912 \cdot 10^{-4}$. Каждая из материальных точек обладает *переменной* скоростью, проекции которых на оси координат также заданы: $(V_{x_1}, V_{y_1}); (V_{x_2}, V_{y_2}); (V_{x_3}, V_{y_3})$. Точки ($x_1$, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) выводятся на экран (рис. 2).

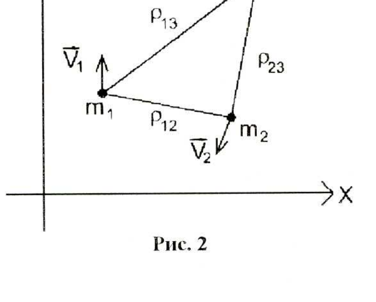

Рис. 2

Закон движения задается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= k^2 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\rho_{21}^3} + k^2 m_3 \frac{x_3 - x_1}{\rho_{31}^3} \\
\ddot{y}_1 &= k^2 m_2 \frac{y_2 - y_1}{\rho_{21}^3} + k^2 m_3 \frac{y_3 - y_1}{\rho_{31}^3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= k^2 m_3 \frac{x_3 - x_2}{\rho_{32}^3} + k^2 m_1 \frac{x_1 - x_2}{\rho_{12}^3} \\
\ddot{y}_2 &= k^2 m_3 \frac{y_3 - y_2}{\rho_{32}^3} + k^2 m_1 \frac{y_1 - y_2}{\rho_{12}^3}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_3 &= k^2 m_1 \frac{x_1 - x_3}{\rho_{13}^3} + k^2 m_2 \frac{x_2 - x_3}{\rho_{23}^3} \\
\ddot{y}_3 &= k^2 m_1 \frac{y_1 - y_3}{\rho_{13}^3} + k^2 m_2 \frac{y_2 - y_3}{\rho_{23}^3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2};$$

$$\rho_{31} = \rho_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)^2}.$$

Новые значения переменных задаются соотношениями:

$$x_1^{(1)} = x_1 + V_{x_1}\Delta t + \frac{\ddot{x}_1 \Delta t^2}{2};$$

$$y_1^{(1)} = y_1 + V_{y_1}\Delta t + \frac{\ddot{y}_1 \Delta t^2}{2};$$

$$V_{x_1}^{(1)} = V_{x_1} + \ddot{x}_1 \Delta t;$$

$$V_{y_1}^{(1)} = V_{y_1} + \ddot{y}_1 \Delta t.$$

$$x_2^{(1)} = x_2 + V_{x_2}\Delta t + \frac{\ddot{x}_2 \Delta t^2}{2};$$

$$y_2^{(1)} = y_2 + V_{y_2}\Delta t + \frac{\ddot{y}_2 \Delta t^2}{2};$$

$$V_{x_2}^{(1)} = V_{x_2} + \ddot{x}_2 \Delta t;$$

$$V_{y_2}^{(1)} = V_{y_2} + \ddot{y}_2 \Delta t.$$

$$x_3^{(1)} = x_3 + V_{x_3}\Delta t + \frac{\ddot{x}_3 \Delta t^2}{2};$$

$$y_3^{(1)} = y_3 + V_{y_3}\Delta t + \frac{\ddot{y}_3 \Delta t^2}{2};$$

$$V_{x_3}^{(1)} = V_{x_3} + \ddot{x}_3 \Delta t;$$

$$V_{y_3}^{(1)} = V_{y_3} + \ddot{y}_3 \Delta t.$$

Δt – соответствующим образом выбранный временной шаг

$$\rho_{12}^{(1)} = \rho_{21}^{(1)} = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})^2 + (y_1^{(1)} - y_2^{(1)})^2};$$

$$\rho_{23}^{(1)} = \rho_{32}^{(1)} = \sqrt{(x_2^{(1)} - x_3^{(1)})^2 + (y_2^{(1)} - y_3)^2};$$

$$\rho_{31}^{(1)} = \rho_{13}^{(1)} = \sqrt{(x_3^{(1)} - x_1^{(1)}) + (y_3^{(1)} - y_1^{(1)})^2}.$$

Пользуясь этими соотношениями, находят новые значения

$x_1^{(1)}, y_1^{(1)}; V_{x_1}^{(1)}, V_{y_1}^{(1)}; x_2^{(1)}, y_2^{(1)}, V_{x_2}^{(1)}, V_{y_2}^{(1)};$
$x_3^{(1)}, y_3^{(1)}, V_{x_3}^{(1)}, V_{y_3}^{(1)}; \rho_{12}^{(1)}, \rho_{23}^{(1)}, \rho_{32}^{(1)}.$

Точки $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}); (x_2^{(1)}, y_2^{(1)}); (x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ выводят на экран.

Весь цикл вычислений повторяют теперь уже с новыми значениями переменных, в результате получают величины $x^{(2)}, y^{(2)}$ и т. д. Вновь полученные точки выводят на экран.

Совокупность выводимых на экран точек определяет траекторию движения трех тел по мере протекания времени $t = \Sigma\Delta t$.

IV. ЧАСТНЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Применим предложенный нами метод для решения частного случая задачи трех тел, рассмотренного еще Лагранжем: три тела равной массы $m_1 = m_2 = m_3$ расположены в вершинах правильного треугольника $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31}$, обладают одинаковыми скоростями движения $V_1 = V_2 = V_3$. При надлежащем подборе величин и направлений этих скоростей тела будут перемещаться по эллипсоидальным орбитам относительно общего центра масс, оставаясь всегда в вершинах правильного треугольника (рис. 3).

Сам треугольник изменяет свои размеры и ориентацию в плоскости расположения тел. В частности, движения могут быть круговыми, параболическими и гиперболическими. При параболических и гиперболических орбитах система распадается, так как тела уходят в бесконечность.

В силу равенства масс и расстояний уравнения (2) упрощаются: положив в них $m_1 = m_2 = m_3 = m$; $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31} = \rho$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{k^2 m}{\rho^3}(x_2 + x_3 - 2x_1) \\ \ddot{y}_1 &= \frac{k^2 m}{\rho^3}(y_2 + y_3 - 2y_1) \\ &\ldots \\ \ddot{x}_3 &= \frac{k^2 m}{\rho^3}(x_1 + x_2 - 2x_3) \\ \ddot{y}_3 &= \frac{k^2 m}{\rho^3}(y_1 + y_2 - 2y_3) \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Обращение к случаю Лагранжа для нас важно тем, что нам уже известен результат решения. Если наш результат совпадает с тем, что получил Лагранж, то можно считать наш метод верным. Предположим, что три тела с массами, равными солнечной ($m = 1$), расположены в вершинах правильного треугольника на расстояниях в 3 астрономических единицы от общего центра масс.

В таком случае расстояние между телами составляет $\rho = 5{,}2$ а.е. Скорости тел одинаковы и перпендикулярны радиусам-векторам тел (рис. 4). Поместим начало декартовых координат в центр масс, а ось X направим параллельно одной из сторон треугольника. Координаты тел, соответственно, примут значения:

$m_1(x_1 = 0; y_1 = -3); m_2(x_2 = -2{,}6; y_2 = 1{,}5); m_3(x_3 = 2{,}6; y_3 = 1{,}5);$
$m = 1;$

$$\frac{k^2 m}{\rho^3} = \frac{2{,}95912 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{5{,}2^3} = 2{,}1 \cdot 10^{-6} \ (\text{сутки}^{-2}).$$

Наиболее удобно для предварительных расчетов выбрать тело 1, так как скорость и ускорение этого тела направлены по осям X и Y

$\ddot{y}_1 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}(1{,}5+1{,}5+2\cdot 3) = 2{,}1\cdot 10^{-6}\cdot 9 =$
$= 1{,}89\cdot 10^{-5}$ (а. е./сутки$^{-2}$); $\ddot{x}_1 = 0$.

Найдем условие для кругового движения точки: центростремительное ускорение для него – $\ddot{y} = \dfrac{V_{\text{кр}}^2}{|y|}$, или $V_{\text{кр}}^2 = |y| \cdot \ddot{y} = 3 \cdot 1{,}89\cdot 10^{-5} = 5{,}68\cdot 10^{-5}$; $V_{\text{кр}} = 7{,}5\cdot 10^{-3}$ (а.е./сутки$^{-2}$).

Период обращения составит $T = \dfrac{2\pi r}{V} =$

$$= \frac{2\pi|y|}{V_{\text{кр}}} = \frac{2\cdot\pi\cdot 3}{7{,}5\cdot 10^{-3}} = 2513{,}3 \text{ суток} = 6{,}88 \text{ лет.}$$

Таким образом, все три тела будут двигаться по общей орбите радиусом в 3 а.е. и периодом $T \approx 7$ лет, всегда оставаясь на одном и том же расстоянии друг от друга $\rho = 5{,}2$ а.е. Равносторонний треугольник, образованный этими телами, не меняя своих размеров, будет вращаться относительно своего центра с периодом $T \approx 7$ лет. Параболическая скорость $V_{\text{пар}} = \sqrt{2} \cdot V_{\text{кр}} = 1{,}06\cdot 10^{-2}$. При такой скорости система распадается, но при этом тела, удаляясь друг от друга, остаются в вершинах все увеличивающегося треугольника.

Решение действительно дает круговое движение [5, с. 250].

Для сравнения с полученным результатом проведено решение для тех же значений x, y, m, но с другим значением начальной скорости: $V = 1{,}2\cdot 10^{-2}$. Это явно гиперболическая скорость. Система распадается.

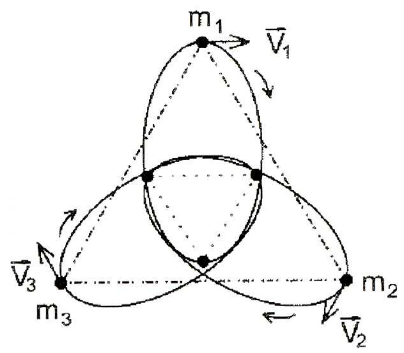

Рис. 3

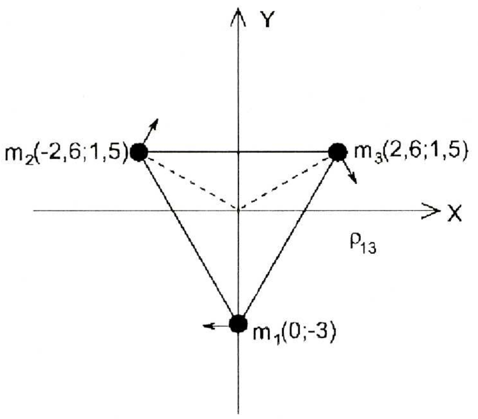

Рис. 4

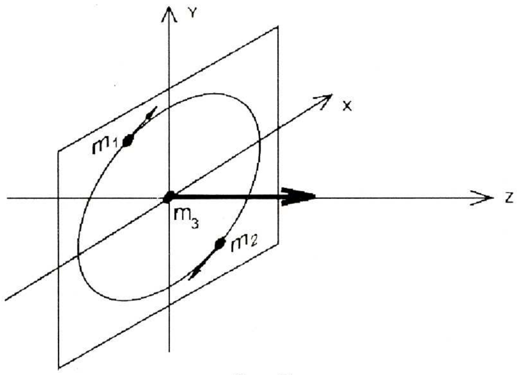

Рис. 5

Рассмотрим второй пример: два тела m_1 и m_2 равной массы движутся по общей круговой орбите с радиусом a, третье тело обладает ничтожно малой массой m_3 (поэтому можно пренебречь гравитационным воздействием этого тела на первые два) и движется прямолинейно, проходя через центр масс двух первых тел перпендикулярно плоскости их орбиты (рис. 5).

При определенной скорости этого тела оно будет совершать колебательное движение относительно центра масс. Найдем уравнение такого движения вдоль оси OZ. Поскольку m_1 и m_2 всегда симметрично относительно центра масс, составляющие ускорения точки m_3 по осям OX ·OY взаимно компенсируют друг друга.

Составляющая ускорений по оси Z:

$$\ddot{z}_1 = -\frac{k^2 m_1}{R^2}\cdot\frac{Z}{R} = -\frac{k^2 m_1}{(\sqrt{a^2+z^2})^3}z.$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{k^2 m_2}{R^2}\cdot\frac{Z}{R} = -\frac{k^2 m_2}{(\sqrt{a^2+z^2})^3}z.$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2$$

Положим $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $a = 3$ а.е. ,

$\ddot{z} = -\dfrac{2\cdot 3{,}95912\cdot 10^{-4}}{(\sqrt{9+z^2})^3}z$ – перед нами дифференциальное уравнение ангармонического колебательного движения.

$$\ddot{z} = -\frac{7{,}92\cdot 10^{-4}}{(\sqrt{9+z^2})^3}z;$$

$$V = V_0 + \ddot{z}\Delta t;$$

$$z = z_0 + V_0\Delta t + \frac{\ddot{z}\Delta t^2}{2}.$$

Положим $V = 10^{-2}$ а.е./сутки.

Решение: на расстоянии 3,5 а.е. от плоскости орбиты тел m_1 и m_2 тело m_3 останавливается; далее, начиная движение вспять, тело проходит через плоскость орбиты, уходит на 3,5 а.е. и возвращается назад – в точном соответствии с предсказанным результатом [5, с. 249].

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемое решение предельно просто, и в то же время оно позволяет проследить на экране эволюцию любых орбит, возникающих при движении трех тел с произвольным расположением и значением начальных скоростей. В частности, можно продемонстрировать все случаи решений Лагранжа для «ограниченной задачи трех тел», можно спроектировать возможные полеты космических станций на Луну, ибо система Земля – Луна – МКС – типичный пример «ограниченной задачи».

VI. ПРИЛОЖЕНИЕ

Частные случаи Лагранжа. В 1772 г. Лагранж доказал, что существует некоторое определенное количество частных случаев в задаче о трех телах, когда эта задача может быть решена совершенно точно [5, с. 254].

Допустим, что имеются две материальные точки m_1 и m_2. Тогда существуют пять точек L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 таких, что L_4 и L_5 образуют с точками m_1 и m_2 равносторонние треугольники, а L_1, L_2, L_3 лежат на одной прямой с точками m_1 и m_2, причем L_3 расположена влево, L_1 между точками, а L_2 вправо от них (рис. 6). Положение точек L_1, L_2, L_3 на прямой m_1, m_2 зависит от соотношений между массами тел.

Эти пять точек именуются *центрами либрации*, они обладают следующими свойствами: если поместить в одну из них третью материальную точку m_3, то все три точки m_1, m_2, m_3 будут двигаться в плоскости, в которой они находятся, так, что *отношения между их взаимными расстояниями* будут сохраняться всегда одними и теми же, причем все три материальные точки будут двигаться в одной плоскости по коническим сечениям одинакового вида (рассмотрено нами в качестве иллюстрации справедливости метода).

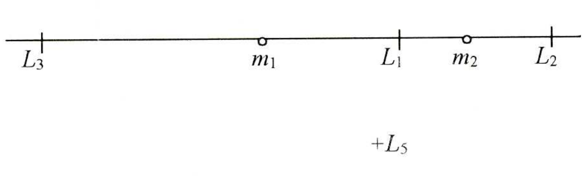

Рис. 6

Ограниченная задача. Допустим, что масса третьей точки m_3 *исчезающе мала*, так что это тело не оказывает влияния на тела m_1 и m_2 Задача, таким образом, носит «ограниченный» характер, вот почему Пуанкаре назвал ее «ограниченной задачей» [3, с. 139].

Свяжем с точками m_1 и m_2 систему координат так, что начало их совпадает с центром масс, а ось абсцисс совпадает с прямой m_1, m_2. Такая система будет вращаться вместе с обращением тел m_1 и m_2 вокруг их общего центра масс. В такой вращающейся системе мы и будем рассматривать орбиты тела m_3 . Если $m_1 = = m_2$, то L_1 лежит посередине между m_1 и m_2. Пять центров либрации будут обладать тогда следующим свойством: третье тело, помещенное в один из них, будет оставаться в этой точке, и скорость его относительно движущейся системы координат будет равна нулю.

В общем случае можно рассматривать периодические движения относительно каждого из центров либрации, тела m_1 или тела m_2, а также для обоих тел m_1 и m_2. При этом всегда возникают два случая: прямое движение, т. е. движение, происходящее в том же направлении, как и обращение тел m_1 и m_2, и обратное движение. Были обнаружены несколько классов периодических движений. Рассмотрим некоторые из них при условии $m_1 = m_2$.

1. Прямые периодические орбиты вокруг точек m_1 и m_2 . Этот класс заключает в себе бесконечное число периодических орбит. На бесконечно далеком расстоянии происходит движение по орбитам, близким к окружности. По мере приближения к телам m_1 и m_2 орбиты становятся все более сплюснутыми. Класс этот заканчивается прямолинейным движением взад и вперед между точками m_1 и m_2 с бесконечно большой скоростью в каждой точке орбиты (рис. 7).

2. Обратные периодические орбиты вокруг точек m_1 и m_2 . На бесконечно больших расстояниях от m_1 и m_2 располагаются круговые орбиты. По мере приближения к m_1 и m_2 орбиты становятся вогнутыми внутрь, затем появляется острие и, наконец, петля, обращенная внутрь орбиты около точек L_4 и L_5. На этой петле образуются затем все более и более мелкие добавочные петли, направленные то внутрь, то наружу (рис. 8).

3. Обратные периодические орбиты (либрации) вокруг точки L_2 (или L_3). Класс начинается точкой, центром либрации, а затем представляет собой сперва бесконечно малые, а потом конечные периодические орбиты вокруг точки L_2 (или точки L_3). Затем получаются орбиты выбрасывания (3) с бесконечно большими скоростями при приближении и удалении от тела m_2. После этих орбит появляются орбиты с петлей (4); в дальнейшем развитии петля расширяется, сама же орбита уменьшается, постепенно получается орбита (5), у которой петля и сама орбита почти одинаковой величины. Позже орбита сливается с петлей и дальнейшее развитие происходит так, что орбита превращается в петлю, а петля превращается в орбиту, и весь дальнейший процесс идет в обратном порядке и заканчивается тем, что орбита превращается в точку L_2, т. е. процесс развития орбит закончится тем же, с чего начался. Мы имеем дело с замкнутым в себе классом орбит (рис. 9).

4. При соответствующем подборе масс m_1 и m_2 возможны и другие циклические решения, что и можно наблюдать с помощью предложенной программы.

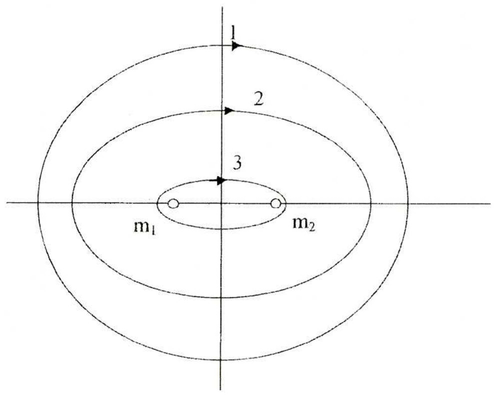

Рис. 7

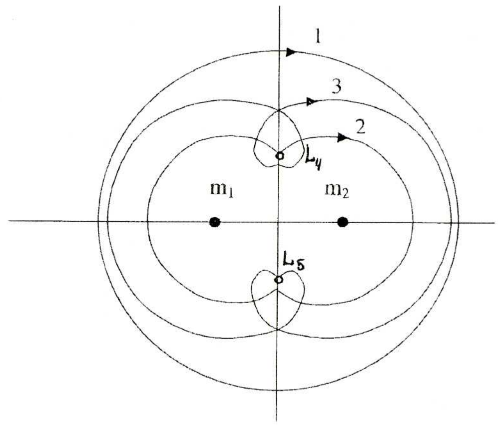

Рис. 8

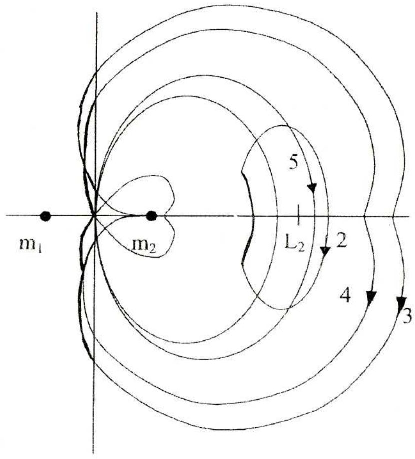

Рис. 9

В Интернете можно найти множество программ для задачи *n*-тел, но это скорее готовые блоки решений малой дидактической ценности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брумберг В.А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.
2. *Визгин В.П.* Релятивистская теория тяготения. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965.
4. *Стремгрен Э. и Стремгрен Б.* Астрономия. М.–Л.: ОГИЗ, 1941.
5. *Чеботарев Г.А.* Аналитические и численные методы небесной механики. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 12 мая 2002 г.