УДК 517.928

О ВЕКТОРНОМ УРАВНЕНИИ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© В.И. Фомин

Ключевые слова: банахово пространство; малое стабилизирующее возмущение; ограниченное решение; операторный дискриминант; точка вырождения; полугруппа; производящий оператор.

В банаховом пространстве находится методом малых стабилизирующих возмущений ограниченное в точке вырождения решение векторного уравнения Эйлера второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами.

В банаховом пространстве E методом малых стабилизирующих возмущений [1] изучается уравнение

$$t^2x''(t)+tAx'(t)+Bx(t)=f(t),\ 0<t<\infty, \qquad (1)$$

где $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$, $C\big([0,\infty);E\big)$ – пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций со значениями в E; $A, B\in N(E)$, $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения.

Рассмотрим стабилизирующее возмущение уравнения (1) малым положительным параметром $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, ε_0- const :

$$(t+\varepsilon)^2x''_\varepsilon(t)+(t+\varepsilon)Ax'_\varepsilon(t)+Bx_\varepsilon(t)=f(t), \qquad (2)$$
$$0\le t<\infty,$$
$$x_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0},\ x'_\varepsilon(0)=x'_{\varepsilon,0}. \qquad (3)$$

Выясним вопрос об условиях разрешимости задачи (2), (3) и сходимости ее решения при $\varepsilon\to 0$ к ограниченному при $t\to+0$ решению уравнения (1).

Исследования, проведенные в случае $A, B\in L(E)$, $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E [2–3], показывают, что вид решения задачи (2), (3) и характер его поведения при $\varepsilon\to 0$ определяются свойствами операторного дискриминанта $Д=(A-I)^2-4B$, I – единичный оператор.

Заметим, что в случае $A, B\in N(E)$ область определения оператора $Д$ имеет вид $D(Д)=D(A^2)\cap D(B)$.

Пусть выполняются следующие условия:

1) $Д=F^2$, где F – некоторый оператор из $N(E)$ (в этом случае операторный дискриминант называется позитивным);

2) характеристические операторы $\Lambda_{1,2}=(1/2)(I-A\mp F)$ являются производящими операторами полугрупп $U_1(t)$, $U_2(t)$ класса C_0;

3) $AFx=FAx$, $x\in D(\Lambda^2)$, где $D(\Lambda^2)::=D(\Lambda_1^2)=D(\Lambda_2^2)=D(\Lambda_1\Lambda_2)=D(\Lambda_2\Lambda_1)=$ $=D(A^2)\cap D(B)\cap D(AF)\cap D(FA)$;

4) $f(t)\in D(\Lambda^2)$ при каждом $t\in[0,\infty)$;

5) $Af(t)$, $Ff(t)$, $A^2f(t)$, $AFf(t)$, $Bf(t)\in$ $\in C\big([0,\infty);E\big)$;

6) $x_{\varepsilon,0}\in D_1$, $x'_{\varepsilon,0}\in D(\Lambda^2)$, где $D_1=D(A^2)\cap D(AB)\cap D(AF)\cap D(FA)\cap D(FB)$;

7) типы ω_1, ω_2 полугрупп $U_1(t)$, $U_2(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\omega=\max\{\omega_1,\omega_2\}<-1; \qquad (4)$$

8) начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon^{-\omega_{1\delta}}\,\big\|x_{\varepsilon,0}\big\|\Big]=0, \qquad (5)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon^{-\omega_\delta}\,\big\|\Lambda_1x_{\varepsilon,0}\big\|\Big]=0, \qquad (6)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon^{1-\omega_\delta}\,\big\|x'_{\varepsilon,0}\big\|\Big]=0, \qquad (7)$$

где $\omega_{1\delta}=\omega_1+\delta$, $\omega_\delta=\omega+\delta$, δ – сколь угодно малое фиксированное положительное число, такое что

$$\omega_\delta<-1. \qquad (8)$$

Замечание 1. Условия, при которых данный оператор H, действующий в банаховом пространстве

E , является квадратом некоторого оператора T , и вид этого оператора T см. в [4].

Замечание 2. Для выполнимости условий (5) – (7) достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subset (0, \varepsilon_0]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялись соответственно следующие неравенства

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \le L_0 \varepsilon^{\omega_{1\delta}+\rho},$$
$$\left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \le K_0 \varepsilon^{\omega_\delta+\rho},$$
$$\left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \le T_1 \varepsilon^{\omega_\delta-1+\rho},$$

где L_0, K_0, T_1 – const ; L_0, K_0, T_1 >0; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Укажем некоторые соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

В силу (4), (8)

$$\omega_{1\delta} < -1, \tag{9}$$
$$\omega_{2\delta} < -1, \tag{10}$$

т. е.

$$-1-\omega_{1\delta} > 0, \tag{11}$$
$$-1-\omega_{2\delta} > 0, \tag{12}$$

где $\omega_{2\delta} = \omega_2 + \delta$.

В силу малости параметра ε будем считать в дальнейшем, что $\varepsilon < 1$.

Из условия (6) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{13}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_{2\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0. \tag{14}$$

Из условия (7) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\varepsilon^{1-\omega_{1\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{15}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\varepsilon^{1-\omega_{2\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{16}$$

Известно [5], что если ω – тип полугруппы $U(t)$ класса C_0, то

$$\left\| U(t) \right\| \le M_\delta \exp(\omega_\delta t), \quad 0 \le t < \infty,$$

где M_δ – const , $M_\delta > 0$; $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Следовательно, в силу условия 2)

$$\left\| U_1(t) \right\| \le M_{1\delta} \exp(\omega_{1\delta} t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{17}$$

$$\left\| U_2(t) \right\| \le M_{2\delta} \exp(\omega_{2\delta} t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{18}$$

где $M_{1\delta}$, $M_{2\delta}$ – const , $M_{1\delta}$, $M_{2\delta} > 0$; δ – сколь угодно малое фиксированное положительное число, такое что выполняются неравенства (9), (10).

Известно [6], что для полугруппы $U(t)$ класса C_0 с производящим оператором Y справедливы соотношения

$$U'(t)x = YU(t)x, \; YU(t)x = U(t)Yx, \quad x \in D(Y),$$

и оператор Y замкнут. Следовательно, в силу условия 2)

$$U_1'(t)x = \Lambda_1 U_1(t)x, \; \Lambda_1 U_1(t)x = U_1(t)\Lambda_1 x, \quad x \in D(\Lambda), \tag{19}$$
$$U_2'(t)x = \Lambda_2 U_2(t)x, \; \Lambda_2 U_2(t)x = U_2(t)\Lambda_2 x, \quad x \in D(\Lambda), \tag{20}$$

где $D(\Lambda) :: = D(\Lambda_1) = D(\Lambda_2) = D(A) \cap D(F)$; и операторы Λ_1, Λ_2 замкнуты.

В дальнейшем неоднократно используются без дополнительных ссылок правила дифференцирования композиции операторной функции и векторной функции [7]

$$\left[A(t)g(t) \right]' = A'(t)g(t) + A(t)g'(t),$$

а также известные неравенства [8]

$$\left\| Qx \right\| \le \left\| Q \right\| \left\| x \right\|, \quad \forall\, Q \in L(E), \; \forall\, x \in E;$$
$$\left\| Q_1 Q_2 \right\| \le \left\| Q_1 \right\| \left\| Q_2 \right\|, \quad \forall\, Q_1, Q_2 \in L(E);$$
$$\left\| \int_a^b h(s)\, ds \right\| \le \int_a^b \left\| h(s) \right\| ds.$$

Кроме того, понадобится частный случай формулы дифференцирования интеграла по параметру:

$$\left[\int_0^{\beta(\eta)} u(s,\eta)\, ds \right]' = \int_0^{\beta(\eta)} \left[u(s,\eta) \right]'_\eta ds + {}$$
$$+ \beta'(\eta)\, u\left(\beta(\eta),\eta\right). \tag{21}$$

Теорема. При выполнении условий 1) – 6) задача (2), (3) при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида

$$x_\varepsilon(t) = U_1\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} + \mathrm{I}_{1\varepsilon}(t) + \mathrm{I}_{2\varepsilon}(t), \tag{22}$$

где

$$\mathrm{I}_{1\varepsilon}(t) = \int_0^t U_2\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) U_1\left(\ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \times$$

$$\times\left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right)\frac{ds}{s+\varepsilon},$$

$$\mathrm{I}_{2\varepsilon}(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)\times\right.$$

$$\left.\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\,d\nu\right]\frac{ds}{s+\varepsilon}.$$

При выполнении условий 7), 8) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_\varepsilon(t)=x_0(t),\ t\in(0,\infty),\qquad(23)$$

где

$$x_0(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\times\right.$$

$$\left.\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}\,d\nu\right]\frac{ds}{s}.\qquad(24)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1). Это решение ограничено при $t\to+0$; если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема справедлива в силу доказываемых ниже лемм 1–4.

Лемма 1. При выполнении условий 1) – 6) задача (2), (3) имеет решение вида (22).

Доказательство. Заменой $t=\varepsilon e^{\tau}-\varepsilon$ задача (2), (3) сводится к стандартной задаче Коши

$$u''_\varepsilon(\tau)+(A-I)\,u'_\varepsilon(\tau)+Bu_\varepsilon(\tau)=g_\varepsilon(\tau),\ 0\le\tau<\infty,\qquad(25)$$

$$u_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0},\ u'_\varepsilon(0)=\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0},\qquad(26)$$

где $u_\varepsilon(\tau)::=x_\varepsilon(\varepsilon e^\tau-\varepsilon)$, $g_\varepsilon(\tau)::=f(\varepsilon e^\tau-\varepsilon)$.

В силу условий 1) – 6) выполняются известные условия разрешимости стандартной задачи Коши [9]. Используя соответствующую формулу из [9], получаем решение задачи (25), (26)

$$u_\varepsilon(\tau)=U_1(\tau)x_{\varepsilon,0}+$$

$$+\int_0^\tau U_2(\tau-\mu)U_1(\mu)(\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1 x_{\varepsilon,0})\,d\mu+\qquad(27)$$

$$+\int_0^\tau\left[\int_0^{\tau-\rho}U_2(\tau-\rho-\mu)U_1(\mu)\,g_\varepsilon(\rho)\,d\mu\right]d\rho.$$

Проведя во втором слагаемом в правой части (27) замену $\mu=\ln\dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, а в третьем слагаемом последовательно замены $\rho=\ln\dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, $\mu=\ln\dfrac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}$ и возвращаясь к переменной t, получаем решение вида (22) задачи (2), (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При выполнении условий 1) – 5) и 7) функция вида (24) определена при любом $t\in(0,\infty)$ и ограничена при $t\to+0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t>0$. В силу сильной непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ и непрерывности $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t)=\frac{1}{s}\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\,U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}\,d\nu\qquad(28)$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta,t]$, Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t)=\int_0^t g_0(s,t)\,ds.\qquad(29)$$

Для этого достаточно доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^t\|\,g_0(s,t)\|\,ds.\qquad(30)$$

Используя оценки (17), (18), получаем

$$\|\,g_0(s,t)\|\le\frac{1}{s}\int_0^{t-s}\left\|U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\right\|\times$$

$$\times\left\|U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\right\|\frac{\|\,f(s)\|}{\nu+s}\,d\nu\le\qquad(31)$$

$$\le\frac{1}{s}\,M_{1\delta}M_{2\delta}\int_0^{t-s}\left(\frac{t}{\nu+s}\right)^{\omega_{2\delta}}\left(\frac{\nu+s}{s}\right)^{\omega_{1\delta}}\frac{\|\,f(s)\|}{\nu+s}\,d\nu=$$

$$=M_{1\delta}M_{2\delta}\,t^{\omega_{2\delta}}s^{-1-\omega_{1\delta}}\,\|\,f(s)\|\int_0^{t-s}(\nu+s)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu;$$

$$\int_0^{t-s}(\nu+s)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu=\frac{(\nu+s)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}\Bigg|_0^{t-s}=$$

$$=\frac{t^{\omega_1-\omega_2}-s^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}.\qquad(32)$$

В силу (31), (32)

$$\|\,g_0(s,t)\|\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2}\,t^{\omega_{2\delta}}\,\|\,f(s)\|\times$$

$$\times \left[t^{\omega_1-\omega_2} s^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right]. \qquad (33)$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1 - \omega_2} t^{\omega_{2\delta}} \times$$

$$\times \int_0^t \| f(s) \| \left[t^{\omega_1-\omega_2} s^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right] ds .$$

Полагая $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| f(s) \|$, получаем

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1 - \omega_2} t^{\omega_{2\delta}} N(t) \times$$

$$\times \int_0^t \left[t^{\omega_1-\omega_2} s^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right] ds . \qquad (34)$$

Проведя непосредственное интегрирование, получаем

$$\int_0^t \left[t^{\omega_1-\omega_2} s^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right] ds = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_{1\delta}\, \omega_{2\delta}} t^{-\omega_{2\delta}} . \qquad (35)$$

В силу (34), (35)

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_{1\delta}\, \omega_{2\delta}} N(t) . \qquad (36)$$

Из (36) следуют сходимости несобственного интеграла (30) и, тем самым, корректность определения функции $x_0(t)$. Учитывая (36), а также неравенство

$$\| x_0(t) \| = \left\| \int_0^t g_0(s,t) \, ds \right\| \le \int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds ,$$

получаем оценку вида

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_{1\delta}\, \omega_{2\delta}} N(t) . \qquad (37)$$

Из (37) видно, что функция $x_0(t)$ ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, т. е. $\sup\limits_{t \in [0,\infty)} N(t) = C < \infty$, то из (37) следует, что $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что в силу (11), (12) правая часть неравенства (33) сходится к нулю при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{S \to +0} g_0(s,t) = 0 . \qquad (38)$$

Лемма 3. При выполнении условий 1) – 8) справедлив предельный переход (23), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются формулами (22), (24).

Доказательство. Покажем вначале, что первые два слагаемых в правой части (22) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Используя оценку (17), получаем

$$\left\| U_1\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_{1\delta} (t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}} \varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \| x_{\varepsilon,0} \| . \qquad (39)$$

В силу (5) правая часть неравенства (39) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, следовательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[U_1\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right] = 0 . \qquad (40)$$

Используя оценки (17), (18), получаем

$$\| \mathrm{I}_{1\varepsilon}(t) \| \le \int_0^t \left\| U_2\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) \right\| \times$$

$$\times \left\| U_1\left(\ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right\| \| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| \frac{ds}{s+\varepsilon} \le$$

$$\le M_{1\delta} M_{2\delta} \| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| \times$$

$$\times \int_0^t \left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{\omega_{2\delta}} \left(\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\omega_{1\delta}} \frac{ds}{s+\varepsilon} =$$

$$= M_{1\delta} M_{2\delta} \| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| \times$$

$$\times \frac{(t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}}}{\varepsilon^{\omega_{1\delta}}} \int_0^t (s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2-1} ds ; \qquad (41)$$

$$\int_0^t (s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2-1} ds = \frac{(s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2} \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{(t+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2} - \varepsilon^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2} . \qquad (42)$$

В силу (41), (42)

$$\| \mathrm{I}_{1\varepsilon}(t) \| \le$$

$$\le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2} \Big[(t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}} \varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| -$$

$$- (t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}} \varepsilon^{-\omega_{2\delta}} \| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| \Big] .$$

В силу неравенства

$$\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \| \le \varepsilon \| x'_{\varepsilon,0} \| + \| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \|$$

получаем

$$\| \mathrm{I}_{1\varepsilon}(t) \| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2} \Big[(t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}} \times$$

$$\times\left(\varepsilon^{1-\omega_{1\delta}}\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|+\varepsilon^{-\omega_{1\delta}}\left\|\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right\|\right)+$$
$$+(t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}}\left(\varepsilon^{1-\omega_{2\delta}}\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|+\varepsilon^{-\omega_{2\delta}}\left\|\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right\|\right)\Big]. \quad (43)$$

В силу (13) – (16) правая часть неравенства (43) сходится к нулю при $\varepsilon\to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_{1\varepsilon}(t)=0\,. \quad (44)$$

Для справедливости (23) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds=\int_0^t g_0(s,t)\,ds\,, \quad (45)$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (28), $g_\varepsilon(s,t)$ имеет вид

$$g_\varepsilon(s,t)=\frac{1}{s+\varepsilon}\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)\times$$
$$\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\,d\nu\,.$$

Для справедливости (45) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\|g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\|ds=0\,. \quad (46)$$

Запишем разность $g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)=\int_0^\varepsilon\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa\,d\kappa\,, \quad (47)$$

где

$$h(\kappa,\nu,s,t)=\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\times$$
$$\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,d\nu\,.$$

Запишем $h(\kappa,\nu,s,t)$ в виде

$$h(\kappa,\nu,s,t)=\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s} p(\kappa,\nu,s,t)\,d\nu\,,$$

где

$$p(\kappa,\nu,s,t)=U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\times$$
$$\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,.$$

Тогда

$$\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa=-\frac{1}{(s+\kappa)^2}\int_0^{t-s} p(\kappa,\nu,s,t)\,d\nu+$$
$$+\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa\,d\nu\,. \quad (48)$$

Из (19) видно, что

$$U_1(t)x\in D(\Lambda)\,,\ x\in D(\Lambda)\,. \quad (49)$$

В силу условия 4)

$$f(s)\in D(\Lambda)\,. \quad (50)$$

В силу (49), (50)

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\in D(\Lambda)\,.$$

Следовательно, при нахождении производной $\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa$ можно использовать соотношения (19), (20):

$$\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa=$$
$$=U'_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\left[-\frac{t-s-\nu}{t+\kappa}\right]\times$$
$$\times U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$
$$+U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U'_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\times$$
$$\times\left[-\frac{\nu}{s+\kappa}\right]\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$
$$+U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\times$$
$$\times\left[-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right]=$$
$$=U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\times$$
$$\times\left[-\frac{t-s-\nu}{(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\,\Lambda_2 f(s)-\right.$$
$$\left.-\frac{\nu}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_1 f(s)\;-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right]. \quad (51)$$

В силу (48), (51)

$$\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa=$$
$$=\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\times$$

$$\times\left[-\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}-\right.$$

$$-\frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_2 f(s)-$$

$$-\frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_1 f(s)-$$

$$\left.-\frac{f(s)}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right]d\nu\,.$$

Тогда

$$\left\|\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa}\right\|\le$$

$$\le\int\limits_0^{t-s}\left[\left\|U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\|\left\|U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\|\cdot\times\right.$$

$$\times\cdot\left[\frac{\|f(s)\|}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}+\right.$$

$$+\frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_2 f(s)\|+$$

$$+\frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_1 f(s)\|+$$

$$\left.\left.+\frac{\|f(s)\|}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right]\right]d\nu\,. \qquad (52)$$

В силу (17), (18)

$$\left\|U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\|\le M_{2\delta}\left(\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)^{\omega_{2\delta}}, \qquad (53)$$

$$\left\|U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\|\le M_{1\delta}\left(\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_{1\delta}}. \qquad (54)$$

Далее,

$$\frac{t-s-\nu}{(t+\kappa)(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}=$$

$$=\frac{t-s-\nu}{t+\kappa}\;\frac{1}{s+\kappa}\;\frac{1}{\nu+s+\kappa}\;\frac{1}{\nu+s+\kappa}\le$$

$$\le\frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,, \qquad (55)$$

$$\frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}=$$

$$=\frac{1}{(s+\kappa)^2}\;\frac{\nu}{\nu+s+\kappa}\;\frac{1}{\nu+s+\kappa}\le$$

$$\le\frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,, \qquad (56)$$

$$\frac{1}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}=\frac{1}{s+\kappa}\;\frac{1}{\nu+s+\kappa}\;\frac{1}{\nu+s+\kappa}\le$$

$$\le\frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,. \qquad (57)$$

В силу (52) – (57)

$$\left\|\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa}\right\|\le M_{1\delta}M_{2\delta}\frac{(t+\kappa)^{\omega_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\omega_{1\delta}}}\times$$

$$\times\left[2\|f(s)\|+\|\Lambda_1 f(s)\|+\|\Lambda_2 f(s)\|\right]\cdot\times$$

$$\times\cdot\int\limits_0^{t-s}(\nu+s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu\,.$$

Полагая $N_1(t)=\max\limits_{0\le s\le t}\|\Lambda_1 f(s)\|$, $N_2(t)=\max\limits_{0\le s\le t}\|\Lambda_2 f(s)\|$, получаем

$$\left\|\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa}\right\|\le M_{1\delta}M_{2\delta}\times$$

$$\times\left[2N(t)+N_1(t)+N_2(t)\right]\frac{(t+\kappa)^{\omega_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\omega_{1\delta}}}\cdot\times$$

$$\times\cdot\int\limits_0^{t-s}(\nu+s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu\,. \qquad (58)$$

Имеем:

$$\int\limits_0^{t-s}(\nu+s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu=$$

$$=\frac{(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}-(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}\,. \qquad (59)$$

Заметим, что выражение в правой части (59) неотрицательно. Тогда

$$\frac{(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}-(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}=$$

$$=\left|\frac{(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}-(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}\right|=$$

$$=\frac{\left|(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}-(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}\right|}{|\omega_1-\omega_2|}\le$$

$$\le\frac{(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}+(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}}{|\omega_1-\omega_2|}\,. \qquad (60)$$

В силу (59), (60)

$$\int\limits_0^{t-s}(\nu+s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu\le$$

$$\leq \frac{(t+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}+(s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2}}{|\omega_1-\omega_2|}. \quad (61)$$

В силу (58), (61)

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| \leq \; \leq P(t)\Big[(t+\kappa)^{\omega_{1\delta}}(s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}} +$$

$$+(t+\kappa)^{\omega_{2\delta}}(s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} \Big], \quad (62)$$

где

$$P(t)=\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{|\omega_1-\omega_2|}\left[\,2N(t)+N_1(t)+N_2(t)\,\right].$$

В силу (9), (10)

$$(t+\kappa)^{\omega_{1\delta}} \leq t^{\omega_{1\delta}},\ (t+\kappa)^{\omega_{2\delta}} \leq t^{\omega_{2\delta}}. \quad (63)$$

В силу (62), (63)

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| \leq$$

$$\leq P(t)\Big[t^{\omega_{1\delta}}(s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}}+t^{\omega_{2\delta}}(s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} \Big]. \quad (64)$$

Из (47) следует, что

$$\| g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t) \| \leq \int_0^{\varepsilon} \left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| d\kappa. \quad (65)$$

В силу (64), (65)

$$\| g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t) \| \leq$$

$$\leq P(t)\left[t^{\omega_{1\delta}}\int_0^{\varepsilon}(s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}}\ d\kappa+\right.$$

$$\left.+t^{\omega_{2\delta}}\int_0^{\varepsilon}(s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}}\,d\kappa \right]. \quad (66)$$

Далее,

$$\int_0^{\varepsilon}(s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}}\ d\kappa=$$

$$=\frac{1}{-1-\omega_{1\delta}}\Big[\ (s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{1\delta}}\ \Big], \quad (67)$$

$$\int_0^{\varepsilon}(s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}}\ d\kappa=$$

$$=\frac{1}{-1-\omega_{2\delta}}\Big[\ (s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}}\ \Big]. \quad (68)$$

В силу (66) – (68)

$$\| g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t) \| \leq \frac{P(t)t^{\omega_{1\delta}}}{-1-\omega_{1\delta}}\times$$

$$\times\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{1\delta}} \Big]+$$

$$+\frac{P(t)t^{\omega_{2\delta}}}{-1-\omega_{2\delta}}\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}} \Big].$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t) \|\, ds \leq$$

$$\leq\frac{P(t)t^{\omega_{1\delta}}}{-1-\omega_{1\delta}}\int_0^t\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{1\delta}} \Big]ds+$$

$$+\frac{P(t)t^{\omega_{2\delta}}}{-1-\omega_{2\delta}}\int_0^t\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}} \Big]ds. \quad (69)$$

В силу (9), (10) $-\omega_{1\delta}>1,\ -\omega_{2\delta}>1$. Тогда

$$\int_0^t\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{1\delta}} \Big]ds=$$

$$=\frac{1}{-\omega_{1\delta}}\Big[(t+\varepsilon)^{-\omega_{1\delta}}-\varepsilon^{-\omega_{1\delta}}-t^{-\omega_{1\delta}} \Big] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0, \quad (70)$$

$$\int_0^t\Big[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}} \Big]ds=$$

$$=\frac{1}{-\omega_{2\delta}}\Big[(t+\varepsilon)^{-\omega_{2\delta}}-\varepsilon^{-\omega_{2\delta}}-t^{-\omega_{2\delta}} \Big] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0. \quad (71)$$

Из (69) – (71) следует соотношение (46). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При выполнении условий 1) – 5) и 7) предельная функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (24), является решением уравнения (1).

Доказательство. Запишем $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t)=\int_0^t g_0(s,t)\,ds,$$

где

$$g_0(s,t)=\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu,$$

$$w(\nu,s,t)=U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{s(\nu+s)}.$$

Найдем $x_0'(t)$. Известно [7], что применение формулы (21) корректно, если подынтегральная функция $u(s,\eta)$ и ее производная $\left[u(s,\eta)\right]'_{\eta}$ непрерывны по переменным s, η. Покажем, что подынтегральная функция $g_0(s,t)$ и ее производная $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ непрерывны по переменным s, t. Используя (38), доопределим $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s\to+0} g_0(s,t) = 0 .$$

Следовательно, $g_0(s,t)$ непрерывна по s, t.
В силу (49), (50)

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{s(\nu+s)} \in D(\Lambda) .$$

Следовательно, при нахождении производной $[\, w(\nu,s,t)\,]'_t$ можно использовать соотношения (20):

$$[\, w(\nu,s,t)\,]'_t = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{t s(\nu+s)} . \quad (72)$$

В силу непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ функция $w(\nu,s,t)$ и ее производная $[\, w(\nu,s,t)\,]'_t$ непрерывны по ν, t. Следовательно, при нахождении производной $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ можно использовать формулу (21):

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t = \int_0^{t-s} [\, w(\nu,s,t)\,]'_t \, d\nu + w(t-s,\, s,\, t) . \quad (73)$$

Запишем (72) в виде

$$[\, w(\nu,s,t)\,]'_t = \frac{1}{t}\,\Lambda_2\, w(\nu,s,t) . \quad (74)$$

Учитывая, что $U_2(0) = I$, получаем

$$w(t-s,\, s,\, t) = \frac{1}{t}\, U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} . \quad (75)$$

В силу (73) – (75)

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t = \frac{1}{t}\,\Lambda_2 \int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\, d\nu +$$
$$+\frac{1}{t}\, U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t = \frac{1}{t}\,\Lambda_2\, g_0(s,t) + \frac{1}{t}\, U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} . \quad (76)$$

Используя оценку (17), получаем

$$\left\| U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} \right\| \le M_{1\delta}\, t^{\omega_{1\delta}} \,\|\, f(s)\,\|\, s^{-1-\omega_{1\delta}} . \quad (77)$$

В силу (11) правая часть неравенства (77) сходится к нулю при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{s\to+0}\left[U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right] = 0 . \quad (78)$$

В силу (38), (78) из (76) следует, что

$$\lim_{s\to+0} [\, g_0(s,t)\,]'_t = 0 . \quad (79)$$

Соотношение (79) позволяет доопределить производную $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t \,\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0} [\, g_0(s,t)\,]'_t = 0 .$$

Таким образом, производная $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ непрерывна по переменным s, t. Следовательно, при нахождении производной $x_0'(t)$ можно применить формулу (21):

$$x_0'(t) = \int_0^t [\, g_0(s,t)\,]'_t \, ds + g_0(t,t)$$

или с учетом того, что $g_0(t,t) = 0$,

$$x_0'(t) = \int_0^t [\, g_0(s,t)\,]'_t \, ds . \quad (80)$$

Чтобы применить формулу (21) при нахождении $x_0''(t)$, нужно показать, что производная $[\, g_0(s,t)\,]''_{t^2}$ непрерывна по переменным s, t.
В силу (72), (73), (75)

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t =$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)}\, d\nu +$$
$$+\frac{1}{t}\, U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} . \quad (81)$$

В силу сильной непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ подынтегральная функция

$$q(\nu,s,t) = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)}$$

непрерывна по переменным ν, t. В силу условия 4)

$$\Lambda_2 f(s) \in D(\Lambda). \qquad (82)$$

В силу (49), (82)

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)} \in D(\Lambda).$$

Следовательно, при нахождении производной $\left[\, q(\nu,s,t)\,\right]'_t$ можно использовать соотношения (20):

$$\left[\, q(\nu,s,t)\,\right]'_t = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2^2 f(s)}{t\,s(\nu+s)}. \quad (83)$$

В силу непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ производная $\left[\, q(\nu,s,t)\,\right]'_t$ непрерывна по переменным ν, t. Следовательно, при дифференцировании интеграла в правой части (81) по переменной t можно использовать формулу (21). В силу (50) при нахождении производной второго слагаемого в правой части (81) по переменной t можно использовать соотношения (19). Получаем:

$$\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2}\int_0^{t-s} q(\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^{t-s}\left[\, q(\nu,s,t)\,\right]'_t\,d\nu + \frac{1}{t}\,q(t-s,\,s,\,t) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\,U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2}\,\Lambda_1 U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \qquad (84)$$

Заметим, что

$$q(\nu,s,t) = \Lambda_2\, w(\nu,s,t). \qquad (85)$$

В силу (83)

$$\left[\, q(\nu,s,t)\,\right]'_t = \frac{1}{t}\,\Lambda_2^2\, w(\nu,s,t). \qquad (86)$$

Так как $U_2(0) = I$, то

$$q(t-s,\,s,\,t) = \frac{1}{t}\,\Lambda_2 U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \qquad (87)$$

В силу (84) – (87)

$$\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2}\,\Lambda_2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t^2}\,\Lambda_2^2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t^2}\,\Lambda_2 U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2}\,(\Lambda_1 - I)U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2} = \frac{1}{t^2}\left[\left(\Lambda_2^2 - \Lambda_2\right)g_0(s,t) +\right.$$

$$\left. +\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 - I\right)U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right]. \qquad (88)$$

В силу (38), (78) из (88) следует, что

$$\lim_{s\to+0}\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2} = 0.$$

Следовательно, производную $\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2}$ можно доопределить по непрерывности в нуле:

$$\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2}\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2} = 0.$$

Значит, производная $\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2}$ непрерывна по переменным s, t, и при нахождении производной $x_0''(t)$ можно применить формулу (21).

Учитывая равенство (80), получаем

$$x_0''(t) = \int_0^t\left[\, g_0(s,t)\,\right]''_{t^2}\,ds + \left[\, g_0(s,t)\,\right]'_t\Big|_{s=t}. \qquad (89)$$

Учитывая равенства $g_0(t,t) = 0$, $U_1(0) = I$, получаем из (76)

$$\left[\, g_0(s,t)\,\right]'_t\Big|_{s=t} = \frac{f(t)}{t^2}. \qquad (90)$$

В силу (88) – (90)

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\left[f(t) + \left(\Lambda_2^2 - \Lambda_2\right)\int_0^t g_0(s,t)\,ds +\right.$$

$$\left. +\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 - I\right)\int_0^t U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds\right],$$

т. е.

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\left[f(t) + \left(\Lambda_2^2 - \Lambda_2\right)x_0(t) +\right.$$

$$\left. +\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 - I\right)\,\mathrm{I}(t)\right], \qquad (91)$$

где

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^t U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds .$$

В силу (76), (80)

$$x_0'(t) = \frac{1}{t}\left[\Lambda_2 x_0(t) + \mathrm{I}(t)\right] . \qquad (92)$$

Используя формулы (91), (92), имеем

$$t^2 x_0''(t) + t\,A x_0'(t) + B x_0(t) = f(t) + (\Lambda_2^2 - \Lambda_2) x_0(t) +$$
$$+ (\Lambda_1 + \Lambda_2 - I)\mathrm{I}(t) + A\Lambda_2 x_0(t) + A\mathrm{I}(t) + B x_0(t) =$$
$$= f(t) + \left[\Lambda_2^2 + (A - I)\Lambda_2 + B\right] x_0(t) +$$
$$+ \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 - I + A\right)\mathrm{I}(t) = f(t)$$

в силу того, что $\Lambda_2^2 + (A - I)\Lambda_2 + B = 0$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 - I + A = 0$, ибо Λ_2 – корень характеристического уравнения $\Lambda^2 + (A - I)\Lambda + B = 0$, и $\Lambda_1 + \Lambda_2 = I - A$. Лемма 4 доказана. Теорема доказана.

Случай нулевого операторного дискриминанта исследован в [10].

Результаты настоящей работы анонсированы в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* Метод малых регулярных возмущений при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1712.
2. *Фомин В.И.* Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1568-1569.
3. *Фомин В.И.* Об уравнении Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 483-488.
4. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М., 1988. С. 169.
5. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М., 1980. С. 211.
6. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М., 1995. С. 17.
7. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. С. 22, 162.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980. С. 123, 127, 265.
9. *Фомин В.И.* Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 427-428.
10. *Фомин В.И.* Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами и нулевым операторным дискриминантом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1999. Т. 4. Вып. 2. С. 67-69.
11. *Фомин В.И.* О представлении решения векторного уравнения Эйлера второго порядка в терминах полугрупп // Понтрягинские чтения – XXI: материалы Воронеж. весенней математ. шк. Воронеж, 2010. С. 236-238.

Поступила в редакцию 16 февраля 2012 г.

Fomin V.I. ON VECTOR EQUATION OF EULER OF SECOND ORDER WITH UNBOUNDED OPERATOR COEFFICIENTS

In the Banach space by the method of small stabilization perturbation we can find the solution of the equation of Euler of Second Order with Unbounded Operator Coefficients bounded in a generate point.

Key words: Banach space; small stabilization perturbation; bounded solution; operator discriminate; degenerate point; semigroup; generator.