УДК 510.6

МЕТОДЫ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

© В.И. Левин

Levin V.I. Methods of continuous logic in the theory of informational systems. The article discusses the issue of formalizing actions with data in the informational files. For this, the author proposes a mathematical apparatus of continuous logic and logical determinants. It has been used in developing different algorithms of ordered search in disordered and semi-ordered files.

1. Функционирование информационных систем (ИС), независимо от области их применения – техника, экономика, образование, управление – связано с выполнением некоторых типовых операций над данными: поиск данных по заданному признаку, их упорядочение в определенном смысле, их объединение или разъединение, включение новых данных в уже имеющийся информационный массив, исключение некоторых данных из массива и другие. Существующие методы выполнения этих операций получены, как правило, эвристическим путем и ориентированы на те или иные конкретные структуры данных в ИС [1]. Между тем, эффективность выполнения указанных операций существенно зависит от того, насколько формализованно были получены алгоритмы их выполнения и как глубоко были оптимизированы эти алгоритмы. Таким образом, важное значение приобретает разработка математического аппарата для формализованного представления, анализа и синтеза алгоритмов выполнения различных операций с массивами данных в ИС. Этот аппарат должен быть достаточно универсальным, не связанным с определенной структурой данных или определенными операциями над данными. Таким математическим аппаратом может быть непрерывная логика (НЛ) и ее многомерное обобщение – исчисление логических определителей (ЛО) [2, 3].

2. Пусть $C = [A, B]$ – замкнутый интервал вещественных чисел с центром $M = 0{,}5(A+B)$. Тогда алгебра НЛ есть система $\{C, \vee, \wedge, \overline{}\}$, где логические операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\overline{}$ определяются в виде

$$a \vee b = \max(a,b), \quad a \wedge b = \min(a,b), \qquad \overline{a} = 2M - a, \quad \forall a,b \in C. \tag{1}$$

Алгебра НЛ подчиняется тем же законам, что и булева алгебра, кроме законов исключенного третьего и противоречия, которые здесь не действуют и заменяются более сложными законами [2–6]. Пусть $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ – неупорядоченное числовое множество из n чисел a_i. Представим его в виде матрицы-столбца

$$A_n = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ -- \\ a_n \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

Упорядочим элементы множества A_n по возрастанию: $a^{(1)} \le a^{(2)} \le \dots \le a^{(n)}$. Функция (отображение) $A_n \to a^{(r)}$ называется ЛО-столбцом ранга r от матрицы A_n и обозначается

$$A_n^r = \left| \begin{matrix} a_1 \\ -- \\ a_n \end{matrix} \right|^{(r)}. \tag{3}$$

ЛО-столбец A_n^r есть числовая характеристика матрицы-столбца A_n, подобная алгебраическому определителю квадратной матрицы из линейной алгебры. ЛО-столбец A_n^r выражается через свои элементы $a_1, \dots, a_n$ функцией в виде суперпозиции операций НЛ $\vee$ и $\wedge$ [2–5]

$$\begin{aligned} A_n^r &= \bigvee_{i_1 \ne \dots \ne i_{n-r+1}} (a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_{n-r+1}}), \\ A_n^r &= \bigwedge_{i_1 \ne \dots \ne i_r} (a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_r}), \quad a_{i_k} \in A_n \end{aligned} \tag{4}$$

Первая формула (4) выражает ЛО в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), вторая – в конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

3. Рассмотрим неупорядоченный информационный массив из n чисел $a_1, \dots, a_n$. Пусть нужно найти r-й в порядке возрастания элемент заданного массива $a^{(r)}$. Представим этот массив в виде множества $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, а последнее – в виде матрицы-столбца (2). По определению, искомый элемент $a^{(r)}$ равен ЛО A_n^r ранга r от матрицы-столбца A_n вида (2), т. е.

$$a^{(r)} = A_n^r = \left| \begin{matrix} a_1 \\ -- \\ a_n \end{matrix} \right|^{(r)}. \tag{5}$$

Раскроем в формуле (5) ЛО согласно его ДНФ-представлению (4). В результате получим выражение $a^{(r)}$ в виде некоторой функции НЛ. Эта функция является поисковой, она представлена в ДНФ и задает двухступенчатый дизъюнктивный алгоритм поиска. По этому алгоритму для отыскания элемента $a^{(r)}$ надо в заданном n-элементном множестве A_n сделать следующее: 1) выделить все возможные подмножества по $n-r+1$ различных элементов и найти в каждом подмножестве минимальный элемент $a_{i,\min}$; 2) выбрать максимальный из всех элементов $a_{i,\min}$ – это и будет $a^{(r)}$. Если раскрыть в (5) ЛО согласно его КНФ-представлению (4), то получим выражение $a^{(r)}$ в виде другой поисковой функции НЛ. Эта функция представлена в КНФ и задает следующий двухступенчатый конъюнктивный алгоритм поиска элемента $a^{(r)}$ в n-элементном множестве A_n: 1) выделить все возможные подмножества по r различных элементов и найти в каждом подмножестве максимальный элемент $a_{i,\max}$; 2) выбрать минимальный из всех элементов $a_{i,\max}$ – это и будет $a^{(r)}$.

Трудоемкость поиска произвольного порядкового элемента $a^{(r)}$ в неупорядоченном массиве с n элементами с помощью описанных алгоритмов совпадает с трудоемкостью раскрытия соответствующего ЛО A_n^r и измеряется общим числом операций НЛ в формулах раскрытия (4). Эта трудоемкость растет экспоненциально с увеличением n [2]. Однако существенно не это, а то, что от указанных неэкономных алгоритмов можно формализованно переходить к более экономным или даже минимальным по трудоемкости алгоритмам, используя правила эквивалентных преобразований логических поисковых функций, основанные на законах НЛ [2].

4. Рассмотрим частично упорядоченный информационный массив из n чисел, состоящий из q полностью упорядоченных подмассивов, с неизвестными отношениями между элементами различных подмассивов. Найдем r-й в порядке возрастания элемент этого массива $a^{(r)}$. Представим заданный массив в виде частично упорядоченного множества A_q, с q упорядоченными подмножествами $Q_1,\dots,Q_q$

$$A_q=\{\underbrace{a_{11},\dots,a_{1m_1}}_{Q_1};\underbrace{a_{21},\dots,a_{2m_2}}_{Q_2};\ \dots\ ;\underbrace{a_{q1},\dots,a_{qm_q}}_{Q_q}\},$$
$$a_{i1}<a_{i2}<\dots<a_{im_i},\ i=\overline{1,q},\ \sum_{i=1}^{q}m_i=n. \tag{6}$$

В свою очередь, множество A_q можно представить в виде квазиматрицы

$$A_q=\left\|\begin{array}{ccc}a_{11}&\dots&a_{1m_1}\\ \hdashline a_{q1}&\dots&a_{qm_q}\end{array}\right\|, \tag{7}$$

которая отличается от обычной прямоугольной матрицы неодинаковыми длинами строк и упорядоченностью элементов в строках по возрастанию согласно (6). ЛО A_q^r ранга r от квазиматрицы A_q вводится аналогично ЛО-столбцу A_n^r, а именно, $A_q^r : A_q \to a^{(r)}$, и обозначается

$$A_q^r=\left|\begin{array}{ccc}a_{11}&\dots&a_{1m_1}\\ \hdashline a_{q1}&\dots&a_{qm_q}\end{array}\right|^{(r)}. \tag{8}$$

ЛО A_q^r есть числовая характеристика квазиматрицы A_q. Он выражается через свои элементы a_{ij} функцией – суперпозицией операций НЛ $\vee$ и $\wedge$ – в двух различных формах

$$A_q^r=\bigvee_{\sum_{s=1}^{q}i_s=r+q-1}(a_{1i_1}\wedge\dots\wedge a_{qi_q})-\text{ДНФ};$$
$$A_q^r=\bigwedge_{\substack{i_1\le m_1,\dots,i_q\le m_q,\\ 0\le i_s\le r,\ \sum_{s=1}^{q}i_s=r}}(a_{1i_1}\vee\dots\vee a_{qi_q})-\text{КНФ}. \tag{9}$$

По определению, искомый элемент $a^{(r)}$ равен ЛО A_q^r ранга r от квазиматрицы A_q вида (7), т. е.

$$a^{(r)}=A_q^r=\left|\begin{array}{ccc}a_{11}&\dots&a_{1m_1}\\ \hdashline a_{q1}&\dots&a_{qm_q}\end{array}\right|^{(r)}. \tag{10}$$

Раскрыв в формуле (10) ЛО согласно его ДНФ-представлению (9), получим поисковую функцию НЛ для нахождения $a^{(r)}$. Соответствующий двухступенчатый дизъюнктивный алгоритм требует для отыскания элемента $a^{(r)}$ в множестве A_q сделать следующее: 1) выделить все возможные подмножества множества A_q, содержащие по одному элементу от каждого упорядоченного подмножества Q_i, так, чтобы сумма вторых индексов элементов любого выделенного подмножества Σi_s равнялась $r+q-1$ (если из условия на сумму Σi_s для некоторого i_k получится $i_k>m_k$, то элемент подмножества Q_k в выделяемое подмножество не включается); определить в каждом выделенном подмножестве минимальный элемент $a_{i,\min}$; 2) выбрать максимальный из всех элементов $a_{i,\min}$ – это и будет $a^{(r)}$. Раскрыв ЛО в (10) согласно его КНФ-представлению (9), получим другую поисковую функцию НЛ для нахождения $a^{(r)}$. Соответствующий двухступенчатый конъюнктивный алгоритм требует для отыскания элемента $a^{(r)}$ в множестве A_q: 1) выделить в A_q все возможные подмножества, содержащие по одному элементу от каждого упорядоченного подмножества Q_i, так, чтобы сумма Σi_s вторых индексов элементов любого выделенного подмножества равнялась r (индексы i_s не должны превосходить m_s и r); определить в каждом выделенном подмножестве максимальный элемент $a_{i,\max}$; 2) выбрать минимальный из всех элементов $a_{i,\max}$ – это и будет $a^{(r)}$. Трудоемкость поиска произвольного порядкового элемента $a^{(r)}$ в частично упорядоченном массиве с q полностью упорядоченными подмассивами с помощью приведенных алгоритмов есть трудоемкость раскрытия соответствующего ЛО A_q^r и измеряется числом операций НЛ в формулах раскрытия (9). Эта трудоемкость растет экспоненциально с увеличением q. Однако достоинство нашего подхода в том, что от указанных неэкономных алгоритмов можно формализованно переходить к более экономным, используя правила эквивалентных преобразований логических поисковых функций, основанные на законах НЛ [2].

5. Для более сложных структур информационных массивов алгоритмы выполнения типовых операций над данными синтезируются аналогично. Решающим моментом синтеза остается формирование ЛО, соответствующего рассматриваемым структуре и операции, и раскрытие этого ЛО по формуле, полученной из общих формул раскрытия путем учета особенностей данного ЛО. Полученное в результате раскрытия выражение НЛ будет определять некоторый алгоритм выполнения необходимой операции.

6. Основные достоинства предложенного подхода – возможность формализованного 1) представления типовых операций в массивах; 2) анализа этих операций; 3) синтеза алгоритмов выполнения операций; 4) преобразования этих алгоритмов для повышения их эффективности (снижение трудоемкости) или придания нужной формы (для распараллеливания и др.); 5) перехода от одной постановки задачи к другой (например, от точной к приближенной).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартин Дж.* Организация баз данных в вычислительных системах. М.: Мир, 1980.
2. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982.
3. *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем. М.: Наука, 1987.
4. *Левин В.И.* Непрерывная логика. Обобщения, применения. I, II // Автоматика и телемеханика. 1990. № 8, 9.
5. *Левин В.И.* Непрерывная логика и ее применение. М.: Машиностроение, 2000. (Приложение к журн. «Информационные технологии». 2000. № 11).
6. *Levin V.I.* Continuous Logic. I, II // Kybernetes. 2000. Vl. 29. № 9/10.

Поступила в редакцию 19 февраля 2002 г.