УДК 517.939

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Т.В. Жуковская

Zhukovskaya T.V. Solvability of Volterra equations in Banach space. The conditions of solvability of the equation $x=Ax$ are obtained for operator A of Volterra type acting in space $W_{[a,b]}$ of real measurable functions. In this note Volterra operator A is considered in sense: let E be such system of sets $e_\tau \subset [a,b]$, that $\forall \tau \in [0, b-a]$ $mes\, e_\tau = \tau$, $\forall \gamma$ $\tau < \gamma \Rightarrow e_\tau \subset e_\gamma$; suppose, that, for all $x, y \in W_{[a,b]}$ and all $e_\tau \in E$ if $x(t) = y(t)$, $t \in e_\tau$, then $(Ax)(t) = (Ay)(t)$, $t \in e_\tau$.

В теории интегральных уравнений особое место занимают уравнения Вольтерра (уравнения с последействием), типичные при описании процессов, в которых состояние системы в каждый момент времени зависит от состояния системы в предшествующие моменты. На специфические особенности «последействия» обратили внимание В. Вольтерра, А.Н. Тихонов, Н.Н. Красовский, основополагающие идеи которых [1] легли в основу многочисленных исследований. В настоящей работе рассматриваются операторы, действующие в произвольных полных функциональных пространствах, родственные по определению и свойствам операторам Вольтерра.

Пусть E – такая система множеств $e_\tau \subset [a,b]$, что

$$\forall \tau \in [0, b-a] \;\; mes\, e_\tau = \tau, \;\; \forall \tau, \gamma \;\; \tau < \gamma \Rightarrow e_\tau \subset e_\gamma .$$

Рассмотрим некоторое банахово пространство $W_{[a,b]}$ вещественных измеримых на $[a,b]$ функций. Будем предполагать, что для любого множества $e_\tau \in E$, если все члены некоторой сходящейся последовательности $x_i \in W_{[a,b]}$, $x_i \to x$ отвечают условию $x_i(t) = 0$ при $t \in e_\tau$, то и предельная функция $x(t) = 0$ при $t \in e_\tau$. То есть множество $W_\tau^0 = \{x \in W_{[a,b]} \mid x(t) = 0 \text{ при } t \in e_\tau\}$ замкнуто. Обозначим через $W(e_\tau)$ пространство сужений функций из $W_{[a,b]}$ на множество e_τ. Это пространство изоморфно факторпространству $W_{[a,b]}/W_\tau^0$. Согласно [2], норму в пространстве $W(e_\tau)$ можно задать формулой

$$\| x_\tau \|_{W(e_\tau)} = \inf \| x_\tau \|_{W_{[a,b]}},$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям $x \in W_{[a,b]}$, являющимся продолжениями функции $x_\tau \in W(e_\tau)$. При таком определении нормы пространство $W(e_\tau)$ является банаховым [2].

Определим оператор $\Pi_{\gamma,\tau} : W(e_\gamma) \to W(e_\tau)$, $\gamma \ge \tau$ равенством $(\Pi_{\gamma,\tau} x_\gamma)(t) = x_\gamma(t)$ при всех $t \in e_\tau$. Для каждого фиксированного $x \in W_{[a,b]}$ норма $\| x_\tau \|_{W(e_\tau)} = \| \Pi_{b-a,\tau} x \|_{W(e_\tau)}$ является неубывающей функцией аргумента τ. Мы будем предполагать, что эта функция является непрерывной. Отметим, что таким свойством обладает норма в пространстве $L_{p[a,b]}$ суммируемых в p-ой степени функций, $1 \le p < \infty$, в пространстве $L_{\infty[a,b]}$ существуют такие элементы, что $\| x_\tau \|_{L_\infty(e_\tau)}$ является разрывной по τ функцией. В пространствах $C_{[a,b]}$ непрерывных функций и $D_{p[a,b]}$ абсолютно непрерывных функций следует, естественно, брать в качестве множества e_τ отрезок, и тогда норма будет непрерывной по τ функцией.

Непрерывность функции $\| x_\tau \|_{W(e_\tau)}$ по аргументу τ позволяет доказать необходимое условие предкомпактности множества в пространстве $W_{[a,b]}$.

Т е о р е м а 1. *Если множество* $\mathrm{H} \subset W_{[a,b]}$ *предкомпактно, то оно ограничено и функции множества* H *имеют равностепенно непрерывные нормы, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{H} \quad \forall \tau, \gamma$$

$$|\tau - \gamma| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\left| \| \Pi_{b-a,\tau} x \|_{W(e_\tau)} - \| \Pi_{b-a,\gamma} x \|_{W(e_\gamma)} \right| < \varepsilon .$$

Мы будем пользоваться следующим определением, предложенным в [3–5]. Оператор $A : W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ назовем вольтерровым на системе E, если для любого $\tau \in [0, b-a]$ и всех $x, y \in W_{[a,b]}$ из равенства $\Pi_{b-a,\tau} x = \Pi_{b-a,\tau} y$ следует $\Pi_{b-a,\tau} A x = \Pi_{b-a,\tau} A y$. Это определение обобщает свойство вольтерровости по А.Н. Тихонову [1]. Вольтерровый на системе E оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ порождает семейство операторов $A_\tau : W(e_\tau) \to$ $\to W(e_\tau)$, определяемое следующим образом. Пусть $P_{\tau,\gamma} : W(e_\tau) \to W(e_\gamma)$, $\gamma \geq \tau$ – оператор, продолжающий некоторым образом функцию $x_\tau \in W(e_\tau)$, $x_\tau : e_\tau \to R$ на множество e_γ. Обозначим $A_\tau = \Pi_{b-a,\tau} A P_{\tau,b-a}$, $A_\tau : W(e_\tau) \to W(e_\tau)$. Вследствие вольтерровости оператора A определенный здесь оператор A_τ не зависит от способа продолжения функций $x_\tau \in W(e_\tau)$ на $[a,b]$ оператором $P_{\tau,b-a}$.

Т е о р е м а 2. *Если вольтерровый на системе E оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ непрерывен, то для любого $\tau \in [0,b-a]$ оператор $A_\tau : W(e_\tau) \to W(e_\tau)$ также непрерывен.*

Т е о р е м а 3. *Если вольтерровый на системе E оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ компактен, то для любого $\tau \in [0,b-a]$ оператор $A_\tau : W(e_\tau) \to W(e_\tau)$ также компактен.*

Рассмотрим уравнение

$$x = Ax \qquad (1)$$

с вольтерровым на системе E оператором $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$. Вольтерровость оператора A позволяет говорить о локальной разрешимости уравнения (1). Локальным решением уравнения (1), определенным на e_τ, назовем такую функцию $z_\tau \in W(e_\tau)$, которая удовлетворяет уравнению $x_\tau = A_\tau x_\tau$. Локальное решение $z_\xi \in L_{p[a,\xi]}$ называется продолжением решения z_τ, а решение z_τ – частью решения z_ξ, если $z_\tau = P_{\xi,\tau} z_\xi$, $\xi > \tau$. Функция $z_\beta : [a,\beta) \to R$ называется предельно продолженным решением уравнения (2), если при любом $\tau < \beta$ элемент $z_\tau \in L_{p[a,\tau]}$, $z_\tau = P_{\beta,\tau} z_\beta$, является локальным решением уравнения (1), и либо $\beta = b$, либо $z_\beta \notin L_{p[a,\beta]}$.

Т е о р е м а 4. *Если вольтерровый на системе E оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ вполне непрерывен, то уравнение (1) локально разрешимо, любое локальное решение является частью некоторого предельно продолженного решения.*

Оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ будем называть улучшающим, если образом всякого ограниченного множества $\mathrm{H} \subset W_{[a,b]}$ является множество элементов с равностепенно непрерывными нормами, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{H} \quad \forall \tau, \gamma$$

$$|\tau - \gamma| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\left| \left\| \Pi_{b-a,\tau} A x \right\|_{W(e_\tau)} - \left\| \Pi_{b-a,\gamma} A x \right\|_{W(e_\gamma)} \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что согласно теореме 1 компактный оператор является улучшающим.

Т е о р е м а 5. *Пусть вольтерровый на системе E оператор $A: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ является линейным улучшающим. Тогда уравнение $x - Ax = f$ при каждом $f \in W_{[a,b]}$ имеет единственное решение $z \in W_{[a,b]}$. Если $\{z_i\} \subset W_{[a,b]}$ – решения уравнений $x - Ax = f_i$, где последовательность $\{f_i\} \subset W_{[a,b]}$ сходится к элементу $f \in W_{[a,b]}$, то $\|z_i - z\|_{W_{[a,b]}} \to 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Московск. ун-та. Секция А. Т. 1, вып. 8, 1938. С. 1-25.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. С. 128-129.
3. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9.
4. *Жуковский Е.С.* Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 2.
5. *Жуковская Т.В.* Разрешимость нелинейных уравнений с вольтерровыми операторами // Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения VIII. Воронеж, 1997. С. 52.

Поступила в редакцию 6 сентября 1999 г.