

УДК 681.335 (07)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ

© Е.И. Глинкин

Ключевые слова: интегральные схемы; аналоговые; амплитудные; функциональные; операторные; тождественность эквиваленту; нелинейность; закономерности.

Предложена информационная технология проектирования оптимального математического обеспечения линейного преобразования сигнала с априори желаемой функцией, тождественной заданному эквиваленту с минимальной погрешностью нелинейности. Оптимальные условия систематизированы в закономерности, позволившие в три раза сократить алгоритм расчета линейных интегральных схем на активных, вентильных и реактивных элементах.

1. АМПЛИТУДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Технологию проектирования амплитудных интегральных схем приведем на примере инверсного усилителя постоянного тока (УПТ), включающего операционный усилитель (ОУ) с отрицательной обратной связью на резисторах R_1 , R_2 с активным сопротивлением (проводимостью Y_1 , Y_2).

1. Структурной схеме УПТ (рис. 1а) сопоставим [1] граф-схему (рис. 1б).

2. По I и II правилам Кирхгофа для сигнального графа (рис. 1б) составим систему уравнений (математическую модель)

$$\begin{cases} e(Y_1 + Y_2) = U_1 Y_1 + U_2 Y_2; \\ U_2 = e(-\beta). \end{cases} \quad (1)$$

1. Выразим из второго уравнения потенциал $e = -U_2 / \beta$ и подставим его в первое выражение

$$-\frac{U_2}{\beta}(Y_1 + Y_2) = U_1 Y_1 + U_2 Y_2.$$

Объединим подобные члены

$$U_2 \left(Y_2 + \frac{Y_1 + Y_2}{\beta} \right) = -U_1 Y_1,$$

определим характеристику УПТ $U_2(U_1)$

$$U_2 = -U_1 \frac{Y_1}{Y_2 + \frac{Y_1 + Y_2}{\beta}}$$

и коэффициент усиления $k = U_2 / U_1$:

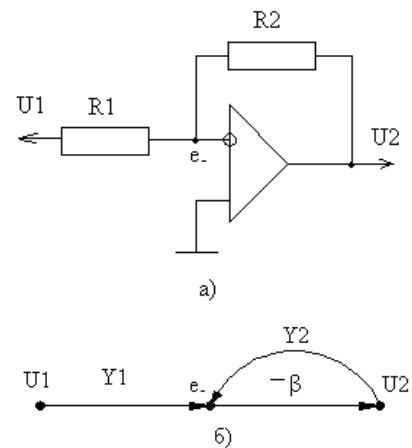


Рис. 1. Схемы УПТ

$$k = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\beta}}, \quad (2)$$

где $R_i = 1 / Y_i$, $i = \overline{1,2}$.

2. Выражение (2) нелинейно, оценим его нелинейность $\eta(R_i, \beta)$ относительно линейного преобразования [2] с желаемым эквивалентом k_0

$$k_0 = -R_2 / R_1, \quad (3)$$

при этом выражение (2) с учетом (3) приводится к виду

$$k = k_0 \eta, \quad (3a)$$

где нелинейность $\eta(R_i, \beta)$ представлена как

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \beta}}$$

После учета зависимости (3) находим

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1 - k_0}{\beta}} \tag{4}$$

3. Качественная оценка выражения (3а) показывает, что линейность преобразования

$$k = k_0 \tag{5}$$

возможна при условии единичного значения нелинейности $\eta = 1$.

Тот же результат дает оптимизация выражения (3а) и (4) относительно коэффициента усиления β , например

$$\frac{\partial \eta}{\partial \beta} = \frac{\partial \left(\frac{\beta}{\beta + 1 - k_0} \right)}{\partial \beta} = 0$$

После взятия производной, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} &= \frac{1}{\beta + 1 - k_0} - \frac{\beta}{(\beta + 1 - k_0)^2} = \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta}{\beta + 1 - k_0} - \left(\frac{\beta}{\beta + 1 - k_0} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Приводим подобные члены с учетом зависимости (4)

$$\frac{h}{\beta} (1 - \eta) = 0,$$

откуда следует условие оптимума

$$opt \eta = 1, \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \tag{6}$$

Следовательно, линейность преобразования УПТ (5) достигается при условии (6), когда нелинейность $\eta = 1$ – постоянная величина, равная единице, т. е.

$$opt k_{|h=1} = k_0 = -R_2 / R_1. \tag{7}$$

4. Дробь в знаменателе выражения (4) является погрешностью ε_n нелинейности η

$$\varepsilon_n = \frac{1 - k_0}{\beta}, \tag{8}$$

т. к. $\frac{1}{1 + \varepsilon_n} = 1$ или $\varepsilon_n = 0$, что справедливо для нулевого отклонения k от k_0 .

Очевидно, решение (7) справедливо только при нулевой погрешности (8), что возможно для двух условий

$$\begin{cases} k_0 = 1 \\ \beta = \infty \end{cases} \tag{9}$$

Первое условие является частным решением для повторителей сигнала по току или напряжению, когда $R_2 = R_1$. В отличие от первого, второе условие отражает общую закономерность УПТ – линейность преобразования амплитуды, что достигается избыточностью коэффициента β операционного усилителя.

7. Избыточность β ОУ приводит к линейному преобразованию (7) за счет организации виртуальной земли: равенства нулю потенциала $e_- = 0$, что гальванически разделяет выходной сигнал U_2 от входного U_1 . При этом параметры ОУ (коэффициенты преобразования по току и напряжению, входные и выходные импедансы) не присутствуют в оптимальном решении (7), что соответствует идеальному конечному результату (ИКР) выполнения функции: «функция выполняется, а ОУ виртуально отсутствует».

Закономерное требование линейного преобразования (7) при нулевой погрешности (8) и избыточности усиления (9) позволяет упростить до минимума решение уравнений (1), т. к.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e_- = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{U_2}{\beta} = \frac{U_2}{\infty} = 0.$$

8. Для виртуальной земли $e_- = 0$ первое уравнение системы (1) принимает вид

$$U_1 Y_1 + U_2 Y_2 = 0,$$

откуда напрямую следует линейное решение

$$U_2 = -U_1 \frac{Y_1}{Y_2} = -U_1 \frac{R_2}{R_1}, \tag{10}$$

которому соответствуют оптимальные параметры (7) УПТ при условиях нулевой погрешности (8) нелинейности и избыточности коэффициента (9) усиления виртуального ИКР.

Следовательно, алгоритм расчета сокращается втрое (с 17 формул до 5 или с семи до трех операций), после первого и второго шага следует третьим 8 пункт.

Таким образом, алгоритм расчета УПТ включает [1, 2]:

1. Замещение структурной схемы (рис. 1а) сигнальным графом (рис. 1б) схемы УПТ.
2. Сопоставление по правилам Кирхгофа системы уравнений (1).

3. Решение системы (1) для виртуальной земли с потенциалом $e_- = 0$ за счет избыточного усиления в виде линейной характеристики (10) и коэффициента (7) преобразования с априорными условиями оптимальности:

$$\begin{cases} \eta = 1 - \text{единичной константы нелинейности,} \\ \varepsilon_n = 0 - \text{нулевой погрешности нелинейности,} \\ \beta = \infty - \text{избыточности виртуального ОУ.} \end{cases} \quad (11)$$

Информационный алгоритм расчета УПТ, в отличие от классических методов, втрое сокращает расчеты за счет систематизации закономерностей: избыточности усиления и линейности преобразования, – в информационную технологию проектирования аналоговых ИС. Использование закономерностей (11) позволяет проектировать УПТ с оптимальными параметрами благодаря замене итерационного алгоритма методом проектирования по эквивалентам с априори адаптивным диапазоном с точностью образцовых мер.

9. *Метод эквивалентов.* Сущность метода эквивалентов [2] заключается в сопоставлении исследуемому решению желаемого результата, принимаемого за эквивалент, и выявлении условий эквивалентности при их тождественности.

Сопоставим нелинейному коэффициенту k решения (2) желаемый линейный k_0 результат в виде системы уравнений

$$\begin{cases} k = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\beta}}; \\ k_0 = -\frac{R_2}{R_1}. \end{cases}$$

Из тождественности $k = k_0$ следует равенство

$$\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\beta}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

С учетом линейного коэффициента k_0

$$k_0 \eta = k,$$

находим условие эквивалентности при единичном значении нелинейности

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1 - k_0}{\beta}} = 1,$$

откуда находят условия линейности в виде закономерностей (11).

Метод эквивалентов приводит к тождеству

$$\frac{U_2}{U_1} = k = k_0 = -\frac{R_2}{R_1},$$

из которого следует линейная характеристика УПТ

$$U_2 = -U_1 \frac{R_2}{R_1},$$

а также прямая зависимость линейного преобразования:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (12)$$

Таким образом, метод эквивалентов, в отличие от итерационного анализа, позволяет технологично находить в явном виде линейное решение и условия оптимизации, регламентируемые физическими закономерностями.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Минимизацию алгоритма проектирования функциональных интегральных схем покажем на примере экспоненциатора на диоде D с вентильной характеристикой.

1. Структурной схеме (рис. 2а) сопоставим схему замещения [1] из сигнальных графов (рис. 2б).

2. По правилам Кирхгофа для схемы замещения (рис. 2б) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} e_- Y = U_2 Y + I_D; \\ U_2 = -\beta e_-. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая, что $I_D = I_0 \exp\left(\frac{U_1 - e_-}{U_0}\right)$, а $e_- = -U_2 / \beta$, преобразуем систему (1) к тождеству

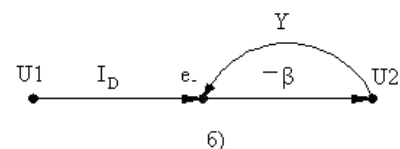
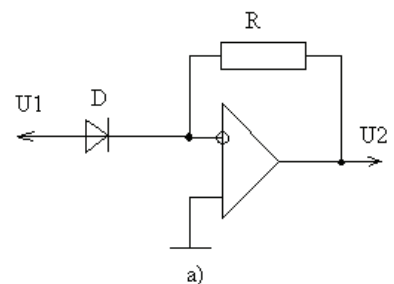


Рис. 2. Схемы экспоненциатора

$$-\frac{U_2}{\beta}Y = U_2Y + I_0 \exp\left(\frac{U_1 + U_2/\beta}{U_0}\right).$$

3. Определим характеристику исследуемой схемы после приведения подобных членов

$$U_2Y\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = -I_0 \exp\left(\frac{U_1 + U_2/\beta}{U_0}\right),$$

откуда исследуемая характеристика находится в неявной форме нелинейного вида:

$$U_2 = -I_0R \cdot \exp\left(\frac{U_1 + U_2/\beta}{U_0}\right) / \left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \quad (2)$$

4. Нелинейной характеристикой (2) по методу эквивалентов (см. п.1.9) сопоставим линейное решение [2] в явном виде

$$U_{20} = -I_0R \cdot \exp(U_1/U_0), \quad (3)$$

и определим условия линеаризации решения (2), с учетом эквивалента (3):

$$U_2 = U_{20}\eta, \quad (2a)$$

где нелинейность η имеет вид

$$\eta = e^{\frac{U_2}{\beta}} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}. \quad (4)$$

5. Качественная оценка выражения (2a) приводит его к эквиваленту (3) при единичном значении нелинейности $\eta = 1$.

Докажем это аналитическим решением в процессе оптимизации уравнения (4) относительно коэффициента усиления при обнулении производной

$$\frac{d\eta}{d\beta} = d\left(e^{\frac{U_2}{\beta}} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}\right) / d\beta = 0. \quad (5)$$

После дифференцирования (5), получим

$$\frac{d\eta}{d\beta} = \frac{1}{1+\beta} \left(1 - \frac{\beta}{1+\beta}\right) e^{\frac{U_2}{\beta}} - \frac{U_2}{\beta^2} e^{\frac{U_2}{\beta}} = 0,$$

а приведя подобные члены, с учетом (4), находим соотношение

$$\frac{1}{1+\beta} \left[e^{\frac{U_2}{\beta}} - \eta - \frac{U_2(1+\beta)}{\beta^2} e^{\frac{U_2}{\beta}} \right] = 0.$$

Отсюда следует равенство для определения оптимума нелинейности

$$\eta = \left[1 - U_2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \right) \right] e^{\frac{U_2}{\beta}}, \quad (6)$$

а также условие избыточности $\beta = \infty$.

Избыточность коэффициента усиления β находится из обнуления дроби

$$\frac{1}{1+\beta} = 0,$$

что возможно для предела

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\beta} = 0.$$

Вычислим пределы сомножителей выражения (6) при избыточном усилении

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0 + 0 = 0;$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{\frac{U_2}{\beta}} = e^{\frac{U_2}{\infty}} = e^0 = 1.$$

Подставляя пределы в равенство (6), находим оптимум нелинейности для избыточности β :

$$\text{opt}\eta = 1, \text{ при } \beta = \infty. \quad (7)$$

6. Анализ нелинейности (4) при условии оптимальности (7) показывает физический смысл дроби

$$\frac{1}{\beta} = \varepsilon_n, \quad (8)$$

как погрешности нелинейности исследуемого решения (2), т. к. при $\varepsilon_n = 0$ $U_2 = U_{20}$, а нелинейность является единичной константой

$$\eta_{\varepsilon_n=0} = e^{U_2 \varepsilon_n} / (1 + \varepsilon_n) = e^0 / (1 + 0) = 1. \quad (9)$$

7. Нулевая погрешность ε_n (8) и оптимумы (7) и (9) обеспечивают линейность экспоненцирования (3) за счет организации виртуальной земли потенциала e_-

$$e_- = U_2 \varepsilon_n = 0,$$

что приводит к гальванической развязке выходного U_2 от входного U_1 сигнала.

8. Для виртуальной земли система (1) приводится к уравнению

$$U_2 Y + I_0 \exp(U_1 / U_0) = 0,$$

откуда непосредственно следует линейное решение (3) для оптимума (9) при нулевой погрешности (8) и избыточности усиления, т. е. оптимальные параметры УПТ, который служит ИКР.

Следовательно, как и для амплитудных ИС, для функциональных ИС также правомерен информационный алгоритм расчета из трех пунктов, после первых двух следует третий шаг по П8, с аналогичными эффективностью и выводами для линейных интегральных схем (см. анализ п. 1).

3. ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Оптимизацию математического обеспечения операторных интегральных схем проиллюстрируем на примере интегратора с реактивной RC-цепочкой.

1. Для синтеза математической модели операторной ИС заменим структурную схему (рис. 3а) схемой замещения (рис. 3б) в сигнальных графах [1].

2. По правилам Кирхгофа составим систему уравнений для неизвестных узлов с потенциалами e_- и U_2 :

$$\begin{cases} e_- Y = U_1 Y + I_c; \\ U_2 = -e_- \beta. \end{cases} \quad (1)$$

3. Подставим в первое уравнение системы (1) значение потенциала e_- из второго уравнения

$$-\frac{U_2}{\beta} Y = U_1 Y + C \frac{dU}{dt},$$

с учетом тока $I_c = C \frac{dU}{dt}$.

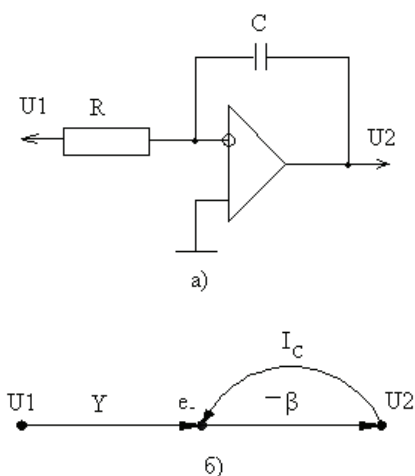


Рис. 3. Схемы интегратора

Объединим подобные члены одного порядка и введем постоянную времени $T = C / Y = CR$

$$\frac{U_2}{\beta} + U_1 = -T \frac{dU}{dt}.$$

Разделим переменные интегрирования и проинтегрируем по частям уравнение

$$\int_{e_-}^{U_2} dU = -\frac{1}{T} \int_0^{\tau} \left(U_1 + \frac{U_2}{\beta} \right) dt,$$

и после подстановки пределов получим исследуемую динамическую характеристику $U_2(U_1, t, \beta)$ операторной схемы:

$$U_2 = -\frac{1}{T} \int_0^{\tau} (U_1 + U_2 / \beta) dt / (1 - 1/\beta). \quad (2)$$

Анализ решения (2) показывает, что исследуемая схема – интегратор с нелинейной характеристикой в неявном виде.

4. Используя метод эквивалентов (см. п. 1.9), потребуем линейное решение [2] исследуемого уравнения (2) в явном виде

$$U_{20} = -\frac{1}{T} \int_0^{\tau} U_1 dt, \quad (3)$$

тогда характеристику (2) можно выразить через нелинейность η

$$U_2 = U_{20} \eta, \quad (3a)$$

которая имеет следующий вид

$$\eta = \left(\beta - \int_0^{\tau} \frac{U_2}{U_{20}} dt \right) / (\beta - 1) U_{20}. \quad (4)$$

5. Для получения линейного тождества выражения (3а), качественная оценка показывает единичное значение нелинейности (4). Докажем это аналитически, приравняв к нулю производную нелинейности $d\eta$ к приращению усиления $d\beta$, обозначив интеграл символом S :

$$\frac{d\eta}{d\beta} = d[(\beta - S) / (\beta - 1) U_{20}] / d\beta = 0.$$

После дифференцирования получим

$$\frac{d\eta}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - 1) U_{20}} - \frac{\beta - S}{(\beta - 1)^2 U_{20}} = \frac{1}{(\beta - 1) U_{20}} (1 - \eta) = 0,$$

при условии (4), откуда следует единичное значение оптимума нелинейности

$$opt\eta = 1 \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Следовательно, линейность интегрирования ИС с эквивалентной (желаемой) характеристикой (3) достигается при оптимальных условиях (5) для тождества (3а)

$$U_2 = U_{20} = -\frac{1}{T} \int_0^\tau U_1 dt. \quad (6)$$

6. Из нелинейности (4) следует физический смысл дроби $1/\beta = \varepsilon_n$, определяющий погрешность нелинейности от интегрирования

$$\eta = (1 - \varepsilon_n S) / (1 - \varepsilon_n), \quad (7)$$

оптимальное значение которой при условиях (5) соответствует нулю

$$opt\varepsilon_n = 0, \quad (8)$$

т. к. из предела при избыточности коэффициента усиления видно, что

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

7. Линейность динамической характеристики (6) достигается условиями (5) и (8) за счет виртуальной земли узлового потенциала e_- , равного нулю

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_2 \varepsilon = U_2 0 = 0.$$

Виртуальная земля узла e_- гальванически разделяет выходной U_2 сигнал от входного напряжения U_1 .

8. При условиях виртуальной земли и избыточности усиления упрощается решение системы (1), т. к. первое уравнение тождественно равно нулю:

$$0 = U_1 Y + I_c.$$

Из этого тождества очевидна квазилинейная динамическая характеристика (3) интегратора, т. к.

$$T \frac{dU}{dt} = -U_1,$$

а после разделения переменных и интегрирования по частям равенства

$$\int_0^{U_2} dU = -\frac{1}{T} \int_0^\tau U_1 dt,$$

напрямую следует

$$U_2 = -\frac{1}{T} \int_0^\tau U_1 dt. \quad (9)$$

Следовательно, алгоритм расчета интегратора сокращается вдвое, т. к. после первых двух шагов следует третьим – 8 пункт.

За счет виртуальных закономерностей операционного усилителя, как ИКР, квазилинейное преобразование (9) приводится к линейной динамической характеристике при постоянном или медленно изменяющемся входном напряжении U_1

$$U_2 = -U_1 \frac{\tau}{T}, \quad (10)$$

т. к. интегрирование константы приводит к линейной функции

$$U_1 \int_0^\tau dt = U_1 t \Big|_0^\tau = U_1 (\tau - 0) = U_1 \tau.$$

Аналогичная характеристика справедлива при линейном разложении в ряд экспоненты за счет избыточности усиления напряжения

$$U_2 = U_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = U_1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right],$$

что соответствует выражению (10) с обратным знаком. Знак минус характеристики (10) отражает инверсию сигнала операционным усилителем. Это говорит о закономерности линейного преобразования амплитуды в координатах времени

$$\frac{U_2}{U_1} = k_0 = \frac{t}{T}. \quad (11)$$

Прямая пропорция (11) позволяет реализовать не только линейное измерение амплитуды аналогового сигнала, но и служит основой линейного преобразования функциональных координат амплитуды в координаты времени, например мультивибраторами (см. п. 1.6).

Таким образом, определены соответствующим образом функций условия их реализации в виде избыточности коэффициентов усиления, равновесия параметров моста и виртуальности потенциала земли. В итоге комплексная проблема техники аналоговых преобразований сигнала методически дифференцирована на подобные задачи линейных, нелинейных и квазилинейных функций с рациональными методами решения для интеграции систематизированных закономерностей в информационную технологию проектирования интерфейсов микропроцессорных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глинкин Е.И.* Схемотехника аналоговых интегральных схем. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2000. 120 с.
2. *Глинкин Е.И., Глинкин М.Е.* Технология АЦП. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. 140 с.

Поступила в редакцию 23 февраля 2010 г.

Glinkin E.I. Mathematical supply of analogue integrated schemes.

The article offers informational technology of designing of an optimum mathematical supply of linear transformation of a signal with a priori desirable function identical to the set equivalent with the minimum error of nonlinearity. Optimum conditions are systematized in the laws which have allowed three times to reduce algorithm of calculation of linear integrated schemes on active, gating and jet elements.

Key words: integrated schemes; analogue; peak; functional; operational; identity to an equivalent; non-linearity; regularity.