УДК 517.925.52

ОБОБЩЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **Ю. Е. Репина, С. А. Скворцов**

Ключевые слова: дифференциальные включения; обобщенно-периодические решения; рекуррентные решения; минимальные множества.

Вводится определение обобщенно-периодического решения классического дифференциального включения. Приводится критерий существования обобщенно-периодических решений и устанавливаются их основные свойства.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – векторная функция действительного переменного t; $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

на прямом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ действительной оси $\mathbb{R}$ и евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, предположим, что f – T-периодическая по t функция.

Если $n = 2$, то справедлива теорема Х.Л. Массера [1]: пусть каждое решение $\xi(t)$ системы (1) определено для всех $t \geqslant t_0$ ($t \leqslant t_0$); тогда, если (1) имеет решение, ограниченное при этих значениях t, то данная система имеет T-периодическое решение $\varphi(t)$. Согласно [1], это утверждение справедливо и для линейных систем произвольного порядка. При этом в нелинейном случае теорема Массера неверна уже для $n = 3$ (см. [2, с. 70]).

Задолго до появления теоремы Массера для автономных систем Дж. Биркгофом было введено определение рекуррентного решения. Данное решение содержит в себе периодическое. При этом из существования ограниченного решения всегда следует существование рекуррентного решения (см. [3, с. 402–404]). Эту ситуацию назовем ситуацией общего положения решений автономных систем.

В работе [4] для T-периодических систем было введено определение обобщенно-периодического решения. Доказано, что в автономном случае определения обобщенно-периодического и рекуррентного решений эквиваленты (см. [2, с. 153]). Таким образом, обобщенно-периодическое решение является распространением определения рекуррентного решения на неавтономные периодические системы.

Определение рекуррентности на неавтономный случай прямо не переносятся. Однако для неавтономных систем достаточно общего вида (не обязательно с периодической правой частью) были подробно изучены асимптотические решения рекуррентного типа (см., например, [5–8] или [9, гл. 3]). При этом ввиду особой сложности рассматриваемых объектов ситуация общего положения в [5–9] не установлена.

Настоящая работа является развитием работы [4]. Цель работы – изучение ситуации общего положения для классических дифференциальных включений.

1. Динамические системы, порожденные дифференциальными включениями

Рассмотрим неавтономное дифференциальное включение на прямом произведении $\mathbb{R}\times\Sigma$ оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого множества $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{2}$$

где для всех x множество $F(t,x)$ непусто, компактно и выпукло для всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times\Sigma$. Кроме того, предположим, что функция F – β-непрерывна [10, с. 52].

В настоящей работе будем считать, что все решения включения (2) определены при $t \geqslant 0$. Более того, будем считать, что имеет место правая единственность решений.

Например, применением к включению простейшее выпуклое доопределение. Для каждой точки $(t,x)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ пусть $F(t,x)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения функции $f(t,x^*)$, когда $(t,x^*)\notin M$, $x^*\to x$, $t=\mathrm{const}$, M – множество (меры нуль) точек разрыва функции f. Более того, при почти всех t мера сечения множества плоскостью $t=\mathrm{const}$ равна нулю. Далее, пусть существует такая суммируемая функция $l(t)$, что для почти всех точек $(t,x)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ и $(t,y)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ при $|x-y|<\varepsilon_0$ имеем $|f(t,x)|\leqslant l(t)$, $(x-y)\cdot(f(t,x)-f(t,y))\leqslant l(t)|x-y|^2$. Тогда для включения (2) при описанном доопределении имеет место правая единственность решений(см. [10, с. 82]). Заметим, что в случае единственности решения оно непрерывно зависит от начальных условий и от правой части включения. Таким образом, при выполнении указанных допущений дифференциальное включение (2) порождает непрерывную периодическую систему (см. [2, с. 203]).

Из всего множества систем в дальнейшем будут рассмотрены только лишь T периодические системы, т. е. системы, порожденные дифференциальными включениями вида (2), в которых F – T-периодическая по t функция.

2. Обобщенно-периодические решения

Поскольку имеет место правая единственность решений, решения включения (2) непрерывно зависят от начальных значений, поэтому будем записывать решение в виде $x = x(t_0,t,x_0)$.

Введем следующее

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\varphi(t_0,t,\varphi_0)$ – некоторое решение включения (2), определенное для всех значений $t\geqslant t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что $\varphi(t_0,t,\varphi_0)$ – обобщенно-периодическое решение, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что при $t\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство:

$$|\varphi(t_0,t,\varphi_0)-\varphi(t_0,t+NT,\varphi_0)|<\varepsilon.$$

Простейшим примером обобщенно-периодического решения может служить T-периодическое решение. Формально, определение обобщенно-периодического решения похоже на определение рекуррентного решения. Связь между этими понятиями будет установлена в п. 4.

Существование обобщенно-периодических решений устанавливает следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть включение* (2) *имеет решение* $\xi(t_0,t,\xi_0)$, *ограниченное при* $t\geqslant t_0$. *Тогда в* ω*-предельном множестве*

$$\Omega(t_0,\xi_0)=\bigcap_{t\geqslant t_0}\overline{\bigcup_{s\geqslant t}\xi(t_0,s,\xi_0)}$$

решения $\xi(t_0,t,\xi_0)$ *расположено также обобщенно-периодическое решение* $\varphi(t_0,t,\varphi_0)$.

Доказательство. Поскольку имеет место правая единственность решений включения (2), оператор

$$G(t_0, t)\xi_0 = \xi(t_0, t, \xi_0)$$

определен и непрерывен по совокупности переменных t_0, t, ξ_0 в их области определения [10, с. 67]. Для всех $N = 1, 2, \ldots$ положим

$$\xi_N = G(t_0, (N-1)T)\xi_0. \tag{3}$$

Легко видеть, что в силу периодичности функции F

$$G(t_0, (N-1)T) = \underbrace{G(t_0, T) \ldots G(t_0, T)}_{N-1}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\xi_N = \underbrace{G(t_0, T) \ldots G(t_0, T)}_{N-1}\xi_0, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и каждое решение $\xi(t_0, t, \xi_N)$ также ограничено.

Поскольку решение $\xi(t_0, t, \xi_0)$ ограничено, то из последовательности (3) можно выбрать сходящуюся последовательность

$$\xi_{N_1}, \xi_{N_2}, \ldots, \xi_{N_k}, \ldots,$$

предел которой обозначим через φ_0. При этом множество $\Omega(t_0, \xi_0)$ замкнуто и, следовательно, компактно. Более того, решение $\varphi(t_0, t, \varphi_0)$ расположено в $\Omega(t_0, \xi_0)$.

Заметим теперь, что функция $G(t_0, t)x$ непрерывна по t, x. Поэтому множество

$$X = \{\xi(t_0, t, \xi_N) \colon \ t \in \mathbb{R}^+, \ N = 1, 2, \ldots\}$$

равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ (см. [10, с. 61]). Следовательно, при $t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{k \to \infty} \xi(t_0, t, \xi_{N_k}) = \varphi(t_0, t, \varphi_0) \tag{5}$$

равномерно на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ (см. [12, с. 481]).

Из непрерывности функции $G(t_0, t)x$ по t, x и компактности множества $\Omega(t_0, \xi_0)$ следует, что множество

$$E = \{\varphi(t_0, t + NT, \varphi_0) \colon \ t \in [0, T], \ N = 0, 1, \ldots\}$$

равностепенно непрерывно. Поэтому его замыкание $\bar{E}$ компактно в топологии равномерной сходимости (см. [12, с. 489]).

Для всех $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$X_{N_k} = \{\xi(t_0, t + NT, \xi_{N_k}) \colon \ t \in [0, T], \ N = 0, 1, \ldots\}.$$

Поскольку замыкание $\bar{X}_{N_k}$ множества X_{N_k} компактно в топологии равномерной сходимости, то, согласно равенствам (3) и (5),

$$\bar{E} \subseteq \bar{X}_{N_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

(см. [10, с. 101]). Поэтому

$$\bar{E} \subseteq \bigcap_{k \geqslant 1} \bar{X}_{N_k}. \tag{6}$$

Пусть

$$\Delta_{N_k} = N_{k+1} - N_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку в силу (3) и (4)

$$\xi_{N_{k+1}} = \xi(t_0, \Delta_{N_k} T, \xi_{N_k}),$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t_0, \Delta_{N_k} T, \xi_{N_k}) = \varphi_0. \qquad (7)$$

Более того, т. к. множество $\Omega(t_0, \xi_0)$ компактно, без потери общности можем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_0, \Delta_{N_k} T, \varphi_0) = \varphi^*, \qquad (8)$$

где $\varphi^* \in \Omega(t_0, \xi_0)$.

Если $p \neq p^*$, то в силу (7) и (8) найдутся такие положительное ε и натуральное k_0, что

$$|\xi(t_0, \Delta_{N_k} T, \xi_{N_k}) - \varphi(t_0, \Delta_{N_k} T), \varphi_0| \geqslant \varepsilon \qquad (9)$$

при $k > k_0$.

Пусть

$$t_k = (\Delta_{N_k} + 1)T, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Согласно неравенству (12), для всех $k > k_0$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_k} |\xi(t_0, t, \xi_{N_k}) - \varphi(t_0, t, \varphi_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Тогда в силу (5) несложно построить такие последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0,$$

положительных и

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} k_l = \infty,$$

натуральных чисел, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_l}} |\xi(t_0, t, \xi_{N_{k_l}}) - \varphi(t_0, t, \varphi_0)| \geqslant \varepsilon \qquad (10)$$

и

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_l}} |\xi(t_0, t, \xi_{N_{k_{l+1}}}) - \varphi(t_0, t, \varphi_0)| < \varepsilon_l. \qquad (11)$$

Легко видеть, что объединение

$$\bigcup_{l\geqslant 1} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $\mathbb{R}^+$. При этом на каждом из таких отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (10) и (11). Последнее, однако, в силу включения (6) невозможно.

Полученное противоречие означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_0, \Delta_{N_k} T, \varphi_0) = \varphi_0.$$

Следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_0, t + \Delta_{N_k} T, \varphi_0) = \varphi(t_0, t, \varphi_0) \tag{12}$$

равномерно на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$.

Множество $\bar{E}$ компактно в топологии равномерной сходимости. Поэтому, согласно (12), справедливо равенство

$$\bar{E} = \bigcap_{k\geqslant 1} G(t, \Delta_{N_k} T)\bar{E} \tag{13}$$

(см. [11, с. 105]).

Если равномерная сходимость в (12) не имеет места на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, то найдется такое положительное число ε, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant lT} |\varphi(t_0, t + \Delta_{N_k} T, \varphi_0) - \varphi(t_0, t, \varphi_0)| \geqslant \varepsilon$$

для всех $l = l(k)$ и $k = 1, 2, \ldots,$ где

$$\lim_{k\to\infty} l(k) = \infty.$$

Последнее, однако, в силу (13) невозможно.

Таким образом, сходимость в (12) равномерна на всей полуоси $\mathbb{R}^+$. Следовательно, $\varphi(t_0, t, \varphi_0)$ – обобщенно-периодическое решение и теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Согласно равенствам (5) и (12), в условиях теоремы 1 найдется такая последовательность

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty, \tag{14}$$

натуральных чисел, что

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t_0, t + (N_k - 1)T, \xi_0) = \varphi(t_0, t, \varphi_0)$$

равномерно на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ и

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_0, t + (N_{k+1} - N_k)T, \varphi_0) = \varphi(t_0, t, \varphi_0)$$

равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$.

3. Обобщенно-периодические решения и минимальные множества

Пусть $\xi(t_0, t, \xi_0)$ – решение включения (2) и

$$E = \{\xi(t_0, t + NT, \xi_0) \colon\ t \in [0, T],\ N = 0, 1, \ldots\}.$$

Т е о р е м а 2. *Предположим, что решение* $\xi(t_0, t, \xi_0)$ *– ограничено при* $t \geqslant 0$. *Тогда необходимое и достаточное условие обобщенной периодичности решения состоит в том, что замыкание* $\bar{E}$ *множества* E *– компактное минимальное множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi(t_0, t, \xi_0)$ – обобщенно-периодическое решение. Для всех $N = 0, 1, \ldots$ положим

$$E_N = \{\xi(t_0, t + (N + l)T, \xi_0) \colon\ t \in [0, T],\ l = 0, 1, \ldots\}.$$

Пусть $\bar{E}_N$ – замыкание множества E_N. Тогда в силу ограниченности решения $\xi(t_0, t. \xi_0)$ каждое множество E_N равностепенно непрерывно. Поэтому все множества $\bar{E}_N$ компактны.

Более того, по определению обобщенно-периодического движения каждое множество $\bar{E}_N$ инвариантно. Тогда существует компактное минимальное множество

$$M = \bigcap_{N \geqslant 0} \bar{E}_N$$

(см. [3, с. 401]). Но по построению

$$\bar{E}_0 = \bar{E}_1 = \ldots = \bar{E}_N = \ldots = \bar{E}.$$

Следовательно, $\bar{E} = M$.

Пусть теперь $\bar{E}$ – компактное минимальное множество. Тогда в силу замечания к теореме 1 найдется такая последовательность вида (14), что

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t_0, t + (N_k - 1)T, \xi_0) = \xi(t_0, t, x) \tag{15}$$

равномерно на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ и

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t_0, t + (N_{k+1} - N_k)T, x) = \xi(t_0, t, x) \tag{16}$$

равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, где $\xi(t_0, t, x)$ – обобщенно-периодическое решение.

Положим

$$F = \{\xi(t_0, t + NT, x): \ t \in [0, T], \ N = 0, 1, \ldots\}.$$

Поскольку $\xi(t_0, t, x)$ – обобщенно-периодическое решение, то по доказанному замыкание $\bar{F}$ множества F – компактное минимальное множество. Но в силу (15) и (16) $\bar{F} \subseteq \bar{E}$. Последнее означает равенство множеств $\bar{E}$ и $\bar{F}$ как минимальных. Следовательно, $\xi(t_0, t, \xi_0)$ – обобщенно-периодическое решение.

Таким образом, теорема 2 доказана.

4. Автономный случай

Для полноты картины установим связь между обобщенно-периодическим и рекуррентным решениями. Для этого предположим, что включение (2) автономно, т. е.

$$\dot{x} \in F(x). \tag{17}$$

Напомним, что решение $\varphi(t)$ включения (17) называется рекуррентным, если для каждого положительного числа ε можно указать такое положительное число T, что ε-окрестность любой дуги K_T временной длины T траектории K , описываемой этим решением, целиком содержит K . Необходимое и достаточное условие рекуррентности, как известно, состоит в том, что замыкание траектории, описываемой рекуррентным решением – компактное минимальное множество [10, с. 101]. Поэтому, согласно теореме 2, в автономном случае для всех $T > 0$ обобщенно-периодические решения оказываются рекуррентными и обратно.

Заметим теперь, что в неавтономном случае траектории могут пересекаться. Поэтому определение рекуррентного решения на неавтономный случай прямо не переносится. Сказанное означает, что в неавтономном случае обобщенно-периодическое решение является самостоятельным математическим объектом.

5. Заключение

Теорема 1 дает критерий существования обобщенно-периодических решений классических дифференциальных включений. Согласно теореме 2, для автономных систем определения обобщенно-периодического и рекуррентного решений совпадают. В неавтономном случае обобщенно-периодическое решение является самостоятельным объектом.

Таким образом, обобщенно-периодическое решение определяет ситуацию общего положения для решений включения (2) в случае правой единственности решений. Как частный случай, обобщенно-периодические решения определяют также ситуацию общего положения для включений вида (17). Более того, в автономном случае обобщенно-периодическое решение дает новое определение рекуррентного решения. Легко видеть, что это определение несколько уточняет классическое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Massera J.L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 457-475.
2. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М.: ЛКИ, 2007.
3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1367-1372.
5. *Миллионщиков В.М.* Рекуррентные и почти периодические предельные решения неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 9. С. 1555-1559.
6. *Щербаков Б.А.* Многомерные динамические системы // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 739-747.
7. *Бронштейн И.У., Черний В.Ф.* Расширения динамических систем с равномерно асимптотически устойчивыми точками // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10 № 7. С. 1225-1230.
8. *Герко А.И.* Асимптотически рекуррентные решения уравнений в β-производных // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 6. С. 837-851.
9. *Cheban D.N.* Asymptotically almost periodic solutions of differential equations. N. Y.: HPC, 2009.
10. *Филиппов А.Ф.*Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
12. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 2.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-07-00136).

Поступила в редакцию 28 августа 2012 г.

Repina Y.E., Skvortsov S.A. GENERALIZED-PERIODIC SOLUTIONS OF CLASSICAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS. The term "generalized-periodic solution of a classical differential inclusion"is defined. The existence criterion and basic properties of such a solution are given.

Key words: differential inclusions; generalized-periodic solutions; recurrent solutions; minimal sets.