УДК 517.01

КАНОНИЧЕСКИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

© Л.И. Грошева

Grosheva L.I. Canonical and boundary representations for the Lobachevsky space. For the Lobachevsky space of arbitrary dimension, canonical (not necessary) and boundary representations are defined, and their decompositions are given. The decomposition of the Berezin form is also given.

В настоящей работе мы изучаем канонические и порожденные ими граничные представления для пространства Лобачевского G/K, где $\mathrm{SO}_0(n-1,1)$, $K = \mathrm{SO}(n-1)$. Мы даем явные разложения тех и других. Канонические представления мы понимаем в широком смысле, они не обязательно унитарные. Изложение в большой степени параллельно нашим работам [1] и [2] о комплексных гиперболических пространствах.

1. Пространство Лобачевского. Мы используем "модель Клейна": пространство Лобачевского размерности $n-1$ реализуется как единичный шар B: $\langle u,u\rangle < 1$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение. Группа G действует на B дробно-линейно:

$$u \mapsto u\cdot g = \frac{u\alpha+\gamma}{u\beta+\delta},\ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

матрица $g \in G$ записана в блочном виде соответственно разбиению $(n-1)+1$.

Пусть du – евклидова мера на B: $du = du_1 \dots du_{n-1}$. Пусть $\langle f,h\rangle_B$ обозначает скалярное произведение в L^2 на B по этой мере:

$$\langle f,h\rangle_B = \int_B f(u)\,\overline{h(u)}\,du. \tag{1}$$

Инвариантная относительно G мера на B есть $dx(u) = p^{-n/2}du$, где $p = 1-\langle u,u\rangle$.

2. Представления группы G, связанные с конусом. Пусть S – граница шара B, она есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$, т.е. S состоит из точек $(s_1,\dots,s_{n-1})$ таких, что ${s_1}^2+\dots+s_{n-1}^2 = 1$. В пространстве $\mathcal{D}(S)$ действуют представления T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G по формуле

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi(s\cdot g)(s\beta+\delta)^\sigma.$$

Пусть ds – евклидова мера на S. Эрмитова форма

$$\langle\psi,\varphi\rangle_S = \int_S \psi(s)\overline{\varphi(s)}\,ds \tag{2}$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{2-n-\overline{\sigma}})$, т.е.

$$\langle T_\sigma(g)\psi,\varphi\rangle_S = \langle\psi, T_{2-n-\overline{\sigma}}(g^{-1})\varphi\rangle_S, \tag{3}$$

где $g \in G$.

Представление T_σ может быть распространено на пространство $\mathcal{D}'(S)$ обобщенных функций на S посредством формулы (3), где ψ – обобщенная функция, $\langle\psi,\varphi\rangle_S$ есть значение обобщенной функции ψ на тестовой функции φ.

Определим оператор A_σ в $\mathcal{D}(S)$:

$$(A_\sigma\varphi)(s) = \int_S (1-\langle s,t\rangle)^{2-n-\sigma}\varphi(t)\,dt.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\,\sigma < (2-n)/2$ и продолжается мероморфно во всю комплексную плоскость σ. Он имеет простые полюсы в точках $\sigma \in (2-n)/2+\mathbb{N}$. Его вычет $\widehat{A_\mu}$ в полюсе μ есть некоторый диффференциальный оператор.

Оператор A_σ сплетает T_σ и $T_{2-n-\sigma}$. С формой (2) оператор A_σ взаимодействует так:

$$\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S = \langle\psi, A_{\overline{\sigma}}\varphi\rangle_S. \tag{4}$$

Полуторалинейная форма $\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S$ инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{2-n-\overline{\sigma}})$. В частности, для $\sigma \in \mathbb{R}$ эта форма является инвариантной эрмитовой формой для T_σ.

Тождественная единица является собственной функцией для оператора A_σ с собственным значением

$$j(\sigma) = 2^{-\sigma}\, \pi^{(n-2)/2}\, \frac{\Gamma\left((2-n)/2 - \sigma\right)}{\Gamma(-\sigma)}.$$

Оператор A_σ может быть распространен на $\mathcal{D}'(S)$ с помощью формулы (4). Представление T_σ неприводимо для всех $\sigma \in \mathbb{C}$, за исключением $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$. В этом случае T_σ эквивалентно $T_{2-n-\sigma}$ с помощью оператора A_σ.

Унитаризуемые представления образуют три серии: *непрерывная серия* состоит из T_σ, $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, скалярное произведение есть (2), *дополнительная серия* состоит из T_σ, $2 - n < \sigma < 0$, скалярное произведение есть $\mathrm{const} \cdot \langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$, *дискретная серия* реализуется в неприводимых факторах при $\sigma \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$.

3. Канонические представления. Канонические представления R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G определим как ограничения на G максимально вырожденных серий представлений группы $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Последние представления были исследованы в работе [3]. Пространство, в котором действуют наши R_λ, есть пространство $\mathcal{D}(\overline{B})$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций на замыкании $\overline{B}$ шара B.

Канонические представления R_λ действуют в $\mathcal{D}(\overline{B})$ по формуле

$$\left(R_\lambda(g) f\right)(u) = f(u \cdot g)(u\beta + \delta)^{-\lambda - n}.$$

Скалярное произведение (1) является инвариантным относительно пары $(R_\lambda, R_{-\overline{\lambda}-n})$. Канонические представления R_λ можно распространить на пространство $\mathcal{D}'(\overline{B})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}^{n-1}$ с носителями в $\overline{B}$ с помощью формулы (1).

4. Граничные представления. Каноническое представление R_λ порождает два представления L_λ и M_λ, связанные с границей S шара B. Первое из них действует на обобщенных функциях, сосредоточенных на S, второе – на струях, ортогональных S, т.е. на многочленах Тейлора от p в точке $p = 0$.

Обозначим через $\Delta_k(\overline{B})$, $k \in \mathbb{N}$, пространство обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\overline{B})$, имеющих вид

$$\varphi(s)\delta^{(k)}(p),$$

где $\delta(p)$ – дельта–функция Дирака на вещественной прямой, $\delta^{(k)}(p)$ – ее производная k-го порядка, $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, в шаре $\overline{B}$ введены полярные координаты: $u = rs$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $s \in S$, $p = 1 - r^2$. Положим

$$\Sigma_k\left(\overline{B}\right) = \Delta_0(\overline{B}) + \Delta_1(\overline{B}) + \ldots + \Delta_k(\overline{B}),$$

$$\Sigma(\overline{B}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k(\overline{B}). \qquad (5)$$

Представление R_λ (рассматриваемое на обобщенных функциях на $\overline{B}$) сохраняет каждое $\Sigma_k(\overline{B})$ и фильтрацию (5) (но не сохраняет каждое $\Delta_k(\overline{B})$, $k \geqslant 1$). Представление L_λ – есть ограничение представления R_λ на пространство $\Sigma(\overline{B})$. Предствление L_λ есть верхняя треугольная матрица с диагональю $T_{2-n-\lambda+2m}, m \in \mathbb{N}$.

Далее, для функции f из $\mathcal{D}(\overline{B})$ рассмотрим ее ряд Тейлора $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ по степеням p. Здесь $a_k = a_k(f)$ – функции из $\mathcal{D}(S)$. Пусть $a(f)$ – столбец $(a_0(f), a_1(f), a_2(f), \ldots)$. Обозначим через $A(S)$ пространство последовательностей (столбцов) $a = (a_0, a_1, \ldots)$, где $a_k \in \mathcal{D}(S)$. Отображение $f \mapsto a(f)$ есть отображение пространства $\mathcal{D}(\overline{B})$ на пространство $A(S)$. Представление M_λ группы G действует на пространстве $A(S)$ по формуле

$$M_\lambda(g)\, a(f) = a(R_\lambda(g) f).$$

Представление M_λ есть нижняя треугольная матрица с диагональю $T_{-\lambda-n-2m}, m \in \mathbb{N}$.

5. Преобразования Пуассона и Фурье, связанные с каноническим представлением. Пусть $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$. Преобразование Пуассона $P_{\lambda,\sigma} : \mathcal{D}(S) \to C^\infty(B)$ и преобразование Фурье $F_{\lambda,\sigma} : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(S)$, связанные с каноническим представлением R_λ, определим следующим образом:

$$(P_{\lambda,\sigma}\varphi)(u) = p^{(-\lambda-\sigma-n)/2} \int_S (1 - \langle u, s \rangle)^\sigma\, \varphi(s)\, ds,$$

$$(F_{\lambda,\sigma} f)(s) = \int_B (1 - \langle u, s \rangle)^\sigma\, p^{(\lambda-\sigma)/2} f(u)\, du.$$

Эти преобразования сплетают $T_{2-n-\sigma}$ с R_λ и R_λ с T_σ, соответственно. Они сопряжены друг другу

$$\langle F_{\lambda,\sigma} f, \varphi \rangle_S = \langle f, P_{-\overline{\lambda}-n, \overline{\sigma}}\varphi \rangle_B.$$

Для K-финитной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ и $\sigma \notin (2-n)/2+\mathbb{Z}$ имеет место разложение:

$$(P_{\lambda,\sigma}\varphi)(u) = p^{(-\lambda-\sigma-n)/2} \sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma,k}\varphi)(s) \cdot p^k +$$

$$+p^{(\sigma-\lambda-2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} (D_{\sigma,k}\varphi)(s) \cdot p^k,$$

где $u = rs$, $0 \leqslant r < 1$, $p = 1 - r^2$, $s \in S$, $C_{\sigma,k}$ и $D_{\sigma,k}$ – некоторые непрерывные операторы в $\mathcal{D}(S)$. Они выражаются через операторы A_σ и $W_{\sigma,k}$:

$$C_{\sigma,k} = A_{2-n-\sigma}\, W_{2-n-\sigma,k}, \quad D_{\sigma,k} = j(\sigma) W_{\sigma,k}.$$

Оператор (дифференциальный) $W_{\sigma,k}$ определяется с помощью производящей функции:

$$(1-p)^{l/2} F\left(\frac{\sigma+n-2+l}{2}, \frac{\sigma+n-1+l}{2}; \sigma+\frac{n}{2}; p\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w_{\sigma,k}(\mu_l) p^k,$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, $\mu_l = l(3-n-l)$ – собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами Δ_S на S. Тогда $W_{\sigma,k} = w_{\sigma,k}(\Delta_S)$.

Преобразование Пуассона $P_{\lambda,\sigma}$ имеет полюсы по σ в точках

$$\sigma = 2-n-\lambda+2l, \; \sigma = \lambda - 2k, \; k,l \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Если полюс принадлежит только одной из серий (6), то он – простой, а вычеты соответственно равны

$$2\,\frac{(-1)^k}{k!}\, j(\lambda-2k)\, \xi_{\lambda,k}, \quad -2\,\frac{(-1)^l}{l!}\, \xi_{\lambda,l} \circ A_{\lambda-2l}, \quad (7)$$

где $\xi_{\lambda,k}$ – оператор (граничная проекция) $\mathcal{D}(S) \to \Sigma_k(\overline{B})$, определяемый формулой:

$$\xi_{\lambda,k}(\varphi) = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b\, \frac{k!}{(k-b)!}\, W_{\lambda-2k,b}\varphi \cdot \delta^{(k-b)}(p).$$

Он сплетает $T_{2-n-\lambda+2k}$ с L_λ. Операторы $\xi_{\lambda,k}$ дают диагонализацию представления L_λ при $\lambda + (n-4)/2 \notin \mathbb{N}$.

Пусть полюс μ принадлежит обеим сериям (6) и является простым. Это может быть в случае, когда n четно, $\lambda \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда вычет дается любой из формул (7), обе они дают одно то же.

Пусть, наконец, полюс μ – второго порядка, тогда он принадлежит обеим сериям (6). Старший лорановский коэффициент (коэффициент при $(\sigma-\mu)^{-2}$) равен

$$4\frac{(-1)^l}{l!}\, \xi_{\lambda,l} \circ \widehat{A}_{\lambda-2l} \; (k \geqslant l),$$

$$4\,\frac{(-1)^k}{k!}\, \widehat{j}(\lambda-2k)\, \xi_{\lambda,k} \; (k \leqslant l),$$

где $\widehat{j}(\mu)$ обозначает вычет множителя $j(\sigma)$. Полюсы второго порядка дают жордановы клетки второго порядка в разложении L_λ. Их количество равно $[(2\lambda+n)/4]$ (квадратные скобки обозначают целую часть).

Преобразование Фурье $F_{\lambda,\sigma}$ имеет полюсы по σ в следующих точках:

$$\sigma = -\lambda-n-2k, \; \sigma = \lambda+2+2l, \; k,l \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Если полюс μ принадлежит только одной из серий (8), то он – простой, а вычеты соответственно равны

$$j(-\lambda-n-2k)\, b_{\lambda,k}, \quad -A_{-\lambda-n-2l}\, b_{\lambda,l}, \quad (9)$$

где $b_{\lambda,k}$ – граничный оператор $\mathcal{D}(\overline{B}) \to \mathcal{D}(S)$, определяемый через коэффициенты Тейлора:

$$b_{\lambda,k}(f) = \sum_{m=0}^{k} W_{-\lambda-n-2k,k-m}\,(a_m(f^*)),$$

здесь $f^* = (1-p)^{(n-3)/2} f$. Операторы $b_{\lambda,k}$ сплетают R_λ с $T_{-\lambda-n-2k}$ и дают диагонализацию представления M_λ для $\lambda \notin (-n-4)/2 - \mathbb{N}$.

Пусть полюс μ принадлежит обеим сериям (8) и является простым. Это может быть в случае, когда n четно и $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда вычет дается любой из формул (9).

Пусть, наконец, полюс μ – второго порядка, тогда он принадлежит обеим сериям (8). Старший лорановский коэффициент равен

$$2\,\widehat{A}_{-\lambda-n-2l} \circ b_{\lambda,l}\,(k \geqslant l), \quad 2\,\widehat{j}(\mu)\, b_{\lambda,k}\,(k \leqslant l).$$

Полюсы второго порядка дают жордановы клетки второго порядка в разложении M_λ для $-\lambda-(n+4)/2 \in \mathbb{N}$. Количество таких клеток равно $[-(2\lambda+n)/4]$.

6. Разложение канонических представлений. Мы ограничимся разложением канонических представлений R_λ, для которых λ лежит в вертикальных полосах

$$I_k: \; \frac{-n-2}{2} + 2k < \operatorname{Re}\lambda < \frac{2-n}{2} + 2k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda \in I_0$. *Тогда каноническое представление* R_λ *в* $\mathcal{D}(\overline{B})$ *разлагается в прямой интеграл представлений* T_σ *непрерывной серии* ($\sigma = (2-n)/2 + i\rho$) *с кратностью 1. А именно, сопоставим функции* f *из* $\mathcal{D}(\overline{B})$ *совокупность* $\{F_{\lambda,\sigma} f\}$, $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$. *Это соответствие* G*-эквивариантно. Справедлива формула обращения:*

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\, P_{\lambda,2-n-\sigma}\, F_{\lambda,\sigma}\, f\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho}\, d\rho, \tag{10}$$

где $\omega(\sigma) = [4\pi j(\sigma) j(2-n-\sigma)]^{-1}$. *При* $\sigma = (2-n)/2+i\rho$ *множитель* $\omega(\sigma)$ *есть плотность меры Планшереля для квазирегулярного представления.*

Для вещественных $\lambda \in I_0$ эта теорема дает разложение унитарных канонических представлений.

Разложение (10) справедливо не только в смысле поточечной сходимости, но и в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\overline{B})$.

Продолжим аналитически по λ разложение (10), рассматриваемое в $\mathcal{D}'(\overline{B})$, из полосы I_0 в полосу I_{k+1}, $k \in \mathbb{N}$. Полюсы $\sigma = \lambda - 2m$ и $\sigma = 2-n-\lambda+2m$, $m = 0,1,\ldots,k$ подынтегральной функции (это – полюсы преобразования Пуассона $P_{\lambda,2-n-\sigma}$) пересекают линию интегрирования $\operatorname{Re}\sigma = (2-n)/2$ и дают добавочные слагаемые. Мы получим

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{m=0}^{k} \pi_{\lambda,m}(f), \tag{11}$$

где символ интеграла обозначает правую часть (10) и

$$\pi_{\lambda,m} = 2\,\frac{(-1)^m}{m!}\,\frac{1}{j(2-n-\lambda+2m)}\cdot$$

$$\cdot\xi_{\lambda,m} \circ F_{\lambda,2-n-\lambda+2m}. \tag{12}$$

Операторы (12) могут быть распространены и на $\Sigma_k(\overline{B})$. Тогда на пространстве $\mathcal{D}_k(\overline{B}) = \mathcal{D}(\overline{B}) + \Sigma_k(\overline{B})$ оператор $\pi_{\lambda,m}$ есть оператор проектирования на образ оператора $\xi_{\lambda,m}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lambda \in I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда пространство* $\mathcal{D}(\overline{B})$ *должно быть дополнено до пространства* $\mathcal{D}_k(\overline{B})$. *На этом пространстве* $\mathcal{D}_k(\overline{B})$ *каноническое представление* R_λ *распадается в сумму двух слагаемых: первое разлагается как* R_λ *в теореме 1, а второе разлагается в сумму* $k+1$ *неприводимых представлений* $T_{2-n-\lambda+2m}$, $m = 0,1,\ldots,k$. *А именно, сопоставим функции* $f \in \mathcal{D}_k(\overline{B})$ *совокупность* $\{F_{\lambda,\sigma} f,\ \pi_{\lambda,m}(f)\}$, *где* $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$, $m = 0,1,\ldots,k$. *Это соответствие* G*-эквивариантно. Функция* f *восстанавливается по формуле обращения (11).*

Для вещественных λ из интервала $((2-n)/2, 0)$ эта теорема дает разложение унитарных канонических представлений.

Теперь мы продолжаем (10) из полосы I_0 налево в полосу I_{-k-1}, $k \in \mathbb{N}$. Здесь дополнительные слагаемые получаются из–за полюсов $\sigma = -\lambda - n - 2m$ и $\sigma = \lambda + 2 + 2m$, $m = 0,1,\ldots,k$, подинтегральной функции, это – полюсы преобразования Фурье $F_{\lambda,\sigma}$. Мы получаем

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{m=0}^{k} \Pi_{\lambda,m}(f), \tag{13}$$

где интеграл обозначает правую часть (10) и

$$\Pi_{\lambda,m} = \frac{1}{j(\lambda+2+2m)}\, P_{\lambda,\lambda+2+2m} \circ b_{\lambda,m}.$$

Оператор $\Pi_{\lambda,m}$, $m = 0,1,\ldots,k$, является оператором, отображающим $\mathcal{D}(\overline{B})$ на образ преобразования $P_{\lambda,\lambda+2+2m}$.

Пусть $\mathcal{T}_l(\overline{B})$ обозначает пространство функций f на $\overline{B}$ класса C^∞ на B и на S, имеющих разложение Тейлора порядка l:

$$f(u) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_l p^l + o(p^l),$$

здесь $a_i = a_i(f)$ – функции из $\mathcal{D}(S)$. Пространство $\mathcal{T}_l(\overline{B})$ содержит $\mathcal{D}(\overline{B})$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда каноническое представление* R_λ, *рассматриваемое на пространстве* $\mathcal{T}_{k+1}(\overline{B})$, *распадается в сумму двух слагаемых. Первое из них действует в подпространстве функций* f *таких, что* $a_m(f) = 0$, $m = 0,1,\ldots,k$, *и разлагается как* R_λ *в теореме 1 (в прямой интеграл представлений непрерывной серии). Второе действует на сумме образов преобразований Пуассона* $P_{\lambda,\lambda+2+2m}$, $m = 0,1,\ldots,k$, *и разлагается в прямую сумму* $k+1$ *неприводимых представлений* $T_{-\lambda-n-2m}$, $m = 0,1,\ldots,k$. *Формула обращения есть (13).*

В разложении канонических представлений жордановых клеток нет.

7. Форма Березина. Назовем *ядром Березина* следующую функцию от пары точек $u, v \in B$:

$$E_\lambda(u,v) = c(\lambda)\left[\frac{(1-\langle u,v\rangle)^2}{(1-\langle u,u\rangle)(1-\langle v,v\rangle)}\right]^{\lambda/2},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$c(\lambda) = \pi^{(1-n)/2}\,\frac{\Gamma((1-\lambda)/2)}{\Gamma((2-n-\lambda)/2)}.$$

Ядро Березина порождает полуторалинейную форму $\mathcal{B}_\lambda(f,h)$ на $\mathcal{D}(B)$, называемую формой Березина:

$$\mathcal{B}_\lambda(f,h) = \int\limits_{B\times B} E_\lambda(u,v)\,f(u)\,\overline{h(v)}\,dx(u)\,dx(v).$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$ эта форма эрмитова.

Т е о р е м а 4. *Пусть $f,h \in \mathcal{D}(B)$. Тогда для $\mathrm{Re}\,\lambda < (2-n)/2$ и для $\lambda = (2-n)/2$ мы имеем*

$$\mathcal{B}_\lambda(f,h) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\,\Lambda(\lambda,\sigma)\cdot$$

$$\cdot\langle F_\sigma f,\, F_{2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho}\,d\rho,$$

для $(2-n)/2+2k < \mathrm{Re}\,\lambda < (2-n)/2+2k+2$ и для $\lambda = (2-n)/2+2k,\quad k \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\mathcal{B}_\lambda(f,h) = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{m=0}^{k} \Lambda_m(\lambda)\,j(\lambda-2m)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\langle A_{\lambda-2m}\,F_{\lambda-2m}f, F_{\overline{\lambda}-2m}h\rangle_S$$

и для $\mathrm{Re}\,\lambda = (2-n)/2+2k$, $\lambda \neq (2-n)/2+2k$, $k \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\mathcal{B}_\lambda(f,h) = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{m=0}^{k-1} + \frac{1}{2}\Lambda_k(\lambda)\,j(\lambda-2k)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\langle A_{\lambda-2k}\,F_{\lambda-2k}f, F_{\overline{\lambda}-2k}h\rangle_S,$$

где

$$\Lambda(\lambda,\sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-n-\sigma-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-n-\lambda}{2}\right)},$$

$$\Lambda_m(\lambda) = 4\pi \operatorname*{Res}_{\sigma=\lambda-2m} \omega(\sigma)\Lambda(\lambda,\sigma).$$

Ядро Березина $\mathcal{B}_\lambda$ дает также интегральный оператор с этим ядром, обозначим его снова через $\mathcal{B}_\lambda$, назовем его *преобразованием Березина*:

$$(\mathcal{B}_\lambda f)(u) = \int_B \mathcal{B}_\lambda(u,v)\,f(v)\,dx(v).$$

Мы можем написать полное асимптотическое разложение оператора $\mathcal{B}_\lambda$.

Т е о р е м а 5. *Пусть λ стремится к ∞ вдоль луча в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < (2-n)/2$, отличного от вещественной отрицательной полуоси. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{B}_\lambda \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!2^{2m}} \prod_{r=0}^{m-1}\Big[\Delta - 2r(2r+n-2)\Big]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\{(-\lambda-n)/2\}^{(m)}}, \qquad (14)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на B, при $m=0$ произведение в ряде считается равным 1, так что весь член ряда с $m=0$ равен 1. Разложение (14) понимается в том смысле, что разность между оператором $\mathcal{B}_\lambda$ и всякой частичной суммой ряда стремится к нулю на всякой функции из $L^2(B,dx)$:

$$\Big\|\Big(\mathcal{B}_\lambda - \sum_{m=0}^{N}\ldots\Big)f\Big\|_{L^2(B,dx)} \to 0.$$

В формуле (14) мы использовали обозначение для "обобщенных степеней": $a^{(m)} = a(a-1)\ldots(a-m+1)$.

Преобразование Березина $\mathcal{B}_\lambda$ можно рассматривать также на пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ многочленов на гиперболоиде $\mathcal{X}: -x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2+x_n^2=1,\ x_n \geqslant 1$, в $\mathbb{R}^n$, т.е. ограничений на $\mathcal{X}$ многочленов на $\mathbb{R}^n$. Шар B есть образ центрального проектирования гиперболоида $\mathcal{X}$ из начала координат на гиперплоскость $x_n = 1$. Обозначим через $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}(\mathcal{X})$ подпространство в $\mathcal{H}(\mathcal{X})$, состоящее из четных многочленов.

Т е о р е м а 6. *На пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}(\mathcal{X})$ для произвольного $\lambda \notin -n-\mathbb{N}$ имеет место точное равенство (не только асимптотическое):*

$$\mathcal{B}_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!2^{2m}} \prod_{r=0}^{m-1}\Big[\Delta - 2r(2r+n-2)\Big]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\{(-\lambda-n)/2\}^{(m)}}.$$

Фактически на каждом многочлене из $\mathcal{H}_{\text{even}}(\mathcal{X})$ *ряд есть конечная сумма.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грошева Л.И.* Преобразования Пуассона и Фурье, связанные с каноническими представлениями на комплексном гиперболическом пространстве // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 1. С. 84 – 86.

2. *Грошева Л.И.* Разложение канонических представлений на комплексном гиперболическом пространстве // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 1. С. 86 – 88.

3. *Dijk G. van, Molchanov V.F.* Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $SL(n,\mathbb{R})$ // J. Math. Pures Appl. 1999. T. 78, No. 1. P. 99 – 119.

Поступила в редакцию 4 сентября 2004 г.