го края (грант № 07-01-96060-р-урал-а).

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Simonov P. M., Chistyakov A. V. To the Daugavet's theorem. In article it is formulated the following theorem. Let $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $p \in [1, \infty]$, is a Banach space on separable space with a nonatomic measure. Then for any positive operator of substitution with weight $S : L^p \to L^p$ an initial projector $\mathcal{R}_S : \mathcal{M}(L^p) \to \mathcal{M}(L^p)$, generated by a strip $\mathcal{R}_S := [S]^{dd}$, has individual norm. From the theorem the following statement at once follows. If the operator $K \in \mathcal{M}(L^p)$ has a majorant V, disjoint with S (for example, K is integrated operator), $||S + K|| \geqslant ||S||$. This statement considerably strengthens numerous generalisations of the known theorem of I. K. Daugavet. The most interesting applications the theorem announced here can have in the spectral theory of operational algebras majorizing the operators generated lattice homomorphism.

Key words: positive operator of substitution with weight; diffuse operator; Daugavet's theorem.

УДК 517.95

РАВНОСТЕПЕННАЯ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТЬ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ, ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

© В. И. Сумин

Ключевые слова: равностепенно квазинильпотентное семейство операторов; вольтеррова цепочка оператора; теорема об эквивалентной норме; управляемое вольтеррово функционально-операторное уравнение; условия сохранения глобальной разрешимости.

Вводятся понятия равностепенно квазинильпотентного и суперравностепенно квазинильпотентного семейства операторов. Формулируются соответствующие признаки для случая функциональных операторов. Обсуждаются применения введенных понятий и сформулированных признаков в теории управляемых функционально-операторных уравнений.

Примем следующие обозначения:

$\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — фиксированное измеримое по Лебегу, ограниченное множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных $t = \mathrm{col}\{t^1, \ldots, t^n\}$;

$\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π;

T — некоторая часть Σ;

$E = E(\Pi)$ — некоторое *банахово идеальное пространство* (БИП) измеримых вещественных функций, определенных на Π [1];

$E^m \equiv \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\mathrm{m}}$, $\|.\|_{E^m}$ — стандартная норма прямого произведения;

[1] Нормированное пространство $E = E(\Pi)$ измеримых на Π функций называется идеальным, если любая измеримая на Π функция x, не превосходящая по модулю некоторой функции $y \in E$, принадлежит E, причем $\|x\| \leqslant \|y\|$ (см., например, [1, с.139]).

$L_p(H)$ — пространство Лебега (со стандартной нормой), $H \in \Sigma$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

$L_p \equiv L_p(\Pi)$;

P_H — оператор умножения на функцию $\chi_H(t) \equiv \{1,\ t \in H;\ 0,\ t \in \Pi \backslash H\}$, характеристическую функцию множества $H \in \Sigma$;

$\mathbf{B}$ — некоторое банахово пространство;

$U_M(y) \equiv \{x \in \mathbf{B} :\ \|x - y\|_{\mathbf{B}} \leqslant M\}$ — шар радиуса M с центром y в банаховом пространстве $\mathbf{B}$;

$\rho(G)$ — спектральный радиус *линейного ограниченного оператора* (ЛОО) $G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ (по известной формуле И.М. Гельфанда $\rho(G) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|G^k\|}$);

$L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — пространство ЛОО, действующих из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$.

1. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность. Следуя [2], назовем $G[.] : E^m \longrightarrow E^l$ вольтерровым оператором на системе множеств T, если для любого $H \in T$ сужение $G[x]\Big|_H$ не зависит от значений сужения $x\big|_{\Pi\backslash H}$, то есть

$$\forall H \in T :\ P_H G P_H = P_H G. \tag{1}$$

Класс операторов, вольтерровых на системе T, обозначим через $V(T)$ [2].

Систему множеств $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \Sigma$, линейно упорядоченную по вложению ($H_0 \subset H_1 \subset \subset \ldots \subset H_k$) и такую, что $H_0 = \emptyset, H_k = \Pi$, назовем конечной цепочкой. Если при этом $G \in V(\mathcal{T})$, то будем говорить, что $\mathcal{T}$ — вольтеррова цепочка оператора G.

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число. Будем говорить, что оператор $G : E \longrightarrow E$ удовлетворяет δ-условию на множестве $H \in \Sigma$, если

$$\|P_H G P_H\| < \delta.$$

[2]Название ≪вольтерровы операторы≫ (операторы типа Вольтерра) присваивалось в литературе различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.). Первые определения вольтерровости функциональных операторов были даны Л.Тонелли [5] и А.Н.Тихоновым [3] (см. [6, с.4]) . Первые абстрактные определения вольтерровых операторов принадлежат, видимо, И.Ц.Гохбергу и М.Г.Крейну [7] и П.П.Забрейко [8, 9]. После этого было дано много разнообразных определений вольтерровых операторов (А.Л.Бухгейм, С.А.Гусаренко, Е.С.Жуковский, В.Г.Курбатов, J.Warga, M.Väth и др.); см., например, краткий обзор определений вольтерровости [10, с.97-101], а также [11, с.4-6], [12, 13]. Каждое из определений было предложено в связи с вполне конкретным, своим кругом проблем; так, определение [2] возникло при изучении некоторых вопросов теории оптимального управления распределенными системами (см. [10, 12, 14–17]).

Предложенное в [2] определение вольтерровости является непосредственным многомерным обобщением известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [3]. Процитируем [3]: ≪Функциональный оператор $V(t;\phi)$ мы будем называть функциональным оператором типа Volterra, если его величина определена значениями функции $\phi(\tau)$ в промежутке $0 \leqslant \tau < t$ ≫.

Приведем определение [2]: пусть $q, r \in [1, \infty]$, Π – брус в $\mathbf{R}^n$; оператор $A[\cdot] : L_q^m(\Pi) \to L_r^l(\Pi)$ назовем *вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств* Π, если $\forall\ H \in T$ значения $A[z](t)$ при $t \in H$ зависят лишь от $z\,|_H$ и не зависят от $z\,|_{\Pi\backslash H}$; класс таких операторов обозначим $V(T; q, m \to r, l)$.

Е.С.Жуковским в [4] было независимо введено и подробно изучено следующее близкое определению [2] и родственное определению [3] определение вольтерровости оператора, действующего в пространстве $L_p([a, b])$ функций одной переменной: пусть $\gamma \in [0,\ b-a]$; обозначим через v такую совокупность измеримых множеств e^γ отрезка $[a, b]$, что

$$\operatorname{mes}(e^\gamma) = \gamma \ \ \forall\gamma, \quad \gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow e^{\gamma_1} \subset e^{\gamma_2}; \tag{\#}$$

будем говорить, что оператор $W : L_p([a, b]) \to L_p([a, b])$ принадлежит классу $\mathbf{V}_v$ ($W \in \mathbf{V}_v$), если

$$(\forall e^\gamma \in v)\,\{x_1(t) = x_2(t)\,(\forall t \in e^\gamma) \Rightarrow (Wx_1)(t) = (Wx_2)(t)\,(\forall t \in e^\gamma)\};$$

обозначим $\mathbf{V} = \bigcup\limits_v \mathbf{V}_v$, где объединение берется по всем множествам v, для которых выполнены соотношения (#); оператор $W : L_p([a, b]) \to L_p([a, b])$ принадлежит классу $\mathbf{V}$, если существует такая совокупность v со свойствами (#), что $W \in \mathbf{V}_v$.

Конечную цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\}$ назовем δ-цепочкой оператора $G : E \longrightarrow E$, если G удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$. В [18] был доказан следующий цепочечный признак квазинильпотентности ЛОО, действующих в БИП [3].

Т е о р е м а 1. *Если ЛОО* $G : E \longrightarrow E$ *удовлетворяет условию:*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \text{ вольтеррова} \quad \delta - \text{цепочка оператора } G,$$

то $\rho(G) = 0$.

2. Управляемые начально-краевые задачи и эквивалентные функционально-операторные уравнения. В теории оптимального управления распределенными системами некоторый компромисс между стремлением к общности построений, с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме — с другой, достигается, по-видимому, при переходе к описанию управляемых систем на языке функционально-операторных уравнений (говоря по-другому, операторных уравнений в функциональных пространствах или функциональных уравнений). Так, например, Дж. Варгой была предложена (см. [19]) довольно общая форма описания управляемых систем с помощью функциональных уравнений в пространствах типа C и L_p, приспособленная к изучению, например, проблемы существования оптимального управления, расширения оптимизационных задач, обобщенных управлений, необходимых условий оптимальности и других вопросов. С.А. Чукановым на широкий класс функциональных уравнений в пространствах типа C распространена схема Дубовицкого-Милютина получения принципа максимума (см. [20]). К указанным формам [19, 20] приводят, в частности, различные системы с отклоняющимся аргументом. Ими охватываются и некоторые *начально-краевые задачи* (НКЗ) для гиперболических и параболических уравнений с частными производными (см. [20, с. 265-266], [19, с. 169-170]).

В [21] была предложена функционально-операторная форма описания распределенных систем, адекватная многим проблемам теории распределенной оптимизации и охватывающая достаточно широкий круг управляемых НКЗ. Функционально-операторные уравнения, о которых идет речь, это уравнения вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \qquad t = \{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{$\star$}$$

над пространством L^m_∞, где Π — фиксированное ограниченное, измеримое по Лебегу множество; $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция; $A[.] : L^m_\infty \to L^l_\infty$ — ЛОО, являющийся, если использовать терминологию [2], вольтерровым на некоторой системе T подмножеств основного множества Π [4]; $v(.) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управляющая функция из множества $\mathcal{D} \subset L^s_\infty(\Pi)$. Список управляемых НКЗ, для которых в [21] было показано, как с помощью обращения главной части привести их к уравнению ($\star$) над $L^m_\infty(\Pi)$, содержал задачу Коши для системы обыкновенных

[3]Теорема 1 развивает и обобщает в случае БИП известный признак квазинильпотентности П.П. Забрейко [8, 9] (подробнее см. [18].). В [8, 9] было введено понятие интегрального оператора Вольтерра в классах функций нескольких переменных, были получены признаки квазинильпотентности таких операторов и указаны их абстрактные аналоги, касающиеся ЛОО, действующих в банаховом пространстве.

[4]Термин ≪оператор, вольтерров на системе множеств≫ в [21] не использовался; он был введен позже, в работе [2]. Вместо него в [21] для обозначения свойства (1) применялся термин ≪ естественная определенность оператора ≫. Именно, пусть T — некоторая часть Σ, $E = L_p$. Оператор $G : L^m_p \to L^l_p$ был назван в [21] *естественно определенным, как оператор на пространствах* $L^m_p(H)$, $H \in T$, *формулой*

$$G[z](t) \equiv G[Q_H[z]](t), t \in H, z \in L^m_p(H),$$

если выполняется (1) (здесь Q_H — *оператор продолжения нулем*: $Q_H[z](t) \equiv \{z(t), t \in H; 0, t \in \Pi \backslash H\}$). При этом в [21] основное множество Π — это брус в $\mathbf{R}^n$, а T — система брусов, сжимающихся по некоторым координатным направлениям.

дифференциальных уравнений, начальные задачи для той же системы с разнообразными запаздывниями, задачу Гурса-Дарбу, многомерную задачу Гурса-Дарбу, обобщенную задачу Гурса, некоторые НКЗ для интегро-дифференциальных уравнений, в частности, смешанную задачу для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа уравнения переноса. Впоследствии этот список был существенно расширен и включил в себя самые разнообразные управляемые НКЗ для гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных уравнений, различных уравнений с запаздываниями и других (см., например, [22, 14–16, 10, 23, 17, 24]).

Переход [26, 27] в теории уравнений вида $(\star)$ от случая уравнений в пространстве L_∞^m к общему случаю уравнений в пространствах L_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ позволил существенно расширить классы возможных решений рассматриваемых управляемых НКЗ; соответствующие примеры, связанные с параболическими и гиперболическими уравнениями, можно найти, например, в [17], [28]-[30].

Приведение НКЗ к уравнению $(\star)$ обращением главной части. Пусть управляемая НКЗ имеет вид

$$\mathcal{L}_0\left[x\right](t) = g(t, \mathcal{L}_1\left[x\right](t), u(t)),\ t \in \Pi, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_\Gamma\left[x\right](t) = g_\Gamma(t),\ t \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_N\left[x\right](t) = g_N(t),\ t \in N, \tag{4}$$

где

(2) – основное уравнение (система уравнений) НКЗ, в котором $\mathcal{L}_0$ – дифференциальный (интегро-дифференциальный) линейный оператор, $g(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция, $u(\cdot) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управление из множества $\mathcal{D} \subset L_\infty^s(\Pi)$, $\mathcal{L}_1$ — дифференциальный (интегро-дифференциальный) оператор;

(3) – граничные условия ($\Gamma \subset \partial\Pi$, $\mathcal{L}_\Gamma$ – линейный оператор, функция g_Γ задана);

(4) – начальные условия ($N \subset \partial\Pi$, $\mathcal{L}_N$ – линейный оператор, функция g_N задана).

Будем считать, что размерности значений g, g_Γ, g_N, а также размерности значений образов отображений $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_\Gamma$, $\mathcal{L}_N$ одинаковы и равны m.

Пусть: W — банахово пространство определенных на Π m-вектор-функций, в котором ищем (обобщенное) решение $x(\cdot)$ НКЗ (2) – (4); p и q — некоторые числа из $[1, \infty]$.

Считаем, что выполняются следующие условия А) — Д) (подобные условия часто выполняются в НКЗ математической физики).

А) Для любой функции $z(\cdot) \in L_p^m$ линейная НКЗ

$$\mathcal{L}_0\left[x\right](t) = z(t),\ t \in \Pi, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_\Gamma\left[x\right](t) = g_\Gamma(t),\ t \in \Gamma, \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_N\left[x\right](t) = g_N(t),\ t \in N \tag{7}$$

имеет единственное (обобщенное) решение в пространстве W.

Б) Решение (5) – (7) можно представить как сумму

$$x(t) = G\left[z\right](t) + \alpha(t),\ t \in \Pi, \tag{8}$$

где $\alpha(\cdot) \in W$, $G[\cdot] : L_p^m \to W$ — линейный оператор, осуществляющий взаимно-однозначное отображение L_p^m на $G\left[L_p^m\right]$.

В) $\mathcal{L}_1\left[W\right] \subset L_q^l$.

Г) $\mathcal{L}_1 G : L_p^m \to L_q^l$ — ЛОО.

Д) $g(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in L_p^m$ при $y(\cdot) \in L_q^l$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}$.

Пусть

$$W_\alpha \equiv G\left[L_p^m\right] + \alpha.$$

Формула (8) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями $z(\cdot)$ пространства L_p^m и функциями $x(\cdot)$ линейного многообразия W_α пространства W.

Функцию $x(\cdot) \in W$ назовем обобщенным решением НКЗ (2) – (4), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{D}$, если она является обобщенным решением задачи (5) – (7) при

$$z(t) = g(t, \mathcal{L}_1[x](t), u(t)),\ t \in \Pi. \tag{9}$$

Пусть $x(\cdot) \in W$ — решение НКЗ (2) – (4), отвечающее управлению $u(\cdot)$. По свойству функции g связанная с функцией $x(\cdot)$ формулой (9) функция $z(\cdot)$ принадлежит классу L_p^m. По определению решения НКЗ (2) – (4) те же $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ связаны формулой (8), и так как $z(\cdot)$ принадлежит классу L_p^m, то $x(\cdot)$ принадлежит классу W_α. Подставляя (8) в (9), получаем

$$z(t) = g(t, \mathcal{L}_1[x](t), u(t)) \equiv g(t, \mathcal{L}_1[G[z]](t) + \mathcal{L}_1[\alpha](t), u(t)),\ t \in \Pi.$$

Функция $\mathcal{L}_1[\alpha]$ принадлежит L_q^l, а оператор

$$A \equiv \mathcal{L}_1 G \tag{10}$$

есть ЛОО из L_p^m в L_q^l. Таким образом, связанная с решением $x(\cdot)$ НКЗ (2) – (4) формулой (9) функция $z(\cdot)$ удовлетворяет при указанном управлении $u(\cdot)$ уравнению вида $(\star)$ над L_p^m, в котором оператор A задается формулой (10), а функция f — формулой

$$f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv g(t, \mathbf{p} + \mathcal{L}_1[\alpha](t), \mathbf{v}). \tag{11}$$

Пусть, наоборот, некоторая функция $z = \widetilde{z}(\cdot) \in L_p^m$ удовлетворяет при некотором управлении $u(\cdot)$ на Π уравнению $(\star)$, в котором оператор A задается формулой (10), а функция f — формулой (11). Тогда связанная с функцией $z = \widetilde{z}(\cdot)$ формулой (8) функция $x = \widetilde{x}(\cdot)$ принадлежит классу W_α, являясь решением задачи (5) – (7) при $z = \widetilde{z}(\cdot)$. Так как, с другой стороны, в силу $(\star)$ и (8)

$$\widetilde{z}(t) \equiv g(t, \mathcal{L}_1[G[\widetilde{z}]](t) + \mathcal{L}_1[\alpha](t), u(t)) = g(t, \mathcal{L}_1[\widetilde{x}](t), u(t)), \quad t \in \Pi,$$

то функции $z = \widetilde{z}(\cdot)$ и $x = \widetilde{x}(\cdot)$ связаны между собой формулой (9). Это означает, что функция $x = \widetilde{x}(\cdot)$ является решением НКЗ (2) – (4) при указанном $u(\cdot)$.

Таким образом, НКЗ (2) – (4) эквивалентна рассматриваемому над L_p^m уравнению $(\star)$, в котором оператор A задается формулой (10), а функция f — формулой (11). Связь между их решениями задается формулой (8).

3. Об условиях сохранения глобальной разрешимости управляемых вольтерровых функционально-операторных уравнений. В [21] была предложена схема получения достаточных условий *устойчивости существования* (при возмущении управления) *глобальных решений* (УСГР) управляемых НКЗ с помощью их функционально-операторного описания $(\star)$. В модернизированном виде общая схема [21] получения условий УСГР была опубликована в [2, 14–16, 10]. При этом роль управления могла играть не только управляющая функция $v(.)$, но и оператор A. Так будет, например, тогда, когда уравнение $(\star)$ получается переписыванием некоторой НКЗ с управляемыми старшими коэффициентами (см., например, [10, 12, 24]) или с управляемой границей (см., например, [23]).

В [10, 25] доказательства теорем УСГР управляемых уравнений специального вида $(\star)$ были распространены на нелинейные вольтерровы функционально-операторные уравнения с варьируемой правой частью общего вида

$$z(t) = F[z](t), t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{$\star\star$}$$

над пространством L_∞^m.

Схема [2, 14–16, 10] доказательства теорем УСГР для уравнений $(\star)$ и $(\star\star)$, рассматриваемых над пространством L_∞^m, использует продолжение локальных решений по вольтерровым цепочкам операторов, задающих уравнение. Она включает специальную локальную теорему существования и единственности решения, теорему об априорных оценках разности локальных решений, отвечающих разным управлениям, и теорему о продолжении решений с одного множества вольтерровой цепочки на другое. При этом важную роль играют оценки линейных операторов, возникающих при линеаризации исходных уравнений. Для доказательства локальных теорем существования и теорем о продолжении в [2, 14–16, 10] использовался принцип сжимающих отображений.

В [26, 27] теория УСГР [2, 14–16, 10] была обобщена на уравнения вида $(\star)$ в лебеговых пространствах L_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; при этом оператор $A[\cdot]$ в $(\star)$ — это линейный оператор из L_p^m в некоторое L_q^l, а управление $v(\cdot)$ принадлежит некоторому множеству $\mathcal{D} \subset L_k^s$. Об истории вопроса и некоторых дальнейших обобщениях теории УСГР на случай уравнений в банаховых пространствах см. краткий обзор [17].

Отметим, что указанный переход в теории УСГР от случая функционально-операторных уравнений вида $(\star)$ в пространствах L_∞^m к общему случаю уравнений в пространствах L_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ оказался нетривиальным. Реализация в этом общем случае упомянутой выше схемы [2, 14–16, 10] доказательства теорем УСГР потребовала привлечения некоторых новых средств и, в частности, введения и изучения в [26, 27] нового понятия *равностепенной квазинильпотентности семейства операторов*. Причины этого будут указаны в следующем параграфе.

Примеры теорем УСГР для уравнения $(\star)$ приведены в конце статьи.

4. Функционально-операторные уравнения и принцип сжимающих отображений. При изучении вопросов существования решений функционально-операторных уравнений часто используется та или иная модификация принципа сжимающих отображений. Схема рассуждений может быть, например, следующей. Пусть $F[.] : E^m \to E^m$ — некоторый оператор, и рассматривается уравнение

$$x(t) = F[x](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in E^m. \tag{12}$$

Если найдется замкнутое множество $X \subset E^m$ и положительный квазинильпотентный ЛОО $G : E \to E$ такие, что

$$F[X] \subset X \tag{13}$$

и выполняется операторное условие Липшица

$$| F[x](t) - F[y](t) | \leqslant G[| x - y |](t), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in X, \tag{14}$$

то к уравнению (12), рассматриваемому на X, применим принцип сжимающих отображений, в соответствии с которым это уравнение имеет единственное в X решение. В самом деле, в этом случае оператор F является сжимающим на X в некоторой норме $\|.\|_*$, эквивалентной норме $\|.\|_{E^m}$. Действительно, в силу (14) в качестве нормы $\|.\|_*$ можно взять любую норму вида $\|.\|_* \equiv \||\ .\ |\|_{(\varepsilon)}$, где $\|.\|_{(\varepsilon)}$ – эквивалентная норме $\|.\|$ норма пространства E, монотонная относительно упорядоченности E по конусу неотрицательных функций и такая, что норма оператора $G : E \to E$, соответствующая норме $\|.\|_{(\varepsilon)}$, меньше числа $\varepsilon < 1$. Существование такой нормы $\|.\|_{(\varepsilon)}$ пространства E для любого числа $\varepsilon > 0$ вытекает из следующей *леммы об эквивалентной норме*, опирающейся на формулу И.М. Гельфанда для спектрального радиуса.

Л е м м а 1 ([31, с.91-92]). *Пусть* $\mathbf{B}$ *— банахово пространство с нормой* $\|.\|$, *монотонной относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по некоторому конусу* K. *Если* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *— квазинильпотентный ЛОО, для которого* K *является инвариантным конусом, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует эквивалентная норме* $\|.\|$ *норма* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* $\mathbf{B}$, *монотонная относительно* *полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по конусу* K, *такая, что норма оператора* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, *соответствующая норме* $\|.\|_{(\varepsilon)}$, *не превосходит* ε. *В качестве нормы* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *может быть взята норма*

$$\|x\|_{(\varepsilon)} \equiv \sum_{i=0}^{n_\varepsilon - 1} \frac{\left\|G^i[x]\right\|}{\varepsilon^i}, \quad x \in \mathbf{B},$$

где n_ε *таково, что* $\sqrt[n_\varepsilon]{\|G^{n_\varepsilon}\|} \leqslant \varepsilon$ (*норма оператора соответствует норме* $\|\cdot\|$ *пространства* $\mathbf{B}$).

Указанная схема использовалась, например, в [10, 14–16, 22–25] для доказательства локальных теорем существования вольтерровых функционально-операторных уравнений специального вида $(\star)$ и общих уравнений второго рода $(\star\star)$ в пространствах типа L_∞^m. При этом

$$G[x](t) = \mathcal{N} \cdot B[x](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in L_\infty, \tag{15}$$

где $B[.] : L_\infty \to L_\infty$ — ЛОО, не зависящий от множества X, которое выбирается равным проекции $P_H U_M(\hat{z})$ некоторого шара $U_M(\hat{z})$ пространства L_∞^m на подпространство функций, зануляющихся вне вольтеррова множества H оператора B, а $\mathcal{N}$ — зависящая от X постоянная.

Однако повторение той же схемы рассуждений применительно, например, к уравнениям вида $(\star)$ в пространстве L_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ возможно уже лишь для довольно узкого класса уравнений. Причина в том, что для тех классов подмножеств L_p^m (класс шаров L_p^m; класс прообразов шаров при отображении $A : L_p^m \to L_q^l$), в которых при этом естественно искать множество X, удовлетворяющее условию (13), условие (14), вообще говоря, не выполняется (точнее, оно выполняется лишь в некоторых предельных случаях, охватывающих сравнительно узкий круг уравнений вида $(\star)$).

Тем не менее возможна такая модернизация указанной выше схемы использования принципа сжимающих отображений, которая применима к уравнениям вида $(\star)$ в пространствах L_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ и в общей ситуации. Дело в том, что для широкого класса таких уравнений вместо условия (14) выполняется условие

$$|F[x](t) - F[y](t)| \leqslant G(x,y)\left[|x-y|\right](t), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in X, \tag{16}$$

где $G(x,y)[.] : L_p \to L_p$ – ЛОО, имеющий вид

$$G(x,y)[z](t) \equiv \alpha[x,y](t) \cdot B[z](t), \quad t \in \Pi, \ z \in L_p, \tag{17}$$

в котором $B[.] : L_p \to L_q$ – фиксированный положительный ЛОО, $\alpha[.,.] : L_p^m \times L_p^m \to L_r$ – ограниченный оператор $(q^{-1} + r^{-1} = p^{-1})$. Как мы увидим, возникающие при этом семейства

$$\{G(x,y) \in L(L_p, L_q) : x, y \in X\} \tag{18}$$

операторов вида (17) в случае, когда X — прообраз шара при отображении A, часто обладают свойством так называемой суперравностепенной квазинильпотентности (см.п.5). Это позволяет (в случае выполнения условия (16)) воспользоваться принципом сжимающих отображений, заменив в приведенной выше схеме его использования, опирающейся на условие (14), применение леммы 1 применением формулируемой ниже теоремы об эквивалентной норме (теорема 2).

5. Равностепенно квазинильпотентные семейства операторов и теорема об эквивалентной норме. Пусть $\mathbf{B}$ – банахово пространство с нормой $\|.\|$, Γ – некоторое множество, $\{G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство зависящих от параметра $\gamma \in \Gamma$ квазинильпотентных ЛОО. Напомним, что в соответствии с формулой И.М. Гельфанда квазинильпотентность ЛОО $G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ означает выполнение предельного соотношения

$$\sqrt[k]{\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Назовем семейство операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma\in\Gamma}\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ назовем *суперравностепенно квазинильпотентным*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Очевидно, что из суперравностепенной квазинильпотентности семейства операторов следует его равностепенная квазинильпотентность. Приведем полезный для дальнейшего простой пример семейства операторов, не являющегося равностепенно (и тем более суперравностепенно) квазинильпотентным. Пусть $\Pi=[0,1]$, $\mathbf{B}\equiv L_1$, Γ — лежащее на единичной сфере $U_1(0)$ пространства L_1 семейство функций

$$\alpha_m(t)=m\cdot\chi_{[0,\frac{1}{m}]}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1\quad (m=1,2,\ldots). \tag{19}$$

Пусть $A[z](t)\equiv\int\limits_0^t z(\xi)d\xi$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $z\in L_1$, а семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ задается формулой

$$G(\alpha)[z](t)\equiv\alpha(t)A[z](t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_1,\quad (\alpha\in\Gamma). \tag{20}$$

Так как $A[z](t)\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ при любом $z\in U_1(0)$ и $\operatorname{mes}\{A[\alpha_j]\neq 1\}\to 0$ при $j\to\infty$, то для любых $m,k\in\mathbf{N}$ имеем

$$\left\|\{G(\alpha_m)\}^k\right\|=m^k\left\|\left\{\chi_{[0,\frac{1}{m}]}A\right\}^k\right\|=m^k\left\|\left\{\chi_{[0,\frac{1}{m}]}A\right\}^{k-1}[\mathbf{1}]\right\|_1=\frac{m}{(k-1)!},$$

а следовательно, при каждом $k\in\mathbf{N}$

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma\in\Gamma}\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|}=\sqrt[k]{\sup_{m\in\mathbf{N}}m}\cdot\sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)!}}=\infty.$$

Это и означает отсутствие свойства равностепенной квазинильпотентности у семейства операторов (20), если Γ есть семейство (19). Заменяя в (20) семейство Γ, легко получить (при том же $\mathbf{B}$) суперравностепенное семейство операторов. Таким будет, например, семейство (20), если за множество Γ взять какой-либо шар в некотором L_p при $p\in(1,\infty]$. При $p=\infty$ этот факт достаточно очевиден, а при $p<\infty$ он следует из формулируемых ниже признаков суперравностепенной квазинильпотентности — теоремы 3 и леммы 6.

Сформулируем теперь упоминавшуюся в п.4 теорему об эквивалентной норме. Она является обобщением леммы 1.

Т е о р е м а 2 ([26, 27]). *Пусть норма $\|.\|$ пространства $\mathbf{B}$ монотонна относительно полуупорядоченности $\mathbf{B}$ по некоторому конусу K* [5]. *Пусть $\{G(\gamma)[.]:\mathbf{B}\to\mathbf{B}\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство квазинильпотентных ЛОО, для каждого из которых конус K является инвариантным. Пусть это семейство равномерно ограничено, то есть*

$$\nu_G\equiv\sup_{\gamma\in\Gamma}\|G(\gamma)\|<\infty,$$

[5]Утверждение теоремы останется верным, если из него исключить упоминание о конусе K и о монотонности нормы.

и суперравностепенно квазинильпотентно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует эквивалентная норме* $\|.\|$ *норма* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* $\mathbf{B}$, *монотонная относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по конусу* K, *такая, что при каждом* $\gamma \in \Gamma$ *соответствующая норма* $G(\gamma)$ *не превосходит числа* ε. *В качестве нормы* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *может быть взята норма*

$$\|x\|_{(\varepsilon)} \equiv \|x\| + \sum_{j=1}^{n_\varepsilon - 1} \varepsilon^{-j} \sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_j \in \Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_j)[x]\|, \quad x \in \mathbf{B},$$

где n_ε *таково, что*

$$\sqrt[n_\varepsilon]{\sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n_\varepsilon} \in \Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{n_\varepsilon})\|} \leqslant \varepsilon.$$

6. Признак суперравностепенной квазинильпотентности семейства интегральных операторов. Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ имеет вид $\Pi = \hat{\Pi} \times [0,\sigma]$, $\hat{\Pi} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ $(t^1,\ldots,t^{n-1})$, $t^n \in [0,\sigma]$. Введем обозначение $\hat{t} \equiv \mathrm{col}\{t^1,\ldots,t^{n-1}\}$, $t = \mathrm{col}\{\hat{t}, t^n\}$. Рассмотрим интегральные операторы вида

$$A[z](t) \equiv \int_0^{t^n} ds^n \int_{\hat{\Pi}} K(t,s)z(s)d\hat{s}, \quad t \in \Pi, \tag{21}$$

где $K(.,.) : \Pi \times \Pi \to \mathbf{R}$ — суммируемое ядро такое, что при некоторых $p,q \in [1,\infty]$, $p < q$

$$A \in L(L_p, L_q).$$

Пусть $r = \left\{\frac{qp}{q-p},\ \text{если}\ q \in (p,\infty);\ p,\ \text{если}\ q = \infty\right\}$. Тогда для любой функции $\alpha(.) \in L_r$ оператор $G(\alpha)[.]$, задаваемый формулой

$$G(\alpha)[z](t) \equiv \alpha(t)A[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p,$$

принадлежит классу $L(L_p, L_p)$. Пусть Γ — некоторое семейство функций из единичного шара $U_1(0)$ пространства L_r. При изучении уравнений вида $(\star)$ в пространствах типа L_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ встречаются семейства операторов вида

$$\{G(\alpha) \in L(L_p, L_p) : \alpha \in \Gamma\}. \tag{22}$$

Сформулируем признак равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (22). Обозначим через $A_\delta[.]$ интегральный оператор, формула которого получается из (21) заменой ядра $K(t,s)$ на произведение

$$K_\delta(t,s) \equiv \left\{\chi_{[t^n-\delta,t^n]}(s^{n+1}) \cdot K(t,s)\right\}.$$

Положим для любых $\delta > 0$, $\alpha \in L_r$

$$G_\delta(\alpha)[z](t) \equiv \alpha(t)A_\delta[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p.$$

Т е о р е м а 3 ([27]). *Если выполняется условие*

$$\|G_\delta(\alpha)\|_{p\to p} \to 0 \ \text{при}\ \delta \to 0 \ \text{равномерно по всем}\ \alpha \in \Gamma,$$

то семейство операторов (22) *суперравностепенно квазинильпотентно.*

7. Общий цепочечный признак суперравностепенной квазинильпотентности семейства функциональных операторов. Пусть $E' = E'(\Pi)$; $E'' = E''(\Pi)$ — БИП измеримых на Π функций, $G : E' \to E''$ – ЛОО, $T = \{H_i\}_{i=0}^k$ – вольтеррова цепочка оператора G. Положим $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i \in \overline{1,k}$. Так как $I = \sum\limits_{i=1}^{k} P_{h_i}$ и в силу вольтерровости

$$P_{h_i} G P_{h_j} = 0 \text{ при } i < j,$$

то оператор G имеет представление

$$G = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} P_{h_i} G P_{h_j} \equiv \sum_{k \geqslant i \geqslant j \geqslant 1} P_{h_i} G P_{h_j}.$$

Назовем цепочку T *вольтерровой сильной δ-цепочкой оператора* G, если

$$\left\| P_{h_i} G P_{h_j} \right\|_{E' \to E''} \leqslant \delta, \quad k \geqslant i \geqslant j \geqslant 1.$$

Понятно, что всякая вольтеррова сильная δ-цепочка является вольтерровой δ-цепочкой того же оператора. Обратное неверно. Справедлив следующий цепочечный признак равностепенной квазинильпотентности функциональных операторов.

Т е о р е м а 4 ([26, 27]). *Если семейство операторов $\{G(\gamma)[.]\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L(E, E)$ удовлетворяет условию*

$$\begin{cases} \forall \delta > 0 \quad \exists \text{ общая для всех операторов семейства} \\ \text{вольтеррова сильная } \delta\text{−цепочка,} \end{cases} \tag{23}$$

то это семейство операторов суперравностепенно квазинильпотентно.

Сформулируем простое, но полезное следствие теоремы 4.

Т е о р е м а 5 ([26, 27]). *Если выполняются условия теоремы 4, то семейство операторов, составленное из всевозможных попарных сумм операторов семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$, является суперравностепенно квазинильпотентным. То же самое можно сказать и про семейство операторов, составленное из всевозможных попарных произведений операторов данного семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$.*

8. Случай лебеговых пространств. В конкретных операторных классах признакам равностепенной квазинильпотентности предыдущего пункта можно придать более удобный для приложений вид. Сформулируем, например, несколько подобных следствий указанного выше общего цепочечного признака суперравностепенной квазинильпотентности, нашедших полезное применение в теории УСГР управляемых НКЗ для гиперболических и параболических уравнений.

Напомним, что семейство $\Gamma \subset L_r$ ($r \in [1, \infty)$) называется семейством функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $H \subset \Pi$, $mesH < \delta$, имеем $\|\alpha\|_{L_r(H)} < \varepsilon$ при всех $\alpha \in \Gamma$. Как следует из неравенства Гельдера, семейством с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами является, например, любое ограниченное в некоторой норме L_ν, $\nu \in (r, \infty]$, множество из L_r.

Пусть заданы: числа $p, q \in [1, \infty]$, $p \leqslant q$; ЛОО $G : L_p \to L_q$; множество $\Gamma \subset L_r$, где

$$r = \left\{ \frac{pq}{q-p}, \text{ если } p < q < \infty; \quad p, \text{ если } p < q = \infty; \quad \infty, \text{ если } p = q \right\}.$$

Рассмотрим семейство ЛОО $F : L_p \to L_p$, задаваемое формулой

$$F[z](t) \equiv \alpha(t) G[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p \quad (\alpha \in \Gamma). \tag{24}$$

Л е м м а 6 ([26, 27]). *Если $p < q$ и выполняются условия:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ — семейство функций с равностепенно} \\ \text{абсолютно непрерывными } L_r \text{ — нормами}; \end{array} \right. \tag{25}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta > 0 \text{ ЛОО } G : L_p \to L_q \text{ имеет} \\ \delta\text{-малую по мере вольтеррову цепочку}, \end{array} \right. \tag{26}$$

то задаваемое формулами (24) *семейство ЛОО $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию* (23) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Л е м м а 7 ([26, 27]). *Если выполнены условия:*

$$\Gamma \text{ — ограниченное множество в } L_r; \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\ \delta > 0 \text{ ЛОО } G : L_p \to L_q \text{ имеет} \\ \text{вольтеррову сильную } \delta \text{ — цепочку}, \end{array} \right. \tag{28}$$

то задаваемое формулами (24) *семейство ЛОО $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию* (23) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Л е м м а 8 ([26, 27]). *Если $q < \infty$, оператор G вполне непрерывен и выполнены условия* (26), (27)*, то задаваемое формулами* (24) *семейство ЛОО $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию* (23) *и суперравностепенно квазинильпотентно. Условие вполне непрерывности здесь может быть ослаблено до следующего условия:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ЛОО } G : L_p \to L_q \text{ переводит единичный шар в множество} \\ \text{функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.} \end{array} \right. \tag{29}$$

Полезно следующее обобщение леммы 8, получающееся ≪объединением условий≫ (26) и (29). Пусть $\mathcal{H} \subset \Sigma$, $M \subset L_q$, $1 \leqslant q < \infty$. Будем говорить, что семейство функций M обладает *$\mathcal{H}$-равностепенно абсолютно непрерывными L_q-нормами*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\alpha\|_{L_q(H)} < \varepsilon$ для каждого $H \in \mathcal{H}$, $mes\ H < \delta$ при всех $\alpha \in M$.

Л е м м а 9 ([26, 27]). *Пусть $q < \infty$, выполнено условие* (27)*, а также условие* (26)*, которое запишем следующим образом:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\ \delta > 0 \text{ ЛОО } G : L_p \to L_q \text{ имеет} \\ \delta \text{ — малую по мере вольтеррову цепочку } \mathcal{T}_\delta. \end{array} \right.$$

Пусть $\mathcal{H} \equiv \bigcup\limits_{\delta>0} \mathcal{T}_\delta^{(-)}$. Если

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ЛОО } G : L_p \to L_q \text{ переводит единичный шар в множество} \\ \text{функций с } \mathcal{H}\text{-равностепенно абсолютно непрерывными } L_q\text{-нормами}, \end{array} \right.$$

то задаваемое формулами (24) *семейство ЛОО $F : L_p \to L_p$ удовлетворяет условию* (23) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Заметим, что построения двух последних пунктов естественным образом распространяются на случай операторов, действующих в пространствах вектор-функций.

9. Примеры условий сохранения глобальной разрешимости вольтерровых функционально-операторных уравнений. Сформулируем некоторые достаточно общие теоремы об условиях УСГР управляемого функционально-операторного уравнения $(\star)$. Будем считать, что $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция, дифференцируемая по $\mathbf{p}$ на $\mathbf{R}^l$ для каждого $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^s$ при почти всех $t \in \Pi$ и вместе с $f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$ измеримая по t на Π для каждой пары $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для почти каждого $t \in \Pi$.

Рассмотрим сначала случай уравнения $(\star)$ над пространством L^m_∞. Пусть: $A : L^m_\infty \to L^l_\infty$ — заданный ЛОО; $v(.) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управляющая функция из некоторого множества $\mathcal{D} \subset L^s_\infty$. Будем считать, что выполняются следующие условия а) – г):

а) f и $f'_{\mathbf{p}}$ ограничены на любом ограниченном множестве;

б) $\mathcal{D}$ ограничено в L^s_∞;

в) ЛОО $A : L^m_\infty \to L^l_\infty$ регулярен;

г) для каждого $\delta > 0$ существует мажоранта $B : L_\infty \to L_\infty$ оператора A, имеющая вольтеррову δ-цепочку.

При условиях а) – г) любому управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного решения уравнения $(\star)$ в пространстве L^m_∞. Пусть Ω — класс тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает такое глобальное решение $z_v \in L^m_\infty$ уравнения $(\star)$. Произвольно фиксируем некоторый элемент $v_0 \in \Omega$. Пусть $z_0 \equiv z_{v_0}$. Для $v \in \mathcal{D}$ положим

$$\Delta_v f(z_0)(t) \equiv f(t, A[z_0](t), v(t)) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)),$$

$$\mathbf{r}_A(v, v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{L^l_\infty(\Pi)}.$$

Т е о р е м а 6 ([26]). *При указанных условиях найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ такие, что всякое управление $v \in D$, удовлетворяющее неравенству*

$$\mathbf{r}_A(v, v_0) < \varepsilon,$$

принадлежит классу Ω, при этом

$$\|z_v - z_0\|_{L^m_\infty(\Pi)} \leqslant C \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{L^m_\infty(\Pi)},$$

$$\|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty(\Pi)} \leqslant C \cdot \mathbf{r}_A(v, v_0).$$

Конкретные применения подобных теорем УСГР к разнообразным НКЗ см., например, в [10, 14–17, 21–24]. Сформулированная теорема обобщается на случай, когда управление в $(\star)$ осуществляется не только с помощью функции $v(\cdot)$, но и с помощью оператора A (см., например, [10, п.I.2.4]).

Рассмотрим теперь случай уравнения $(\star)$ над пространством L^m_p, $1 \leqslant p < \infty$. Пусть: p, q, k — заданные числа, $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$; $A : L^m_p \to L^l_q$ — заданный ЛОО; $v(.) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управляющая функция из некоторого множества $\mathcal{D} \subset L^s_k$.

Будем считать выполненными следующие условия a) – f):

a) формула $F[y, v](t) \equiv f(t, y(t), v(t))$, $t \in \Pi$, $y(.) \in L^l_q$, $v(.) \in \mathcal{D} \subset L^s_k$ определяет оператор $F[\cdot, \cdot] : L^l_q \times \mathcal{D} \to L^m_p$;

b) формула $\Phi[y, v](t) \equiv f(t, y(t), v(t))$, $t \in \Pi$, $y(.) \in L^l_q$, $v(.) \in \mathcal{D} \subset L^s_k$ определяет ограниченный оператор $\Phi[\cdot, \cdot] : L^l_q \times \mathcal{D} \to L^{m\times l}_r$, где $q^{-1} + r^{-1} = p^{-1}$; пусть $\Gamma \subset L_r$ — множество всех функций вида $|\Phi[A[z], v](t)|$, $t \in \Pi$, где $z(.) \in L^m_p$, $v(.) \in \mathcal{D}$;

c) $\mathcal{D}$ ограничено в L^s_k;

d) ЛОО $A : L^m_p \to L^l_q$ регулярен;

e) существует ЛОО $B : L_p \to L_q$, мажорирующий A и обладающий для каждого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой;

f) при любом $\nu > 0$ семейство действующих в L_p операторов $\{\alpha B : \alpha \in \Gamma, \|\alpha\|_r \leqslant \nu\}$ суперравностепенно квазинильпотентно.

При условиях a) – f) любому управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного решения уравнения ($\star$) в пространстве L_p^m. Пусть Ω — класс тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает такое глобальное решение $z_v \in L_p^m$ уравнения ($\star$). Произвольно фиксируем некоторый элемент $v_0 \in \Omega$. Пусть $z_0 \equiv z_{v_0}$. Для $v \in \mathcal{D}$ положим

$$\mathbf{r}_A(v, v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{L_q^l},$$

где, как и раньше, $\Delta_v f(z_0)(t) \equiv f(t, A[z_0](t), v(t)) - f(t, A[z_0](t), v_0(t))$.

Т е о р е м а 7 ([26]). *При указанных условиях для любого* $\gamma > 0$ *найдутся числа* $\varepsilon > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что всякое управление* $v \in D$, $\|v - v_0\|_{L_k^s} < \gamma$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\mathbf{r}_A(v, v_0) < \varepsilon,$$

принадлежит классу Ω, *при этом*

$$\|z_v - z_0\|_{L_p^m} \leqslant C \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{L_p^m},$$

$$\|A[z_v - z_0]\|_{L_q^l} \leqslant C \cdot \mathbf{r}_A(v, v_0).$$

Конкретные применения подобных теорем УСГР к управляемым НКЗ см., например, в [28 – 30].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

2. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. №5. С. 1056-1059.

3. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1-25.

4. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №9. С. 1599-1605.

5. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra // Bull. Calcutta Math. Soc. 1929. V. 20. P. 31-48 (Opere scelte 4, 198-212).

6. *Corduneanu C.* Integral equations and applications. Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 1991. 366 p.

7. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовых пространствах и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.

8. *Забрейко П.П.* Об интегральных операторах Вольтерра // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 1. С. 167-168.

9. *Забрейко П.П.* О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Литовский мат. сб. 1967. Т. 7. №2. С. 281-286.

10. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

11. *Жуковский Е.С.* Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Тамбов: Изд-во ТГУ им. Г.Р. Державина, 2003.

12. *Сумин В.И., Чернов А.В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. Вып. 1(26). С. 39-49.

13. *Жуковский Е.С., Алвеш М.Ж.* Абстрактные вольтерровы операторы // Известия. ВУЗов. Математика. 2008. №3. С. 3-17.

14. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. №1. С. 3-21.

15. *Сумин В.И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097 - 2109.

16. *Сумин В.И.* Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач // Украинский матем. журн. 1991. Т. 43. № 4. С. 555 - 561.

17. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. Вып. 1. С. 91-108.

18. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т.35. №10. С. 1402-1411.

19. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

20. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990.

21. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1975.

22. *Сумин В.И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №9. С. 1587-1595.

23. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Коши для гиперболического уравнения // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1997. С. 94-103.

24. *Беляева О.А., Степанова О.А., Сумин В.И.* О задаче Коши для полулинейного гиперболического уравнения второго порядка с управляемым старшим коэффициентом // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып.3(32). С. 89-93.

25. *Сумин В.И.* О функциональных вольтерровых уравнениях // Изв. вузов. Математика. 1995. №9. С. 67-77.

26. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. Вып. 2(19). С. 138-151.

27. *Сумин В.И.* Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах. Деп. в ВИНИТИ 03.09.98. № 2742 — В98.

28. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I; II; III; IV // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. №2 (21). С. 145-155; 2001. №1 (23). С. 198-204; 2002. №1 (25). С. 164-174; 2004. №1 (27). С. 185-193.

29. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об условиях устойчивости глобальных решений управляемой задачи Гурса-Дарбу // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 2(31). С. 64-81.

30. *Лисаченко И.В.* Нелинейная задача Гурса-Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями // Вестник ННГУ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. Вып. 5. С. 107-112.

31. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962.

БЛАГОДАРНОСТИ: Финансовая поддержка Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00495), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)» Минобрнауки РФ (регистр. номер 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13).

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Sumin V. I. Uniform quasinilpotency: definitions, conditions, examples of applications. Definition of uniform quasinilpotent family of the operators and definition of superuniform quasinilpotent family of the operators are introduced. Corresponding conditions for functional operators are formulated. Applications of these defintitions and conditions in the theory of controllable Volterra functional-operator equations are discussed.

Key words: uniform quasinilpotent family of the operators, Volterra chain of the operator, theorem about the equivalent norm, controllable Volterra functional-operator equation, conditions of global solutions existence-stability.