УДК 517.925.52

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© С.М. Дзюба

Dzyuba S.M. On quasi-periodic solutions for autonomous systems of ordinary differential equations. A definition is proposed of a quasi-periodic solution for an autonomous system of ordinary differential equations. Recurrent trajectories included in a non-empty compact minimal set are shown to be only quasi-periodic solutions.

1. Введение. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

считая, что $x \in \Sigma$ и f – гладкое, вообще говоря, класса C^1 векторное поле, определенное в каждой точке x некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Одно из важнейших мест в теории динамических систем, как известно, занимает проблема изучения поведения траекторий системы (1) на инвариантных и минимальных множествах. Многие классические результаты в данной области так или иначе относятся к случаю, когда порядок n рассматриваемой системы равен двум и связаны с теоремой Пуанкаре – Бендиксона и ее обобщениями (см., например, [1, 2]). Что касается многомерных систем, то характерными результатами здесь являются теоремы Биркгофа о рекуррентных траекториях и минимальных множествах, теоремы возвращения Пуанкаре – Каратеодори и Хинчина, а также эргодические теоремы (см., например, [1]). Вместе с тем, в работах [3, 4] показано, что каждое непустое компактное минимальное множество содержит рекуррентные траектории, описываемые квазипериодическими решениями. [1] Полное доказательство последнего утверждения в упомянутых работах, однако, не приведено. Более того, оказалось, что результаты, изложенные в [3, 4], могут быть непосредственно усилены.

Целью настоящей работы является уточнение результатов работ [3, 4], ориентированных на автономный случай. Данное уточнение основано на новом по сравнению с [3, 4] определении квазипериодического решения. Это определение не только дает возможность продвинуться в указанном направлении, но и позволяет установить общность положения квазипериодических решений на минимальных множествах.

2. Квазипериодические относительно сдвига решения. Прежде всего, изменим по отношению к работам [3, 4] определение квазипериодического относительно сдвига решения.

Определение 1. Пусть T – некоторое положительное число и $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что $\varphi(t)$ – квазипериодическое относительно сдвига T решение, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + N_\varepsilon T)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что простейшим примером квазипериодического относительно каждого сдвига T решения может служить периодическое решение. В качестве несколько менее тривиального примера отметим иррациональную обмотку тора и любое другое почти периодическое решение (см. п. 3). В общем случае существование квазипериодических относительно сдвига T решений устанавливает следующая

Лемма. *Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при $t \to \infty$. Тогда для каждого положительного числа T ω-предельное множество Ω решения $\xi(t)$ содержит траекторию K, описываемую квазипериодическим относительно сдвига T решением $\varphi(t)$. Более полно, для каждого значения $T > 0$ из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty \tag{2}$$

[1] В работах [3, 4] используется термин "условно-периодическое решение". Это представляется не совсем удачным поскольку в [3, 4] авторы упустили из виду, что данный термин уже употребляется в ином смысле (см. [5]).

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} \xi(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *и*

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*, где* $\varphi(t)$ *– некоторое квазипериодическое относительно сдвига* T *решение.*

Доказательство. Пусть g^t – фазовый поток, для которого поле f является полем фазовой скорости, и $x_1(t)$ – решение системы (1) с начальным условием

$$x_1(0) = x_0,$$

определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и при $t \to \infty$ содержащееся в некотором ограниченном множестве $\Sigma_0 \subset \Sigma$.

Для произвольного положительного числа T и всех значений $t \in \mathbb{R}$ и $N = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$x_N(t) = x_1(t + (N-1)T). \tag{3}$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях t и N имеет место равенство

$$x_N(t) = g^t \underbrace{(g^T \ldots g^T)}_{N-1} x_0,$$

которое, очевидно, может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$x_N(t) = g^t x_N(0). \tag{4}$$

Пусть (2) – произвольная последовательность натуральных чисел в соответствие с которой из множества (3) выберем последовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty. \tag{5}$$

Поскольку множество Σ_0 ограничено, множество (5) равномерно ограничено на отрезке $[0,T]$. Кроме того, так как оператор g^t непрерывен по t, то из равенства (4) следует, что множество (5) равностепенно непрерывно на $[0,T]$. Поэтому из него можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $[0,T]$ последовательность

$$x_{N_{k_1}}, x_{N_{k_2}}, \ldots, x_{N_{k_l}}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty, \tag{6}$$

пределом которой является функция φ, определенная и непрерывная для всех значений $t \in [0,T]$, т.е.

$$\lim_{l\to\infty} x_{N_{k_l}}(t) = \varphi(t) \tag{7}$$

равномерно на $[0,T]$. При этом функция φ по построению целиком содержится в ω-предельном множестве $\Omega \subseteq \Sigma_0$ решения $x_1(t)$. Поскольку при $t \to \infty$ оператор g^t непрерывно отображает множество Σ_0 в себя вдоль $x_1(t)$, заметим, что

$$\lim_{l\to\infty} g^t x_{N_{k_l}}(0) = g^t \varphi_0$$

равномерно на $[0,T]$, где φ_0 – точка множества Ω, такая, что

$$\varphi(0) = \varphi_0. \tag{8}$$

Тогда, переходя в (4) к пределу при $N \to \infty$ вдоль множества (6), получим равенство

$$\varphi(t) = g^t \varphi_0,$$

справедливое для всех значений $t \in [0,T]$ и означающее, что $\varphi(t)$ – решение системы (1) с начальным условием (8).

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (6) совпадает с последовательностью (5). Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \ldots, \Delta(N_k), \ldots$$

– множество, элементы которого при всех значениях N_k определим по формуле

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k.$$

При этом будем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(N_k) = \infty;$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (5) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Заметим теперь, что функция $\varphi(t)$ является решением системы (1), определенным для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и содержащимся при этих значениях t в множестве Ω. Но так как по построению при $t \in [0,T]$ справедливо равенство (7), то из непрерывности оператора g^t следует, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t) \tag{9}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Поскольку для всех значений N_k

$$x_{N_{k+1}}(0) = x_{N_k}(\Delta(N_k)T), \tag{10}$$

то

$$\varphi_0 = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}(\Delta(N_k)T). \qquad (11)$$

Более того, так как функция φ целиком содержится в множестве Ω, а множество Ω по построению компактно, без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\Delta(N_k)T) = \varphi_0^*,$$

где φ_0^* – некоторая точка множества Ω.

Если

$$\varphi_0 \neq \varphi_0^*,$$

то в силу условий (10) и (11) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0, зависящее от ε, что

$$|x_{N_k}(\Delta(N_k)T) - \varphi(\Delta(N_k)T)| \geq \varepsilon$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0\leq t\leq T} |x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T) - \varphi(t + \Delta(N_k)T)| \geq \varepsilon. \qquad (12)$$

Легко видеть, что множество M функций

$$\varphi(t), \varphi(t+T), \ldots, \varphi(t+NT), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$, по построению равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0,T]$. Поэтому замыкание $\bar{M}$ множества M – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0,T]$ множество.

Для всех значений $t \in [0,T]$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), \qquad (13)$$

причем в силу равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности множества (5) на отрезке $[0,T]$ можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = (\Delta(N_k)+1)T, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Тогда согласно неравенству (12) для всех значений $k > k_0$ наряду с (13) справедливо также и неравенство

$$\max_{0\leq t\leq t_k} |x_{N_k}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon.$$

Обозначим через k_1 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_1 > k_0$. Тогда

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_1}} |x_{N_{k_1}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon.$$

Более того, найдется такое положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и такое натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_1}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$$

и, как и ранее,

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_2}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon.$$

При этом найдется такое положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и такое натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_2}} |x_{N_{k_3}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_2.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такую последовательность

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0$$

положительных и такую последовательность

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} k_l = \infty$$

натуральных чисел, что

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} |x_{N_{k_l}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon \qquad (14)$$

и

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} |x_{N_{k_{l+1}}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_l. \qquad (15)$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0,t_{k_1}] \subset [0,t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0,t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0,\infty)$, а на каждом из этих отрезков $[0,t_{k_l}]$ выполнены неравенства (14) и (15). Поэтому в силу неравенства (12) $x^* \notin \bar{M}$. Последнее, однако, противоречит условию (11). Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = \lim_{k\to\infty} \varphi(\Delta(N_k)T) \qquad (16)$$

и, значит, в силу соотношений (9) и (16) для всех значений $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t + \Delta(N_k)T), \qquad (17)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Но согласно компактности множества $\bar{M}$ несложно заметить, что в равенстве (17) равномерная сходимость также имеет место на всей полуоси $[0,\infty)$. При этом в силу условия (17) видим, что $\bar{M}$ – инвариантное множество, т.е.

$$g^{kT}\bar{M} \subseteq \bar{M}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

(см. [6, с. 103]). Следовательно, сходимость в равенстве (17) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$.

Сказанное означает, что $\varphi(t)$ – квазипериодическое относительно сдвига T решение. Но выбор числа T выше по существу не играл никакой роли. Поэтому в силу соотношений (9) и (17) лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы выбор последовательности (2) не зависит от выбора числа T и обратно.

3. Квазипериодические решения. Введем следующее новое

Определение 2. Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что $\varphi(t)$ – квазипериодическое решение, если для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число $N(\varepsilon, T)$, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + N(\varepsilon, T)T)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что квазипериодическое решение системы (1) является квазипериодическим относительно каждого сдвига T решением.

Пусть $\varphi(t)$ – квазипериодическое относительно сдвига T решение и K – траектория, описываемая этим решением. Тогда в силу леммы несложно заметить, что замыкание $\bar{K}$ траектории K представляет собой непустое компактное минимальное множество. Поэтому K – рекуррентная траектория (см., например, [1, с. 308]). Следовательно, если $\xi(t)$ – квазипериодическое решение, то траектория L, описываемая решением $\xi(t)$, также является рекуррентной. Полную связь между квазипериодическими решениями и рекуррентными траекториями устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t, и K – траектория, описываемая решением $\varphi(t)$. Оказывается, что K – рекуррентная траектория тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ – квазипериодическое решение.*

Доказательство. Поскольку, как уже отмечалось, достаточность условий теоремы 1 очевидна, обратимся к доказательству их необходимости.

Пусть K – рекуррентная траектория, T – некоторое положительное число и M – множество функций

$$\varphi(t), \varphi(t \pm T), \ldots, \varphi(t \pm NT), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Легко видеть, множество M равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, T]$. Но поскольку K – рекуррентная траектория, то ее замыкание $\bar{K}$ – компактное минимальное множество (см., например, [1, с. 309]). Поэтому замыкание $\bar{M}$ множества M – также компактное минимальное множество.

Заметим теперь, что в силу леммы найдется такая последовательность

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty$$

натуральных чисел и такое квазипериодическое относительно сдвига T решение $\xi(t)$ системы (1), что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t + (N_k - 1)T) = \xi(t) \tag{18}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + (N_{k+1} - N_k)T) = \xi(t) \tag{19}$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

Обозначим через E множество функций

$$\xi(t), \xi(t \pm T), \ldots, \xi(t \pm NT), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Множество E по построению равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, T]$. Так как при этом $\xi(t)$ – квазипериодическое относительно сдвига T решение, то замыкание $\bar{E}$ множества E – компактное минимальное множество. Согласно условиям (18) и (19) $\bar{E} \subseteq \bar{M}$, что в данном случае означает равенство множеств $\bar{E}$ и $\bar{M}$ как минимальных. Тогда $\varphi(t)$ – квазипериодическое относительно сдвига T решение. Но выбор числа T выше по существу не играл никакой роли. Поэтому $\varphi(t)$ – квазипериодическое решение.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Возвращаясь к рассмотрению примеров квазипериодических решений отметим, что в силу теоремы 1 каждое почти периодическое решение оказывается квазипериодическим, поскольку траектория, описываемая почти периодическим решением рекуррентна (см. [1, с. 316]). При этом обратное, вообще говоря, неверно (см.

[1, с. 321], где приведен пример рекуррентной траектории, описываемой на торе решением, которое не является почти периодическим).

В качестве тривиальных следствий теоремы 1 и леммы справедливы следующие

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t)$ – *некоторое решение системы* (1), *определенное для всех значений* $t \in \mathbb{R}$ *и ограниченное при* $t \to \infty$. *Тогда* ω*-предельное множество* Ω *решения* $\xi(t)$ *содержит траекторию* K, *описываемую квазипериодическим решением* $\varphi(t)$. *Более полно, для каждого положительного числа* T *из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty \tag{20}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} \xi(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *и*

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$, *где* $\varphi(t)$ – *некоторое квазипериодическое решение.*

Теорема 3. *Пусть* M – *некоторое непустое компактное минимальное множество системы* (1). *Тогда каждая траектория, содержащаяся в* M, *является рекуррентной траекторией, описываемой квазипериодическим решением.*

Замечание 2. Как и в условиях леммы в условиях теоремы 2 выбор последовательности (20) не зависит от выбора числа T и обратно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
3. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* К вопросам управления в периодических процессах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. С. 15–20.
4. *Дзюба С.М.* Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1020–1023.
5. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 35, № 4. С. 527–530.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 25 июня 2004 г.