УДК 517.9

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко

Bulgakov A.I., Yefremov A.A., Panassenko Y.A. On differential inclusions stability. The problem of stability of sets of elementary differential inclusions solutions is under discussion. The set of solutions represents a combination of all the solutions defined in the finite interval which belongs to the prescribed set in the space of continuous functions. The necessary and sufficient conditions of differential inclusions stability related to internal and external disturbances are found.

Здесь продолжены исследования, опубликованные в работах [1- 5], по интегральным и дифференциальным включениям. В статье рассматривается вопрос устойчивости множеств решений обыкновенных дифференциальных включений. При этом множество решений представляет собой совокупность всех решений, определенных на конечном отрезке, которые принадлежат заранее заданному множеству в пространстве непрерывных функций. Устойчивость множеств решений понимается в естественном смысле, т. е. "небольшие" изменения как самого заранее заданного множества, которому принадлежат решения дифференциального включения, так и правой части должны "мало" изменять множество решений. В работе найдены необходимые и достаточные условия устойчивости дифференциальных включений относительно внутренних и внешних возмущений.

Пусть R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[R^n]$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства R^n; $B[u,r]$ - замкнутый шар пространства R^n с центром в точке u и радиусом $r>0$; $B[u,0]\equiv\{u\}$. Пусть $V\subset R^n$. Обозначим $\overline{V}$ замыкание множества V, $\mathrm{co}\,V$ выпуклую оболочку множества V; $V^\epsilon\equiv\overline{\bigcup_{u\in V}B[u,\epsilon]}$, если $\epsilon\geqslant 0$; $\|V\|=\sup\{|u|:u\in V\}$.

Пусть $h^+[F_1,F_2]\equiv\sup\{\rho[y;F_2]:y\in F_1\}$, где $\rho[\cdot;\cdot]$ расстояние между точкой и множеством в пространстве R^n, $h[F_1;F_2]=\max\{h^+[F_1;F_2];h^+[F_2;F_1]\}$ – хаусдорфово расстояние между множествами F_1 и F_2, содержащимися в пространстве R^n.

Обозначим $C^n[a,b]$ пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $L^1[a,b]$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to R^1$ с нормой $\|x\|_L=\int\limits_a^b|x(s)|ds$.

Непрерывность многозначных отображений понимается по Хаусдорфу. Измеримость однозначных функций понимаем по Лебегу (см. [6]), измеримость многозначных отображений понимаем в смысле [7]. Будем говорить, что отображение $F:[a,b]\times R^n\to\mathrm{comp}[R^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия: а) при каждом $x\in R^n$ отображение $F(\cdot,x)$ измеримо; б) при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно; в) для каждого ограниченного множества $V\subset R^n$ найдется такая функция $\beta_V\in L^1[a,b]$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in V$ выполняется неравенство $\|F(t,x)\|\leqslant\beta_V(t)$.

Обозначим через $K([a,b]\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta:[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждом $\delta\in[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\delta)$ измерима; для каждого $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_\delta:[a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau)\leqslant m_\delta(t)$; при почти всех $t\in[a,b]$ справедливы равенства $\lim\limits_{\delta\to0+0}\eta(t,\delta)=0$ и $\eta(t,0)=0$.

Пусть $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\subset K([a,b]\times[0,\infty))$ – множество всех функций $\eta:[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих свойством: для любого $\delta\geqslant 0$ найдется число $\beta_\delta\geqslant 0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau)\leqslant\beta_\delta$. Кроме того, $K_0([a,b]\times[0,\infty))\subset\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$

– множество функций $\eta : [a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, при каждом $\delta\geqslant 0$ непрерывных по первому аргументу. Далее, пусть $P([a,b]\times[0,\infty))\subset K([a,b]\times[0,\infty))$ – множество всех функций $\eta : [a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих свойством: при каждом $\delta>0$ существует такое число $r(\delta)>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство $r(\delta)\leqslant\eta(t,\delta)$, то есть это те функции, принадлежащие множеству $K([a,b]\times[0,\infty))$, значения которых при каждом фиксированном $\delta>0$ отделены от нуля одной положительной константой, не зависящей от t на множестве $[a,b]\backslash e$, где $\mu e=0$ (μ – мера Лебега). Обозначим также $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\equiv\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\cap P([a,b]\times[0,\infty))$, то есть это множество всех функций $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$, обладающих свойствами: 1) для любого $\delta\geqslant 0$ найдется такое число $\beta_\delta\geqslant 0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau)\leqslant\beta_\delta$; 2) при каждом $\delta>0$ существует такое число $r(\delta)>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство $r(\delta)\leqslant\eta(t,\delta)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\qquad t\in[a,b],\tag{1}$$

где отображение $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Под решением включения (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x:[a,b]\to R^n$, удовлетворяющую включению (1) при почти всех $t\in[a,b]$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in\operatorname{co}F(t,x(t)),\qquad t\in[a,b].\tag{2}$$

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. По аналогии с [8] дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,B[x(t),\eta_0(t,\delta)])^{\eta(t,\delta)},\quad t\in[a,b]\tag{3}$$

будем называть дифференциальным включением с внутренними и внешними возмущениями. Каждое решение включения (3) при фиксированном $\delta>0$ будем называть δ-решением включения (1). Будем считать, что $\eta_0(\cdot,\cdot)$ – радиус внутренних возмущений, $\eta(\cdot,\cdot)$ – радиус внешних возмущений. Радиус внутренних возмущений $\eta_0(\cdot,\cdot)$ определяет погрешность вычисления значений решения $x:[a,b]\to R^n$ дифференциального включения (1), а радиус внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot)$ определяет погрешность вычисления значений многозначного отображения $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ в дифференциальном включении (1), причем эти погрешности равномерны относительно фазовой переменной $x\in R^n$.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. Пусть для любого $\delta\in[0,\infty)$ отображение $F_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ определено равенством

$$F_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(t,x)=F(t,B[x,\eta_0(t,\delta)])^{\eta(t,\delta)}.\tag{4}$$

Отметим, что для любых функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in R^n$ имеет место равенство

$$\lim_{\delta\to 0+0}h[F_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(t,x),F(t,x)]=0.\tag{5}$$

В связи с этим все отображения $F_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$, определенные равенством (4) и зависящие от функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ и параметра $\delta\in[0,\infty)$, "близки" (в смысле равенства (5)) к отображению $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$, порождающему включение (1). В работе сформулированы необходимые и достаточные условия, при которых множества решений включения (3), зависящие от параметра δ, стремятся по δ к множеству решений включения (1) для любых $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$.

Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Обозначим через $H(V)$, $H_{\text{co}}(V)$ множества решений дифференциальных включений (1) и (2), соответственно, принадлежащих множеству V, и $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$ – множество всех δ-решений дифференциального включения (1), принадлежащих множеству V, с заданными радиусами внутренних и внешних возмущений $\eta_0(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)$.

Будем говорить, что дифференциальное включение (1) устойчиво на ограниченном замкнутом множестве $V\subset C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(V)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)},\tag{6}$$

где $\overline{H(V)}$, $\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкания в пространстве $C^n[a,b]$ множеств $H(V)$, $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$, соответственно, и V^δ – замкнутая в пространстве $C^n[a,b]$ δ-окрестность множества V.

Т е о р е м а 1. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым на множестве V относительно внутренних и внешних возмущений* *из класса* $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\overline{H(V)} = H_{\text{co}}(V). \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 1. *Из теоремы 1 следует, что дифференциальное включение (1) устойчиво на множестве* $V \subset C^n[a,b]$ *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$ *только в том случае, когда отображение* $F : [a,b]\times R^n \to \text{comp}[R^n]$ *либо имеет выпуклые образы, либо множество решений включения (1), принадлежащих* V, *с точностью до замыкания в пространстве* $C^n[a,b]$ *совпадает с множеством решений включения (2), принадлежащих множеству* V.

З а м е ч а н и е 2. *Отметим, что для дифференциальных включений равенство (7) выполняется не всегда. Это доказывает пример Плиса (A. Plis) [9; 8]. Таким образом, пример Плиса является примером неустойчивого дифференциального включения относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$.

Естественно поставить вопрос: будет ли выполнение равенства (7) необходимым и достаточным условием устойчивости относительно внутренних и внешних возмущений из более узкого класса, чем $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$? На этот вопрос отвечают следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$. *И пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (6), необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

С л е д с т в и е 1. *Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым на ограниченном замкнутом множестве* $V\subset C^n[a,b]$ *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Т е о р е м а 3. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$. *И пусть отображение* $F:[a,b]\times R^n\to\text{comp}[R^n]$ *непрерывно по совокупности аргументов. Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым на множестве* V *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $K_0([a,b]\times[0,\infty))\times P([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Пусть $\Sigma\in\text{comp}[R^n]$. Обозначим $H(\Sigma)$, $H_{\text{co}}(\Sigma)$, $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma)$ – множества решений включений (1)-(3) с начальными условиями, принадлежащими множеству Σ, соответственно.

Будем говорить, что дифференциальное включение (1) устойчиво по начальным условиям, принадлежащим множеству $\Sigma\in\text{comp}[R^n]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(\Sigma)} = \bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)}, \tag{8}$$

где $\overline{H(\Sigma)}, \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)}$ – замыкания в пространстве $C^n[a,b]$ множеств $H(\Sigma)$, $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)$, соответственно; Σ^δ – замкнутая δ-окрестность множества Σ в пространстве R^n.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\Sigma\in\text{comp}[R^n]$. *И пусть множество* $H_{\text{co}}(\Sigma)$ *ограничено в пространстве* $C^n[a,b]$. *Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по начальным условиям, принадлежащим множеству* Σ, *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\overline{H(\Sigma)} = H_{\text{co}}(\Sigma), \tag{9}$$

где $\overline{H(\Sigma)}$ *– замыкание в пространстве* $C^n[a,b]$ *множества* $H(\Sigma)$.

Будем говорить, что отображение $F:[a,b]\times R^n\to\text{comp}[R^n]$ удовлетворяет условию Липшица, если найдется такая суммируемая функция $\beta\in L^1[a,b]$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x,y\in R^n$ выполняется оценка

$$h[F(t,x);F(t,y)]\leqslant\beta(t)|x-y|. \tag{10}$$

Из теоремы 4 и теоремы А.Ф. Филиппова (см. [10]) вытекает

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $\Sigma\in\text{comp}[R^n]$. *Пусть отображение* $F:[a,b]\times R^n\to\text{comp}[R^n]$ *удовлетворяет условию Липшица. Тогда дифференциальное включение (1) устойчиво по начальным условиям, принадлежащим множеству* Σ, *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\Sigma\in\text{comp}[R^n]$. *И пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)\in$

$K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (8), необходимо и достаточно выполнение равенства (9).*

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $\Sigma\in\operatorname{comp}[R^n]$. *Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по начальным условиям, принадлежащим множеству* Σ, *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (9).*

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\Sigma\in\operatorname{comp}[R^n]$ *и множество* $H_{\mathrm{co}}(\Sigma)$ *ограничено в пространстве* $C^n[a,b]$. *Далее, пусть отображение* $F:[a,b]\times\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ *непрерывно по совокупности аргументов. Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по начальным условиям, принадлежащим множеству* Σ, *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $K_0([a,b]\times[0,\infty))\times\times P([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (9).*

Определим отображение $\Phi:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ равенством

$$\Phi(t,x)=\overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co}F(t,x)),\tag{11}$$

где $\overline{\operatorname{ext}}(\cdot)$ – замыкание множества крайних точек соответствующего множества.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in\Phi(t,B[x(t),\eta_0(t,\delta)])^{\eta(t,\delta)},\tag{12}$$

где отображение $\Phi:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ задано равенством (11). Пусть $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$ – множество всех решений включения (12), принадлежащих множеству $V\subset C^n[a,b]$, $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma)$ – множество решений включения (12) с начальными условиями, принадлежащими множеству Σ, при фиксированном $\delta>0$.

Отметим, что поскольку для любого $(t,x)\in[a,b]\times R^n$ выполняется включение $\Phi(t,x)\subset F(t,x)$, то справедливо соотношение $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)\subset H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$.

Будем говорить, что дифференциальное включение (1) устойчиво по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ на ограниченном замкнутом множестве $V\subset C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(V)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)},\tag{13}$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание множества $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

Т е о р е м а 7. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$. *И пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (13), необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

С л е д с т в и е 4. *Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по крайним точкам отображения* $F:[a,b]\times\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ *на ограниченном замкнутом множестве* $V\subset C^n[a,b]$ *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Будем говорить, что дифференциальное включение (1) устойчиво по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ и по начальным условиям, принадлежащим множеству $\Sigma\in\operatorname{comp}[R^n]$, относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(\Sigma)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)},\tag{14}$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)}$ – замыкание множества $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma^\delta)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

Т е о р е м а 8. *Пусть* $\Sigma\in\operatorname{comp}[R^n]$. *Пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (14), необходимо и достаточно выполнение равенства (9).*

С л е д с т в и е 5. *Пусть* $\Sigma\in\operatorname{comp}[R^n]$. *Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по крайним точкам отображения* $F:[a,b]\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ *и по начальным условиям, принадлежащим множеству* Σ, *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (9).*

Из теоремы А.Ф. Филиппова (см. [10]) вытекает

С л е д с т в и е 6. *Пусть $\Sigma \in \mathrm{comp}[R^n]$ и пусть отображение $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда дифференциальное включение (1) устойчиво по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ и по начальным условиям, принадлежащим множеству Σ, относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$.*

Рассмотрим дифференциальное включение (1) с краевыми условиями

$$x(a)\in\Sigma_1,\ x(b)\in\Sigma_2, \tag{15}$$

где $\Sigma_1,\Sigma_2\in \mathrm{comp}[R^n]$ – заданные множества.

Дифференциальное включение (1) с краевыми условиями (15) определяет задачу, которую будем называть краевой задачей (1), (15). Под решением задачи (1), (15) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x:[a,b]\to R^n$, которая удовлетворяет при почти всех $t\in[a,b]$ дифференциальному включению (1) и краевым условиям (15). Аналогично определяется задача (2), (15).

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x:[a,b]\to R^n$ – δ-решение задачи (1), (15), если при почти всех $t\in[a,b]$ для $x(\cdot)$ справедливо включение (3) и $x(\cdot)$ удовлетворяет краевым условиям (15).

Обозначим $\Xi=\{x\in C^n[a,b] : x(a)\in\Sigma_1, x(b)\in\Sigma_2\}$. Пусть $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V\cap\Xi)$ – множество всех δ-решений задачи (1), (15), принадлежащих множеству $V\subset C^n[a,b]$.

Будем говорить, что краевая задача (1), (15) устойчива на ограниченном замкнутом множестве $V\in C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(V\cap\Xi)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta\cap\Xi)}. \tag{16}$$

Из теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е 7. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Тогда, для того чтобы краевая задача (1), (15) была устойчивой на множестве V относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\overline{H(V\cap\Xi)}=H_{\mathrm{co}}(V\cap\Xi). \tag{17}$$

Из теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е 8. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. И пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. Тогда, для того чтобы для функций $\eta_0(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot,\cdot)$ выполнялось равенство (16), необходимо и достаточно выполнение равенства (17).*

С л е д с т в и е 9. *Для того чтобы краевая задача (1), (15) была устойчивой на ограниченном замкнутом множестве $V\subset C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (17).*

Из теоремы 3 вытекает

С л е д с т в и е 10. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. И пусть отображение $F:[a,b]\times R^n\to \mathrm{comp}[R^n]$ непрерывно по совокупности аргументов. Тогда, для того чтобы краевая задача (1), (15) была устойчивой на множестве V относительно внутренних и внешних возмущений из класса $K_0([a,b]\times[0,\infty))\times P([a,b]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (17).*

Пусть $\Sigma_1,\Sigma_2\in\mathrm{comp}[R^n]$ и пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. Обозначим $H(\Sigma_1;\Sigma_2)$ и $H_{\mathrm{co}}(\Sigma_1;\Sigma_2)$ множества решений краевых задач (1), (15) и (2), (15), соответственно; $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1,\Sigma_2)$ – множество всех δ-решений задачи (1), (15).

Будем говорить, что дифференциальное включение (1) устойчиво по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых функций $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(\Sigma_1;\Sigma_2)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)}, \tag{18}$$

где $\overline{H(\Sigma_1;\Sigma_2)}$, $\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)}$ – замыкания в пространстве $C^n[a,b]$ множеств $H(\Sigma_1;\Sigma_2)$, $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)$, соответственно; Σ_i^δ, $i=1,2$ – замкнутая δ-окрестность множества Σ_i в пространстве R^n.

Т е о р е м а 9. *Пусть $\Sigma_1,\Sigma_2\in\mathrm{comp}[R^n]$. И пусть множество $H_{\mathrm{co}}(\Sigma_1;\Sigma_2)$ ограничено в пространстве $C^n[a,b]$. Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$,* *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\overline{H(\Sigma_1;\Sigma_2)} = H_{co}(\Sigma_1;\Sigma_2), \qquad (19)$$

где $\overline{H(\Sigma_1;\Sigma_2)}$ *– замыкание в пространстве* $C^n[a,b]$ *множества* $H(\Sigma_1;\Sigma_2)$.

Т е о р е м а 10. *Пусть* $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$. *И пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (18), необходимо и достаточно выполнение равенства (19).*

С л е д с т в и е 11. *Пусть* $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$. *Для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times$ $\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (19).*

Т е о р е м а 11. *Пусть* $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$ *и множество* $H_{co}(\Sigma_1;\Sigma_2)$ *ограничено в пространстве* $C^n[a,b]$. *Далее, пусть отображение* $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ *непрерывно по совокупности аргументов. Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (1) было устойчивым по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $K_0([a,b]\times[0,\infty))\times P([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (19).*

Пусть $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$ и пусть $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$. Обозначим $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V\cap\Xi)$ – множество всех решений задачи (12), (15), принадлежащих множеству $V \in C^n[a,b]$, $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1,\Sigma_2)$ – множество всех решений задачи (12), (15) при фиксированном $\delta > 0$.

Будем говорить, что краевая задача (1), (15) устойчива по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ на ограниченном замкнутом множестве $V \subset C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(V\cap\Xi)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta\cap\Xi)}. \qquad (20)$$

Из теоремы 7 вытекает

С л е д с т в и е 12. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$. *И пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (20), необходимо и достаточно выполнение равенства (17).*

С л е д с т в и е 13. *Для того чтобы краевая задача (1), (15) была устойчивой по крайним точкам отображения* $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ *на ограниченном замкнутом множестве* $V \subset C^n[a,b]$ *относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (17).*

Будем говорить, что краевая задача (1), (15) устойчива по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ и по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times$ $\times K([a,b]\times[0,\infty))$, если для любых $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$ справедливо равенство

$$\overline{H(\Sigma_1;\Sigma_2)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)}, \qquad (21)$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(\Sigma_1^\delta;\Sigma_2^\delta)$.

Т е р е м а 12. *Пусть* $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$. *Пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))$ *и* $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда, для того чтобы для функций* $\eta_0(\cdot,\cdot)$ *и* $\eta(\cdot,\cdot)$ *выполнялось равенство (21), необходимо и достаточно выполнение равенства (19).*

С л е д с т в и е 14. *Пусть* $\Sigma_1,\Sigma_2 \in \mathrm{comp}[R^n]$. *Для того чтобы краевая задача (1), (15) была устойчивой по крайним точкам отображения* $F:[a,b]\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ *и по краевым условиям (15) относительно внутренних и внешних возмущений из класса* $\widetilde{P}([a,b]\times[0,\infty))\times$ $\times K([a,b]\times[0,\infty))$, *необходимо и достаточно выполнение равенства (19).*

Далее рассмотрим вопрос устойчивости множеств ω-периодических решений дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F_\omega(t,x(t)),\ t \in (-\infty,\infty), \qquad (22)$$

где $F_\omega : (-\infty;\infty)\times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ – ω-периодическое по первому аргументу отображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори на $[0,\omega]\times R^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\,F_\omega(t,x(t)),\ t \in (-\infty,\infty). \qquad (23)$$

Пусть $C_0^n[0,\omega] = \{x \in C^n[0,\omega] : x(0) = x(\omega)\}$ и пусть $V(\omega)$ – ограниченное замкнутое множество подпространства $C_0^n[0,\omega]$. Пусть

$H(V(\omega)), H_{co}(V(\omega))$ – множества всех решений включений (22), (23), принадлежащих множеству $V(\omega)$, соответственно (множества сужений на $[0,\omega]$ всех ω-периодических решений включений (22), (23), сужения которых принадлежат множеству $V(\omega)$).

Пусть $K([0,\omega]\times[0,\infty))$ – множество всех функций $\eta:(-\infty,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, ω-периодических по первому аргументу и на $[0,\omega]$ обладающих свойствами из класса функций $K([a,b]\times[0,\infty))$. Аналогично определяются классы функций $\widetilde{K}([0,\omega]\times[0,\infty))$, $K_0([0,\omega]\times[0,\infty))$, $P([0,\omega]\times[0,\infty))$ и $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))$.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\in K([0,\omega]\times[0,\infty))$. Обозначим через $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V(\omega))$ – множество всех δ-решений включения (22), принадлежащих множеству $V(\omega)$ (множество сужений на $[0,\omega]$ всех ω-периодических δ-решений включения (22), сужения которых принадлежат множеству $V(\omega)$).

Аналогично определению устойчивости включения (1) на множестве $V\subset C^n[a,b]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([a,b]\times[0,\infty))\times K([a,b]\times[0,\infty))$ и устойчивости по крайним точкам отображения $F:[a,b]\times R^n\to \operatorname{comp}[R^n]$ определяется устойчивость дифференциального включения (22) на множестве $V(\omega)\subset C_0^n[0,\omega]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([0,\omega]\times[0,\infty))\times K([0,\omega]\times[0,\infty))$ и устойчивость включения (22) по крайним точкам отображения $F_\omega:(-\infty;\infty)\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))\times K([0,\omega]\times[0,\infty))$. При этом в равенствах (6), (13) следует заменить V на $V(\omega)$, а $V(\omega)^\delta$ понимать как замкнутую δ-окрестность множества $V(\omega)$ в подпространстве $C_0^n[0,\omega]$. В дальнейшем будем считать, что в равенствах (6), (7), (12) осуществлена замена V на $V(\omega)$.

Из теорем 1 - 3, 7 для ω-периодических решений вытекают

Следствие 15. *Пусть $V(\omega)$ – ограниченное замкнутое множество подпространства $C_0^n[a,b]$. Для того чтобы дифференциальное включение (22) было устойчиво на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([0,\omega]\times[0,\infty))\times K([0,\omega]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Следствие 16. *Пусть $V(\omega)$ – ограниченное замкнутое множество подпространства $C_0^n[0,\omega]$. И пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([0,\omega]\times[0,\infty))$. Тогда, для того чтобы для функций $\eta_0(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot,\cdot)$ выполнялось равенство (6), необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Следствие 17. *Для того чтобы дифференциальное включение (22) было устойчивым на ограниченном замкнутом множестве $V(\omega)\subset C_0^n[0,\omega]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))\times K([0,\omega]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Следствие 18. *Пусть $V(\omega)$ – ограниченное замкнутое множество подпространства $C_0^n[0,\omega]$. И пусть отображение $F_\omega:(-\infty;\infty)\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ непрерывно по совокупности аргументов. Тогда, для того чтобы дифференциальное включение (22) было устойчивым на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $K_0([0,\omega]\times[0,\infty))\times P([a,b]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Следствие 19. *Пусть $V(\omega)$ – ограниченное замкнутое множество подпространства $C_0^n[0,\omega]$. И пусть $\eta_0(\cdot,\cdot)\in\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot)\in K([0,\omega]\times[0,\infty))$. Тогда, для того чтобы для функций $\eta_0(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot,\cdot)$ выполнялось равенство (13), необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Следствие 20. *Для того чтобы дифференциальное включение (22) было устойчивым по крайним точкам отображения $F_\omega:(-\infty;\infty)\times R^n\to\operatorname{comp}[R^n]$ на ограниченном замкнутом множестве $V(\omega)\subset C_0^n[0,\omega]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))\times K([0,\omega]\times[0,\infty))$, необходимо и достаточно выполнение равенства (7).*

Далее приведем достаточные условия устойчивости множества ω-периодических решений "по первому приближению", используя следствия 15 - 20 и результат А.Е. Ирисова и Е.Л. Тонкова [11]. Для этого рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in A(t)x(t)+F_\omega(t,x(t)),\ t\in(-\infty,\infty),\tag{24}$$

где элементы отображения $A:(-\infty,\infty)\to R^{n\times n}$ представляют собой ω-периодические функции, которые на $[0,\omega]$ суммируемы.

Будем говорить, что линейная часть включения (24) обладает свойством A, если уравнение

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)\tag{25}$$

имеет только тривиальное ω-периодическое решение.

Пусть линейная часть включения (24) обладает свойством A, тогда ядро $G : [0,\omega] \times [0,\omega] \to R^{n\times n}$ оператора Грина ω-периодической задачи для неоднородного уравнения (25) имеет вид (см. [12])

$$G(t,s) = X(t)P(t,s)(E - X(\omega))^{-1}X^{-1}(s), \qquad (26)$$

где $X(\cdot)$ – решение матричного уравнения (25), удовлетворяющего условию $X(0) = E$ (E – единичная матрица),

$$P(t,s) = \begin{cases} E, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega, \\ X(\omega), & \text{если } 0 \leqslant t < s \leqslant \omega. \end{cases}$$

Будем говорить, что отображение $F_\omega : (-\infty;\infty) \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ удовлетворяет условию Липшица, если найдется ω-периодическая функция $\beta_\omega : (-\infty,\infty) \to [0,\infty)$, суммируемая на $[0,\omega]$, что сужение F_ω на $[0,\omega]\times R^n$ удовлетворяет неравенству (10), в котором $\beta = \beta_\omega$. В дальнейшем через β_ω будем обозначать функцию, удовлетворяющую оценке (10), в которой $F = F_\omega$.

Будем говорить, что дифференциальное включение (24) обладает свойством B, если справедливы следующие условия: 1) линейная часть обладает свойством A; 2) отображение $F_\omega : (-\infty;\infty) \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ удовлетворяет условию Липшица; 3) спектральный радиус оператора $\widetilde{G} : C_0^1[0,\omega] \to C_0^1[0,\omega]$, определенного равенством

$$(\widetilde{G}x)(t) = \int\limits_0^\omega |G(t,s)|\beta_\omega(s)x(s)ds,$$

меньше единицы, где $|G(t,s)|$ – согласованная с пространством R^n норма матрицы $G(t,s)$, определенной равенством (26).

Как показано в [11], если дифференциальное включение (24) обладает свойством B, то множество всех ω-периодических решений включения (24) ограничено в подпространстве $C_0^n[0,\omega]$ и является плотным в $C_0^n[0,\omega]$ подмножеством во множестве всех ω-периодических решений "овыпукленного" включения (24). В связи с этим, согласно следствиям 15 - 20, справедливы следующие утверждения. При этом, в приводимых ниже утверждениях речь идет о множестве решений включения (24) и о множествах решений дифференциальных включений с внутренними и внешними возмущениями, порожденных отображением $F_\omega : (-\infty,\infty) \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ включения (24).

С л е д с т в и е 21. *Пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что дифференциальное включение (24) будет устойчивым на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{K}([0,\omega]\times[0,\infty)) \times K([0,\omega]\times[0,\infty))$.*

С л е д с т в и е 22. *Пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. И пусть $\eta_0(\cdot,\cdot) \in \widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot) \in K([0,\omega]\times[0,\infty))$. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что для функций $\eta_0(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot,\cdot)$ выполняется равенство (6).*

С л е д с т в и е 23. *Пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что дифференциальное включение (24) будет устойчивым на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty)) \times K([0,\omega]\times[0,\infty))$.*

С л е д с т в и е 24. *Пусть многозначное отображение $F_\omega : (-\infty;\infty) \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ непрерывно по совокупности аргументов. Далее, пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что дифференциальное включение (24) будет устойчивым на множестве $V(\omega)$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $K_0([0,\omega]\times[0,\infty)) \times P([0,\omega]\times[0,\infty))$.*

С л е д с т в и е 25. *Пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. И пусть $\eta_0(\cdot,\cdot) \in P([0,\omega]\times[0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot) \in K([0,\omega]\times[0,\infty))$. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что для функций $\eta_0(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot,\cdot)$ выполняется равенство (13).*

С л е д с т в и е 26. *Пусть дифференциальное включение (24) обладает свойством B. Тогда найдется такое ограниченное замкнутое множество $V(\omega)$ подпространства $C_0^n[0,\omega]$, что дифференциальное включение (24) будет устойчивым по крайним точкам отображения $F_\omega : (-\infty;\infty) \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ относительно внутренних и внешних возмущений из класса $\widetilde{P}([0,\omega]\times[0,\infty)) \times K([0,\omega]\times[0,\infty))$.*

З а м е ч а н и е 3. *Таким образом, в изложенной теории устойчивости относительно внутренних и внешних возмущений фундаментальную роль играет равенство (7). В связи с этим представляет интерес получение для данной теории достаточных условий выполнения равенства (7), поскольку они гаран-*

тируют устойчивость множества решений включения (1). При этом, на наш взгляд, интересно найти такие условия выполнения равенства (7), при которых это соотношение было бы справедливо для произвольного ограниченного замкнутого множества $V \subset C^n[a,b]$. Так как в этом случае можно "варьировать" множеством V и тем самым рассматривать множества "нужных" решений, которые, например, имеют "физический смысл" или которые формулируются той или иной задачей. Отметим также, что известные условия А.Ф. Филиппова [10], А.Е. Ирисова, Е.Л. Тонкова [11], G. Pianigiani [13] выполнения равенства (7) справедливы только для множеств $V \subset C^n[a,b]$ с определенными свойствами, то есть условий только замкнутости и ограниченности множеста V и соответствующих неравенств многозначного отображения $F : [a,b] \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$, порождающего включение (1), недостаточно для выполнения равенства (17) (см. [10, 11, 13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И.* Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений // Матем. сб. 1992. Т. 183. N10. С. 63-86.
2. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189. N6. С. 3-32.
3. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Изв. ВУЗов. Математика. 1999. N3 (442). С. 3-16.
4. *Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А.* Асимптотическое представление множеств приближенных решений дифференциальных включений // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 1998. Т. 3. Вып. 4. С. 394-400.
5. *Булгаков А.И.* Асимптотическое представление множеств δ-решений дифференциального включения // Матем. заметки. 1999. Т. 65. N5. С. 775-778.
6. *Натансон И.Т.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
7. *Иоффе А.Д. Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
8. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
9. *Plis A.* Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci, ser. math., astr., phys. 1963. V. 11. N6. P. 369-370.
10. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967. N3. С. 16-26.
11. *Ирисов А.Е., Тонков Е.Л.* О замыкании множества периодических решений дифференциального включения // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 32-38.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. *Pianigiani G.* On the fundamental theory of multivalued differential equations // I. Different. Equations, 1977. V. 25. N1. P. 30-38.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа отмечена Правительством Российской Федерации в рамках поддержки ведущих научных школ, грант N 96-15-96195.

Поступила в редакцию 12 октября 1999 г.