УДК 517.911, 517.968

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; обобщенное решение.

В работе вводится понятие обобщенного решения задачи Коши функционально-дифференциального включения с вольтерровым по Тихонову многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению (разложимости) значений. Сформулированы условия, при которых множество обобщенных решений задачи Коши почти реализует (или реализует) расстояние в пространстве суммируемых функций от своих значений до любой суммируемой функции. На основе этого утверждения получены оценки обобщенных решений задачи Коши, аналогичные оценкам А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений.

Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями были исследованы в монографиях [1 – 4]. Здесь рассматривается задача Коши функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$.

Далее, пусть $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция соответствующих множеств.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ $(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть $\mathbf{X}$ – нормированное пространство с нормой $\|\ \|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U] \equiv \sup\limits_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U] = \max\{h^+[U_1;U]; h^+[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$. Обозначим через $sw\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m,$$

элементов $x_i \in \Phi, i = 1,2,\ldots,m$, где непересекающиеся измеримые подмножества $\mathcal{U}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяют условию $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = [a,b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, (2) x(a) = x_0, (3)$, где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией, и найдется такое отображение $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, принимающее нулевое значение на диагонали произведения $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, которое непрерывно на ней и симметрично, что для любых $x,y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется оценка

$$h^+_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)] \leqslant \|P(x,y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{4}$$

Отметим, что правая часть включения (1) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

Под *обобщенным решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{5}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,...m$ удовлетворяют равенствам (2).

Следует отметить, что если множество $\Phi(x)$ в (1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (1)-(3) совпадает с классическим решением (см. [5,6]).

Отметим также, что к задаче (1)-(3) сводятся, например, математические модели сложных многокомпонентных систем автоматического управления с импульсными воздействиями, в которых в связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой (регулируется разными правыми частями). Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения задачи (1)-(3) и составляют множество всех таких траекторий.

По заданному отображению $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{sw}\Phi(x). \tag{6}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ будем называть *«овыпукленным по переключению» отображением.*

Будем говорить (см. [7]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau$– сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau$– множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров. Из этого условия вытекает, что овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенный равенством (6), также вольтерров. Кроме того, в силу оценки (4), оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывен по Хаусдорфу (см. [6]).

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{7}$$

Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *обобщенным решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{8}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (7), $\Delta(x(t_k))$ $(k : t_k \in [a,\tau])$ удовлетворяют представлению (2).

Пусть $H(x_0,\tau)$ – множество всех обобщенных решений задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in \in (a,b])$.

О п р е д е л е н и е 1. Множество всех обобщенных решений задачи (1)-(3) будем называть *априорно ограниченным*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует обобщенного решения $y \in H(x_0,\tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обобщенное решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (1)-(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{9}$$

где функция $q \in \widetilde{\Phi}(x)$ удовлетворяет равенству (5). Если неравенство (9) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. Тогда множество обобщенных решений задачи* (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$, *то множество обобщенных решений задачи* (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что отображения $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ и $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если для них выполняются условия

1) для каждого $k = 1,2,\ldots,m$ найдется неубывающая непрерывная функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$,что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x-y|); \tag{10}$$

2) найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, который удовлетворяет следующим условиям: $\Gamma(0) = 0$, для любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедливо неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\ \Phi(y)] \leqslant ||\Gamma(Z(x-y))||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}; \tag{11}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ...m, \quad y(a) = p \tag{12}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$, отображения $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяют неравенству (10), $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, числа $\varepsilon, p \geqslant 0$.

Л е м м а . *Пусть для отображения* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *выполняется условие* 2 *определения* 3. Тогда для овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенного равенством (6), справедливо неравенство (11).

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{13}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{14}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (13).

Т е о р е м а 2. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{C}^n[a,b]$ *имеет место представление* (13) *и функция* $\varkappa \in \boldsymbol{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (14). *Далее, пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *и* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)-(3). *Тогда для любого обобщенного решения* $x \in \widetilde{C}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *удовлетворяющего для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *неравенству*

$$\|q - \widetilde{q}\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}),$$

в котором функция $q \in \overline{sw}\Phi(x)$ *удовлетворяет представлению* (5), *а функция* $\widetilde{q}$ *из соотношения* (13), *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t), \tag{15}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa, \varepsilon, p)))(t), \tag{16}$$

где $\xi(\varkappa, \varepsilon, p) \in \widetilde{C}^1_+[a,b]$ – *верхнее решение задачи* (12) *при* $u = \varkappa$ *и* $p = |x_0 - y(a)|$.

Из теорем 1, 2 вытекает

Т е о р е м а 3. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (13) *и функция* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (14). *Далее, пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ и $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)-(3), *и множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограниченно. Тогда при* $\varepsilon > 0$ *существует обобщенное решение* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *для которого при всех* $t \in [a,b]$ *справедлива оценка* (15), *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется соотношение* (16).

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$, *то утверждение справедливо и при* $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк, 1987.
3. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1987.
5. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.
6. *Пучков Н.П., Булгаков А.И., Григоренко А.А., Коробко А.И., Корчагина Е.В., Мачина А.Н., Филиппова О.В., Шлыкова И.В.* О некоторых задачах функционально-дифференциальных включений // Вестник ТГТУ. 2008. Т. 14. № 4. С. 947-974.
7. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 07-01-00305, 09-01-97503), Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Bulgakov A.I., Filippova O.V., Korchagina E.V. On some estimations to a Cauchy problem for a functional-differential inclusion with impulses. In the work the concept of generalized solution of a Cauchy problem for a functional-differential inclusion with Volterra (in the sense of Tikhonov) multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching (decomposable) is formulated. Conditions for realizeaion (almost realizeaion) of the distace from any summable function to it's values in the space of summable functions are formulated. On this basis an estimations analogous to the Filippov for ordinary differential inclusions are obtained.

Key words: functional-differential inclusion; impulses; generalized solution.