2. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1972. Т. 6. № 2.

3. *Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г.* О свойствах весовых потенциалов для одного класса B-эллиптических операторов // Вестник Удмуртского ун-та. Ижевск, 2008. Вып. 2.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09–01–97503, № 11–01–00645, № 11–01–00626).

Sazonov A.Yu., Fomicheva Yu.G. On a singular elliptic boundary value problem in unbounded region. In the work there is considered the Dirichlet problem with boundary conditions on a hyperplane for B-elliptic operator. A solution in explicit form is derived. It is defined by a double layer weight potential and is expressed by an integral of the Poisson type.

Key words: Dirichlet problem; B-elliptic singular operator; fundamental solution.

Сазонов Анатолий Юрьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

Фомичева Юлия Геннадиевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

УДК 517.983, 517.921

О РАЗЛОЖЕНИИ ЛЕБЕГА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

© **П.М. Симонов, А.В. Чистяков**

Ключевые слова: атомарные; сингулярные; диффузные и интегральные операторы; регулярные и мажорированные операторы.

Показано, что любой порядково непрерывный линейный оператор, действующий в решетках измеримых функций, представим в виде интеграла по случайной борелевской мере. В терминах случайных мер изучались свойства основных полос регулярных операторов.

В статье построен аналог теории разложения Лебега для пространства $\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L^1(\mathbf{X})$ суммируемых вектор-функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{X}$. В основу построения положен тот факт, что $\mathcal{B}(L^1, L^1(\mathbf{X}))$ является решеточно нормированным пространством, где нормирующей решеткой является K-пространство $\mathcal{L}_r(L^1)$ регулярных операторов $U : L^1 \to \to L^1$. Решеточная норма в $\mathcal{B}(L^1, L^1(\mathbf{X}))$ удовлетворяет аксиоме разложимости Л.В. Канторовича.

Таким образом, в банаховой алгебре $\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ имеется естественный аналог $[Z]\mathcal{B}(L^1(\mathbf{X}))$ любой полосы $[Z]$ K-пространства $\mathcal{L}_r(L^1)$. В частности, полосе $\mathcal{L}_a(L^1)$, порожденной операторами подстановки с весом, соответствует полоса $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$ атомарных операторов, действующих в пространстве $L^1(\mathbf{X})$.

Основное содержание работы связано с исследованием полосы $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$. Эта полоса является алгеброй, наследующей многие свойства своего скалярного прототипа — алгебры $\mathcal{B}_a(L^1)$.

Целью статьи является получение в векторнозначной ситуации аналогов известных результатов о разложении порядково непрерывных операторов в решетках измеримых функций. Прежде всего, эти аналоги связаны с некоторыми теоремами Л. Вейса. Краткое изложение этих теорем имеется в препринте [1], а доказательства приведены в статье [2]. Следует сказать, что в этой статье впервые достаточно полно изложена теория псевдоинтегрального представления регулярных операторов, являющаяся весьма нетривиальным распространением разложений Лебега борелевских мер. В работе [3] получены разложения лебеговского типа мажорированных операторов в пространствах вектор-функций (только эти операторы представляют собой интегралы Лебега по случайной векторнозначной мере ограниченной вариации). Результаты разложений Лебега операторов весьма глубоки и многое проясняют в структуре пространства регулярных или мажорированных операторов. Но непосредственно использовать эти результаты для спектральных исследований удается в редких случаях: как правило, резольвенты регулярных операторов не регулярны (исключения здесь составляют компактные операторы). Как известно, пространства L^1 и L^∞ таковы, что $\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{L}_r(L^1)$ и $\mathcal{B}(L^\infty) = \mathcal{L}_r(L^\infty)$, т. е. все действующие в них ограниченные линейные операторы регулярны. Для решеток L^p при $1 < p < \infty$ регулярные операторы плохо расположены в алгебре $\mathcal{B}(L^p)$. В частности, они не плотны, что использовалось для построения интересных примеров (такой «хороший» оператор, как преобразование Фурье, в L^2 не может быть аппроксимирован регулярными операторами).

Давно и хорошо известно, что любой ограниченный линейный оператор, действующий в банаховой решетке L^1, мажорируется (или, эквивалентно, регулярен) и является порядково непрерывным. Теорема о представлении порядково непрерывных операторов, восходящая к представлению Рисса операторов в пространстве непрерывных функций, явным образом сформулированная Суруром [4], Колтоном [5] и Вейсом [2] (а неявно использовавшаяся во многих работах по функциональному анализу, теории меры и теории вероятностей), позволяет представить оператор $U : L^1 \to L^1$ интегралом Лебега по случайной борелевской мере:

$$(Uh)(\omega) = \int h(\omega)\mu_\omega(d\xi) \qquad (h \in L^1, \omega \in \Omega).$$

Под случайной мерой понимается семейство $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ (знакопеременных) борелевских мер такое, что функция $\omega \mapsto \mu_\omega A$ $(\omega \in \Omega)$ измерима при всех $A \in \Sigma$. В терминах типа случайной меры определяются основные полосы $\mathcal{B}_u(L^1)$ $(u = i, s, a, d)$ K-пространства $\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{L}_r(L^1)$. Индекс u характеризует тип случайной меры: i — μ-абсолютно непрерывная мера; s — μ-сингулярная мера; a — атомарная мера; d — диффузная мера. По теореме Дуббинса–Фридмана [6] компоненты случайных разложений Лебега $\mu_\omega = \mu_\omega^i + \mu_\omega^s$ и $\mu_\omega = \mu_\omega^a + \mu_\omega^d$ также являются случайными мерами. Поэтому справедливы операторные аналоги классических разложений Лебега

$$\mathcal{B}(L^1) = \mathcal{B}_i(L^1) \oplus \mathcal{B}_s(L^1), \qquad \mathcal{B}(L^1) = \mathcal{B}_a(L^1) \oplus \mathcal{B}_d(L^1).$$

Полоса $\mathcal{B}_i(L^1)$ состоит из интегральных операторов. Этот факт — простое следствие теоремы Радона–Никодима. Намного более интересным и нетривиальным является тот факт, что полоса $\mathcal{B}_a(L^1)$ порождается операторами умножения и операторами подстановки. Из него следует, что полоса $\mathcal{B}_a(L^1)$ атомарных операторов состоит из счетных порядковых сумм операторов подстановки с весом. В частности поэтому она является подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(L^1)$. Как обнаружил Л. Вейс [1] в своем обзоре, дизъюнктное дополнение этой подалгебры — пространство $\mathcal{B}_d(L^1)$ диффузных операторов — является левым (но не правым) идеалом решеточной алгебры $\mathcal{B}(L^1)$. Следствием алгебраических свойств разложений являются отмеченные спектральные свойства: подалгебра $\mathcal{B}_a(L^1)$ наполнена, т. е. обратимость в алгебре $\mathcal{B}(L^1)$ совпадает с обратимостью в очень узкой подалгебре $\mathcal{B}_a(L^1)$; обратимость атомарного оператора эквивалентна обратимости его обратимости по модулю идеала $\mathcal{W}(L^1)$ слабо компактных операторов. Именно распространение этих свойств на полосу $\mathcal{B}_a(L^1(\mathbf{X}))$ и является нашей главной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weis L.* Decompositions of positive operators and some of their applications // Funct. Anal.: Surv. and Recent Results. 3: Proc. 3rd Conf. Paderborn: Elsevier Science Publishers B.V., 1983. P. 95-115.

2. *Weis L.* On the representation of order continuous operators by random measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285. № 2. P. 535–563.

3. *Шамаев И.И.* О разложении и представлении регулярных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 2. С. 192–202.

4. *Sourour A.R.* Characterization and order prop-erties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math. 1982. V. 99. № 1. P. 145-158.

5. *Kalton N.J.* The endomorphisms of L_p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 3. P. 353–381.

6. *Dubins L., Freedman D.* Measurable sets of measures // Pacific J. Math. 1977. V. 14. № 3. P. 1211–1223.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Пермского края (№ 10–01–96054–р–урал–а) и ЗАО «ПРОГНОЗ».

Simonov P.M., Chistyakov A.V. On Lebesgue's decomposition of linear operators in the space of summable vector-function. It is shown thay any order continuous linear operator acting in lattices of summable functions can be presented in the form of integral on random Borelean measure. In terms of random measures there were investigated the properties of basic stripes for regular operator.

Key words: atomic, and singular, and diffuse, and integral operators; regular; and majorized operators.

Симонов Пётр Михайлович, Пермский государственный университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simonov@econ.psu.ru.

Чистяков Александр Владимирович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: simpm@mail.ru.