Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ

УДК 517.972.8

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ДВУЗНАЧНЫХ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

© **А. П. Бакланов, А. Г. Ченцов**

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, максимин, множество притяжения, обобщенный элемент, топологическое пространство.

Рассматривается задача на максимин в условиях, когда допускается ослабление ограничений на выбор стратегий. Предполагается, что функция платы реализуется посредством «непрерывного агрегирования» разрывных вектор-функций, аргументами которых являются стратегии участников. Построено обобщенное представление асимптотики реализуемых значений максимина при ужесточении ослабленных ограничений. В качестве обобщенных элементов используются конечно-аддитивные (0,1)-меры.

Один из авторов имел возможность неоднократно участвовать в научных конференциях, проводимых в государственном университете им. Г.Р. Державина тамбовскими математиками, известными специалистами в области теории дифференциальных уравнений и оптимального управления. Их усилиями исследования в упомянутых направлениях выведены на современный уровень; они известны и получили высокую оценку в других научных центрах. С целым рядом исследовательских центров самого высокого уровня математиков Тамбова связывают сложившиеся традиции, базирующиеся на приоритетах математики как науки и математического образования. Совсем недавно тамбовские математики отметили замечательный юбилей — 80 лет институту математики, физики и информатики Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Авторы желают им новых творческих успехов.

Введение

Рассматривается игровая задача на максимин, не обладающая, вообще говоря, устойчивостью при ослаблении ограничений на выбор стратегий. Исследуются вопросы, связанные с реализацией максимина на «грани фола». Последнее достигается применением расширений исходной игровой задачи.

Конструкции расширений задач оптимального управления рассматривались многими авторами. Сейчас отметим [1]–[3]; особо отметим использования расширений в игровых задачах управления (см., в частности, [4]–[6]). Напомним здесь же, что в определении фундаментального свойства стабильности Н.Н. Красовским было предложено использовать обобщенные реакции на обычные управления одного из игроков; наряду с правилом экстремального сдвига это сыграло важную роль в доказательстве фундаментальной теоремы Н.Н. Красовского и А.И. Субботина об альтернативе в нелинейной дифференциальной игре.

Отметим также, что идеи, связанные с расширениями, использовались и в других разделах математики (см., например, [7],[8] в связи с задачами математического программирования). В качестве полезного применения расширений следует отметить использование смешанных стратегий в антагонистических играх, благодаря которому в широком классе игровых задач удается решить проблему существования седловой точки (см. [9],[10] и др.). Заметим, что расширение «совокупной» игровой задачи может не сводиться к сочетанию индивидуальных расширений игроков; соответствующий пример, касающийся вспомогательных программных конструкций для позиционных дифференциальных игр, см., например, в [11].

В настоящей работе исследуется один класс задач, для которого вышеупомянутая декомпозиция оказывается возможной (см. также [12]–[14]). Индивидуальное расширение каждого из игроков реализуется в классе конечно-аддитивных (к.-а.) (0,1)-мер; при этом на уровне аппроксимативных конструкций допускается ослабление ограничений на выбор стратегий. Возникают ограничения асимптотического характера (см. [14]). Исследуется асимптотика значений максимина в условиях ослабленных ограничений. Точнее, устанавливается свойство сходимости к «обычному» максимину обобщенной задачи в классе к.-а. (0,1)-мер. Последнее свойство можно рассматривать как конкретный вариант положений [14]. Существенной особенностью исследуемой игровой задачи является критерий, допускающий «вхождение» разрывных зависимостей, что и требует, на этапе расширения, использования аппарата к.-а. теории меры при постороении соответствующей компактификации пространства обычных решений (в настоящей статье используется компакт к.-а. (0,1)-мер).

2. Обозначения и определения

Используем общие конструкции расширений абстрактных задач о достижимости (см. [15]–[19]). Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Используем кванторы, пропозициональные связки. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем двухэлементное множество, содержащее x,y и не содержащее других объектов (см. [20, гл. II]). Если u — объект, то $\{u\} \triangleq \{u;u\}$ есть одноэлементное множество, содержащее u. Для всяких двух объектов a и b полагаем, следуя [20, гл. II], что $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$ (упорядоченная пара a,b с первым элементом a и вторым b). Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества S. Если f — отображение из множества A в множество B и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f, а $(f|C)$ есть отображение из C в B, для которого $(f|C)(y) \triangleq f(y)\ \forall y \in C$ (сужение f на множество C). В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;...\}$ (натуральный ряд) и при этом $\overline{1,s} \triangleq \{i \in \mathbb{N} | i \leqslant s\}\ \forall s \in \mathbb{N}$. Через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств H.

Линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно (имеются в виду функции со значениями в $\mathbb{R}$). Через $\mathbb{R}^s$ обозначаем множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathbb{R}$, получая s-мерное арифметические пространство; строго говоря, каждый такой кортеж есть отображение из $\overline{1,s}$ в $\mathbb{R}$. Оснащаем (при $s \in \mathbb{N}$) конечномерное пространство $\mathbb{R}^s$ нормой $||\cdot||^{(s)} \triangleq (||x||^{(s)})_{x\in\mathbb{R}^s}$, где при $\tilde{x} \in \mathbb{R}^s$ число $||\tilde{x}||^{(s)}$ есть наибольшее из $|\tilde{x}(i)|$, $i \in \overline{1,s}$. Норма $||\cdot||^{(s)}$ порождает топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(s)}$ множества $\mathbb{R}^s$: $\tau_{\mathbb{R}}^{(s)}$ — обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^s$.

Если $s \in \mathbb{N}$, $\zeta \in]0, \infty[$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$, то

$$O_\zeta^{(s)}[M] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^s |\ \exists\, m \in M : ||x - m||^{(s)} < \zeta\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(s)} \tag{2.1}$$

есть открытая ζ-окрестность множества M. Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание множества A в ТП (X, τ), а $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология множества A, индуцированная [21, с. 111] из ТП (X, τ). Если же (X, τ) — ТП и $x \in X$, то, полагаем, $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau |\ x \in G\}$ и $N_\tau(x) \triangleq \{Y \in \mathcal{P}(X) |\ \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset Y\}$, получая фильтр [22, гл. I] окрестностей x в ТП (X, τ). Через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в ТП (X, τ) п/м X. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, то через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2)-непрерывных отображений, действующих из X в Y. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем ниже обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$ и полагаем, что $\mathbb{C}(X, \tau) \triangleq C(X, \tau, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ для всякого ТП (X, τ).

Направленностью [23, гл. 2] в множестве H называем всякий триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество [23, гл. 2], а f — отображение из D в H. Если $(D, \preceq, f)$ — направленность в множестве H, оснащенном топологией τ, и $h \in H$, то [23] $\big((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} h\big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall S \in N_\tau(h)\ \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ \ (d \preceq \delta) \Rightarrow (f(\delta) \in S)\big)$.

3. Конечно-аддитивные (0,1)-меры

В настоящем разделе приводится сводка некоторых нужных в дальнейшем понятий из конечно-аддитивной (к.-а.) теории меры, которые затем будут использоваться в двух вариантах, соответствующих конструкциям расширений двух участников антагонистической игры с ограничениями моментного характера (мы ограничиваемся в дальнейшем рассмотрением максимина функции платы).

Фиксируем непустое множество E и полуалгебру [19, гл. I] $\mathcal{L}$ п/м E до тех пор, пока не будет оговорено противное. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство, порожденное конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ (элементы $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ являются, в частности, в/з функциями на $\mathcal{L}$), получая пространство (всех) в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Пусть $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] | \mu(E) = 1\}$ (множество всех к.-а. вероятностей на $\mathcal{L}$) и $\mathbb{T}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L}) |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1)\}$; элементами $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ являются, в частности, с.-а. меры Дирака, отождествляемые фактически с точками из E. В этой связи напомним общее определение: если $x \in E$, то через $\delta_x[E]$ обозначаем в/з функцию на $\mathcal{P}(E)$, для которой при $A \in \mathcal{P}(E)$ полагается $\delta_x[E](A) \triangleq 0$ при $x \notin A$ и $\delta_x[E](A) \triangleq 1$, если $x \in A$; сужение $(\delta_x[E] | \mathcal{L}) \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ функции $\delta_x[E]$ на семейство $\mathcal{L}$ и будет использоваться в качестве меры Дирака.

Через $B_0(E, \mathcal{L})$ обозначим множество всех ступенчатых, в смысле $(E, \mathcal{L})$, в/з функций на множестве E ([15, гл.3], [19, гл.2]), а через $B(E, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $||\cdot||_E$ (см. [24, с. 261]) пространства $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных в/з функций на E; функции из $B(E, \mathcal{L})$ иногда называют ярусными (в смысле $(E, \mathcal{L})$). В случае, когда $\mathcal{L}$ есть σ-алгебра п/м E, $B(E, \mathcal{L})$ совпадает с множеством всех ограниченных $\mathcal{L}$-измеримых в/з функций. В общем случае измеримого пространства (ИП) $(E, \mathcal{L})$ имеем, что $B(E, \mathcal{L})$ как подпространство $(\mathbb{B}(E), ||\cdot||_E)$, является банаховым пространством, причем пространство $B^*(E, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(E, \mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме, определяемой как полная вариация, в этой связи см. [19, §3.6]. Конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E,\mathcal{L})$ определяется простейшей операцией интегрирования [19, § 3.3], используемой ниже. Итак, $(B(E,\mathcal{L}),\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть двойственность, что позволяет оснащать $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ стандартной *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ (см. [24, гл.5]). В связи с конкретными вариантами ТП

$$\big(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})\big) \tag{3.1}$$

отметим построения в [15, с. 70]. Пространство (3.1) является локально выпуклым σ-компактом, а условия компактности в ТП (3.1) определяются теоремой Алаоглу [24, гл.5]; соответствующая конкретная версия дана в [16, (3.4.19)]. С учетом этого имеем, что $\mathbb{T}(\mathcal{L}) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$. Поэтому топология $\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbb{T}(\mathcal{L})}$ реализует непустой компакт (см. [15, §3.5])

$$\big(\mathbb{T}(\mathcal{L}),\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L})\big), \tag{3.2}$$

играющий в дальнейшем важную роль. Пусть $\Delta[\mathcal{L}]$ есть отображение $x \longmapsto (\delta_x[E]|\mathcal{L}) : E \to \mathbb{T}(\mathcal{L})$; $\Delta[\mathcal{L}]^1(E) = \{(\delta_x[E]|\mathcal{L}) : x \in E\}$. Из [15, (3.5.7)] следует, что $\mathbb{T}(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(\Delta[\mathcal{L}]^1(E), \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{(\delta_x[E]|\mathcal{L}) : x \in E\},\tau_*(\mathcal{L}))$. Согласно (3.2) имеем [17, (2.3.13)] из последней цепочки равенств

$$\mathrm{cl}\big(\Delta[\mathcal{L}]^1(E),\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L})\big) = \mathrm{cl}\big(\Delta[\mathcal{L}]^1(E),\tau_*(\mathcal{L})\big) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}) = \mathbb{T}(\mathcal{L}). \tag{3.3}$$

4. Игровая задача с приближенным соблюдением ограничений

В дальнейшем фиксируем два измеримых пространства с полуалгебрами множеств: $(E_1,\mathcal{L}_1)$, $(E_2,\mathcal{L}_2)$, $E_1 \neq \emptyset$, $E_2 \neq \emptyset$. Итак, $\mathcal{L}_1$ есть полуалгебра п/м E_1, а $\mathcal{L}_2$ — полуалгебра п/м E_2. Кроме того фиксируем $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$ и четыре кортежа ярусных функций

$$(\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}} : \overline{1,k} \to B(E_1,\mathcal{L}_1), \tag{4.1}$$

$$(\beta_j)_{j\in\overline{1,l}} : \overline{1,l} \to B(E_2,\mathcal{L}_2), \tag{4.2}$$

$$(\gamma_i)_{i\in\overline{1,p}} : \overline{1,p} \to B(E_1,\mathcal{L}_1),\ (\omega_j)_{j\in\overline{1,q}} : \overline{1,q} \to B(E_2,\mathcal{L}_2).$$

Фиксируем также функцию $f_0 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, непрерывную по совокупности переменных: $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}} \otimes \tau^{(l)}_{\mathbb{R}})$, где $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} \otimes \tau^{(l)}_{\mathbb{R}}$ есть произведение топологий $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}$ и $\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}$; см. [21]–[23]. При этом $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}$ порождается метрикой $(x_1,x_2) \longmapsto ||x_1-x_2||^{(k)} : \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k \to [0,\infty[$, а топология $\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}$ порождается метрикой $(y_1,y_2) \longmapsto ||y_1 - y_2||^{(l)} : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \to [0,\infty[$. Тогда $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} \otimes \tau^{(l)}_{\mathbb{R}}$ порождается метрикой $\rho : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \to [0,\infty[$, для которой $\forall x_1 \in \mathbb{R}^k\ \forall y_1 \in \mathbb{R}^l\ \forall x_2 \in \mathbb{R}^k\ \forall y_2 \in \mathbb{R}^l$

$$\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \triangleq \sup(\{||x_1 - x_2||^{(k)}; ||y_1 - y_2||^{(l)}\}). \tag{4.3}$$

Тогда f_0 есть «обычная» непрерывная функция на метрическом пространстве $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \rho)$. Ясно, что при $x \in E_1$ и $x \in E_2$ определено значение $f_0\Big(\big(\alpha_i(x)\big)_{i\in\overline{1,k}}, \big(\beta_j(y)\big)_{j\in\overline{1,l}}\Big) \in \mathbb{R}$. Полагаем, что

$$\Phi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R} \tag{4.4}$$

определяется следующим правилом: $\forall x \in E_1\ \forall y \in E_2$

$$\Phi(x,y) \triangleq f_0\Big(\big(\alpha_i(x)\big)_{i\in\overline{1,k}}, \big(\beta_j(y)\big)_{j\in\overline{1,l}}\Big). \tag{4.5}$$

Мы рассматриваем игровую задачу, в которой один из участников (игрок I) стремится к минимизации значений Φ путем рационального выбора $x \in E_1$, а второй участник (игрок II) стремится к максимизации этих значений посредствам $y \in E_2$. Имеются, однако, дополнительные ограничения: заданы компакты $P \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} - \text{comp})[\mathbb{R}^p]$, $Q \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(q)} - \text{comp})[\mathbb{R}^q]$. В их терминах задается система ограничений на выбор $x \in E_1$ и $y \in E_2$ в виде условий

$$\Big(\big(\gamma_i(x)\big)_{i\in\overline{1,p}} \in P\Big)\&\Big(\big(\omega_j(y)\big)_{j\in\overline{1,q}} \in Q\Big). \tag{4.6}$$

Тогда невозмущенная игровая задача связана с множествами $E_\partial^{(1)} \triangleq \{x\in E_1|(\gamma_i(x))_{i\in\overline{1,p}}\in P\}$, $E_\partial^{(2)} \triangleq \{y \in E_2|(\omega_j(y))_{j\in\overline{1,q}} \in Q\}$; рассмотрим задачу

$$\Phi(x,y) \to \sup_{y\in E_\partial^{(2)}}\ \inf_{x\in E_\partial^{(1)}} \tag{4.7}$$

(здесь предполагается, что $E_\partial^{(1)} \neq \emptyset$ и $E_\partial^{(2)} \neq \emptyset$).

Кроме того, будем рассматривать возмущенные аналоги задачи (4.7). Полагаем, что

$$\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon] \triangleq \{x \in E_1|(\gamma_i(x))_{i\in\overline{1,p}} \in O_\varepsilon^{(p)}[P]\}\ \forall\varepsilon \in]0,\infty[; \tag{4.8}$$

$$\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta] \triangleq \{y \in E_2|(\omega_j(y))_{j\in\overline{1,q}} \in O_\delta^{(q)}[Q]\}\ \forall\delta \in]0,\infty[. \tag{4.9}$$

Тогда возмущенные аналоги задачи (4.7) имеют следующий вид

$$\Phi(x,y) \to \sup_{y\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]}\ \inf_{x\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]}, \tag{4.10}$$

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Значения задач (4.10) могут значительно отличаться от аналогичного значения задачи (4.7) при сколь угодно малых ε и δ . Рассмотрим соответствующий пример.

П р и м е р. Пусть $E_1 = E_2 = [0,1[$; условимся сейчас обозначать $[0,1[$ через I, то есть $I \triangleq [0,1[$. Полагаем заданными следующие две равномерно непрерывные в/з функции на I: $\gamma : I \to \mathbb{R}$, $\omega : I \to \mathbb{R}$; при этом $\gamma(t) \triangleq t$ и $\omega(t) \triangleq 2t$ для любых $t \in I$. Полагаем, что выбор точки $t \in I$ первым участником (игрок I) стеснен ограничением

$$(\gamma(t) = 0) \vee (\gamma(t) = 1); \tag{4.11}$$

единственным допустимым элементом здесь является $t_\partial^{(1)} = 0$ (точка 1 не является элементом I). Выбор точки $t \in I$ игроком II стеснен ограничением

$$(\omega(t) = 0) \vee (\omega(t) = 2). \tag{4.12}$$

Снова имеем единственность допустимого элемента: $t_\partial^{(2)} = 0$. Результат выбора моментов t_1 игроком I и t_2 игроком II характеризуются величиной $|\gamma(t_1)-\omega(t_2)|$, которую игрок I хотел бы минимизировать, а игрок II — максимизировать. Рассматриваем задачу на максимин: $|\gamma(t_1) - \omega(t_2)| \to \sup_{t_2\in E_\partial^{(2)}}\ \inf_{t_1\in E_\partial^{(1)}}$, где $E_\partial^{(1)} = E_\partial^{(2)} = \{0\}$. Искомый максимин достигается и равен 0. Рассмотрим случай, когда ограничения (4.11), (4.12) ослаблены: при $\varepsilon \in]0,\infty[$ полагаем, что выбор момента $t_1 \in I$ игроком I допускается с соблюдением условия

$$(\gamma(t_1) < \varepsilon) \vee (|\gamma(t) - 1| < \varepsilon); \tag{4.13}$$

полагаем также, что выбор $t_2 \in I$ игроком II допускается с соблюдением условия

$$(\omega(t_2) < \delta) \vee (|\omega(t_2) - 2| < \delta); \tag{4.14}$$

здесь $\delta > 0$. Критерий игровой задачи сохраняем прежним. Тогда максимин критерия в условиях ограничений, определяемых в (4.13) и (4.14), совпадает с 1 (хотя и не достигается). Такая возможность реализуется посредством выбора моментов t_1 и t_2 возле точки $t = 1$. При этом игрок II делает ход первым и реализует $t_2 \approx 1$, чем достигается $\omega(t_2) \approx 2$. Игрок I парирует действие t_2, подбирая $t_1 \approx 1$, что позволяет ему реализовать $\gamma(t_1) \approx 1$. Мы получили скачок максимина при сколь угодно малом ослаблении ограничений. С практической точки зрения значение 1 представляется более естественной оценкой значения игровой задачи.

Для включения примера в общую схему следует осуществить очевидную детализацию общих определений: $E_1 = E_2 = I, k = l = p = q = 1$, функции α_1 и γ_1 совпадают с γ, функции β_1 и ω_1 совпадают с ω, функция f_0 определена на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и имеет следующие значения: $f_0(x, y) = |x - y| \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R}$; $P = \{0; 1\}$ и $Q = \{0; 2\}$ (множества P и Q — двухэлементны).

5 Расширение игровой задачи

Мы располагаем, наряду с множествами E_1 и E_2 обычных решений, непустыми компактами $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \in (\tau_*(\mathcal{L}_1) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L}_1)]$, $\mathbb{T}(\mathcal{L}_2) \in (\tau_*(\mathcal{L}_2) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L}_2)]$; см. [16, с. 303]. Полагаем $(\delta_x^{(1)} \triangleq \delta_x[E_1] \; \forall x \in E_1) \& (\delta_y^{(2)} \triangleq \delta_y[E_2] \; \forall y \in E_2)$. Имеем операторы $x \longmapsto (\delta_x^{(1)}|\mathcal{L}_1) : E_1 \to \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$, $y \longmapsto (\delta_y^{(2)}|\mathcal{L}_2) : E_2 \to \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$, которые обозначаем через $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно. Итак, $\mathfrak{X} = \Delta[\mathcal{L}_1]$ и $\mathfrak{Y} = \Delta[\mathcal{L}_2]$. Тогда, в частности, $\mathfrak{X}^1(E_1) = \{(\delta_x^{(1)}|\mathcal{L}_1) : x \in E_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1))$, $\mathfrak{Y}^1(E_2) = \{(\delta_y^{(2)}|\mathcal{L}_2) : y \in E_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2))$. Из [16, (7.6.16)] вытекают следующие два равенства:

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau_*(\mathcal{L}_1)), \tag{5.1}$$

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}_2) = \mathrm{cl}(\mathfrak{Y}^1(E_2), \tau_*(\mathcal{L}_2)). \tag{5.2}$$

В связи с (5.1), (5.2) используем соответствующие относительные топологии (см. (3.2)):

$$\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1) = \tau_*(\mathcal{L}_1)|_{\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)}, \; \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2) = \tau_*(\mathcal{L}_2)|_{\mathbb{T}(\mathcal{L}_2)}; \tag{5.3}$$

в виде $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))$ и $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2))$ мы получаем пару непустых компактов (компактных хаусдорфовых ТП). Мы рассматриваем (0,1)-меры из множеств $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$ как обобщенные решения, выбираемые игроками I и II соответственно, то есть как обобщенные стратегии этих игроков. Кроме того, введем в рассмотрение обобщенный аналог функции Φ, который будет играть роль функции стоимости в (обобщенной) игровой задаче. Итак, полагаем, что отображение $\tilde{\Phi} : \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \times \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) \to \mathbb{R}$ определяется следующим правилом: $\forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \; \forall \nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$

$$\tilde{\Phi}(\mu, \nu) \triangleq f_0\Big(\big(\int_{E_1} \alpha_i d\mu\big)_{i \in \overline{1,k}}, \big(\int_{E_2} \beta_j d\nu\big)_{j \in \overline{1,l}}\Big). \tag{5.4}$$

Замена $\Phi \to \tilde{\Phi}$ отвечает (см. (4.4), (4.5)) в силу (5.1)–(5.3) идее расширения задачи (4.7). В свою очередь, условия (4.6) также допускают расширение, то есть преобразование к виду

$$\Big(\big(\int_{E_1} \gamma_i d\mu\big)_{i \in \overline{1,p}} \in P\Big) \& \Big(\big(\int_{E_2} \omega_j d\nu\big)_{j \in \overline{1,q}} \in Q\Big); \tag{5.5}$$

(5.5) суть условия на выбор $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$, $\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$. Обобщенная задача имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\mu, \nu) \to \max_{\nu} \; \min_{\mu}, \tag{5.6}$$

где $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$ и $\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$ выбираются с соблюдением условий (5.5).

Переход от (4.7) к (5.6) рассматриваем как расширение исходной задачи (будет показано, что максимумы и минимумы в (5.6) достигаются). Согласно (5.1)–(5.3)

$$\mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau_*(\mathcal{L}_1)) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) = \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) = \mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tag{5.7}$$

$$\mathrm{cl}(\mathfrak{Y}^1(E_2), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2)) = \mathrm{cl}(\mathfrak{Y}^1(E_2), \tau_*(\mathcal{L}_2)) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) = \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) = \mathbb{T}(\mathcal{L}_2).$$

Имеем (см. (4.1), (4.2)), что $(\alpha_i \in \mathbb{B}(E_1)\ \forall i \in \overline{1,k})\&(\beta_j \in \mathbb{B}(E_2)\ \forall j \in \overline{1,l})$. Множества $\{(\alpha_i(x))_{i\in\overline{1,k}} : x \in E_1\}, \{(\beta_j(y))_{j\in\overline{1,l}} : y \in E_2\}$ непусты и ограничены в $(\mathbb{R}^k, ||\cdot||^{(k)})$ и в $(\mathbb{R}^l, ||\cdot||^{(l)})$ соответственно. Тогда

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\{(\alpha_i(x))_{i\in\overline{1,k}} : x \in E_1\}, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k], \tag{5.8}$$

$$\mathbf{B} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\{(\beta_j(y))_{j\in\overline{1,l}} : y \in E_2\}, \tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(l)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l]. \tag{5.9}$$

Через $\mathfrak{a}$ условимся обозначать далее отображение

$$\mu \longmapsto (\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i\in\overline{1,k}} : \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \to \mathbb{R}^k. \tag{5.10}$$

Из (5.10) вытекает [17, (2.5.30)] свойство непрерывности

$$\mathfrak{a} \in C(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1), \mathbb{R}^k, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}). \tag{5.11}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathfrak{a}^1(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)) = \{(\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i\in\overline{1,k}} : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)\} = \mathbf{A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем очевидное равенство (см. (5.10), [19, § 4.6])

$$\mathfrak{a}^1(\mathfrak{X}^1(E_1)) = \{(\alpha_i(x))_{i\in\overline{1,k}} : x \in E_1\}. \tag{5.12}$$

Из (5.8) следует, что множество $\mathbf{A}$ замкнуто в $(\mathbb{R}^k, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$ и, кроме того, согласно (5.7),

$$\mathfrak{X}^1(E_1) \subset \mathbb{T}(\mathcal{L}_1). \tag{5.13}$$

Из (5.8), (5.12) и (5.13) следует, что $\mathbf{A} = \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^1(\mathfrak{X}^1(E_1)), \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^1(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)), \tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$. В силу компактности $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))$ и отделимости $(\mathbb{R}^k, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$ отображение $\mathfrak{a}$ (5.11) замкнуто, то есть оно сохраняет замкнутость множеств в сторону образа, см. [17, (2.8.1)]. Тогда [17, (2.8.4)]

$$\mathfrak{a}^1\Big(\mathrm{cl}\big(A, \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big)\Big) = \mathrm{cl}\big(\mathfrak{a}^1(A), \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}\big)\ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)). \tag{5.14}$$

С учетом (5.13) и (5.14) получаем равенство $\mathfrak{a}^1(\mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))) = \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^1(\mathfrak{X}^1(E_1)), \tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$. Из (5.7) и (5.12) вытекает теперь, что

$$\mathfrak{a}^1(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{cl}\Big(\mathfrak{a}^1\big(\mathfrak{X}^1(E_1)\big), \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}\Big) = \mathrm{cl}\Big(\big\{\big(\alpha_i(x)\big)_{i\in\overline{1,k}} : x \in E_1\big\}, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}\Big) = \mathbf{A}, \tag{5.15}$$

где $\mathfrak{a}^1(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)) = \{(\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i\in\overline{1,k}} : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)\}$. С учетом (5.15) имеем требуемое утверждение. □

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Справедливо равенство* $\{(\int_{E_2} \beta_j d\nu)_{j\in\overline{1,l}} : \nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)\} = \mathbf{B}$. Доказательство аналогично обоснованию предложения 5.1.

Введем в рассмотрение следующее отображение (сужение f_0) $\hat{\Phi} : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbb{R}$, полагая, что $\forall x \in \mathbf{A}\ \forall y \in \mathbf{B}$

$$\hat{\Phi}(x, y) \stackrel{\triangle}{=} f_0(x, y). \tag{5.16}$$

Тогда $\hat{\Phi} = (f_0 | \mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Если $y \in \mathbf{B}$, то

$$\hat{\Phi}(\cdot, y) \stackrel{\triangle}{=} (\hat{\Phi}(x, y))_{x \in \mathbf{A}} = (f_0(x, y))_{x \in \mathbf{A}} \in \mathbb{C}(\mathbf{A}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}}), \tag{5.17}$$

где топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}}$ множества $\mathbf{A}$ порождена метрикой

$$(x_1, x_2) \longmapsto ||x_1 - x_2||^{(k)} : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to [0, \infty[. \tag{5.18}$$

Поскольку (см. (5.8)) ТП

$$(\mathbf{A}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}}) \tag{5.19}$$

компакт, то при $y \in \mathbf{B}$ функция $\hat{\Phi}(\cdot, y)$ равномерно непрерывна в смысле (5.18). Кроме того, с учетом компактности ТП (5.19) имеем из (5.17) по теореме Вейерштрасса, что при $y \in \mathbf{B}$ достигается минимум $\hat{\Phi}(\cdot, y)$. При этом в силу транзитивности операции перехода к подпространству ТП (см. [21, с. 111-112]) $(\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}] = \{K \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k] | K \subset \mathbf{A}\}$. В силу компактности ТП (5.19) определена система экстремумов

$$\min_{x \in K} \hat{\Phi}(x, y) \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbf{B}\ \forall K \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}]. \tag{5.20}$$

Из непрерывности f_0 следует свойство: функция $\hat{\Phi}$ непрерывна на $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (см. [17, (2.5.30)]) с топологией $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$; последняя порождена сужением метрики ρ (4.3) на $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; см. [17, (2.7.32)]. С учетом (5.8) и (5.9) имеем, что $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l]$, а тогда $\hat{\Phi}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$: $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[\ \forall z_1 \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}\ \forall z_2 \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$(\rho(z_1, z_2) < \delta) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(z_1) - \hat{\Phi}(z_2)| < \varepsilon). \tag{5.21}$$

В свою очередь из (5.20) и (5.21) легко следует, что при $K \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}]$ функция

$$y \longmapsto \min_{x \in K} \hat{\Phi}(x, y) : \mathbf{B} \to \mathbb{R} \tag{5.22}$$

равномерно непрерывна; $\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}}$ есть компактная топология $\mathbf{B}$ (см. (5.9));

$$(\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}} - \mathrm{comp})[\mathbf{B}] = \{K \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l] | K \subset \mathbf{B}\}. \tag{5.23}$$

С учетом непрерывности функций вида (5.22) получаем, что при $\mathbb{K} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}]$ и $\mathbb{L} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}} - \mathrm{comp})[\mathbf{B}]$ функция $y \longmapsto \min\limits_{x \in \mathbb{K}} \hat{\Phi}(x, y) : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ достигает максимума на $\mathbb{L}$, то есть определено значение $\max\limits_{y \in \mathbb{L}} \min\limits_{x \in \mathbb{K}} \hat{\Phi}(x, y) \in \mathbb{R}$. Введем множества допустимых обобщенных решений игроков I и II :

$$\mathbf{T}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) | (\int_{E_1} \gamma_i d\mu)_{i \in \overline{1,p}} \in P\}, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{T}_2 \stackrel{\triangle}{=} \{\nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) | (\int_{E_2} \omega_j d\nu)_{j \in \overline{1,q}} \in Q\}. \tag{5.25}$$

В качестве расширения исходной задачи (4.7) рассматриваем задачу

$$\tilde{\Phi}(\mu, \nu) \to \max_{\nu \in \mathbf{T}_2} \min_{\mu \in \mathbf{T}_1}. \tag{5.26}$$

Ниже будет показано, что (при условиях, обеспечивающих совместность) экстремумы в (5.26) действительно достигаются. При этом задача (5.26) «замыкает на себя» комплекс задач (4.10), определяя асимптотику значений этих задач.

6 Асимптотическая реализация обобщенных элементов

Мы начинаем сравнение асимптотических вариантов решения, соответствующих комплексу задач (4.10), и обобщенных решений, отвечающих задаче (5.26). В этой связи сначала имеет смысл установить соотношения, связывающие асимптотики допустимых множеств (4.8), (4.9) и допустимые множества обобщенной задачи, определяемые в (5.24), (5.25). Будет использоваться частный случай конструкции раздела 11 монографии [18]. Пусть $\mathbf{x}$ есть def отображение

$$\mu \longmapsto \left(\int_{E_1} \gamma_i d\mu\right)_{i\in\overline{1,p}} : \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) \to \mathbb{R}^p; \tag{6.1}$$

$\mathbf{x}$ непрерывно на компакте $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))$: $\mathbf{x} \in C(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1), \mathbb{R}^p, \tau^{(p)}_{\mathbb{R}})$.

Л е м м а 6.1. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то* $\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]) = \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mu_* \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon])$, то $\mu_* = (\delta^{(1)}_{x_*}|\mathcal{L}_1) \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$, где $x_* \in \mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]$. Последнее означает, что $x_* \in E_1$ и $(\gamma_i(x_*))_{i\in\overline{1,p}} \in O^{(p)}_\varepsilon[P]$. При этом $\mathbf{x}(\mu_*) = (\int_{E_1} \gamma_i d\mu_*)_{i\in\overline{1,p}} = (\gamma_i(x_*))_{i\in\overline{1,p}}$ [19, с. 236] и тогда $\mathbf{x}(\mu_*) \in O^{(p)}_\varepsilon[P]$, то есть $\mu_* \in \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P])$ и $\mu_* \in \mathfrak{X}^1(E_1)$, а значит $\mu_* \in \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$. Вложение $\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]) \subset \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$ установлено.

Пусть $\mu^* \in \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$. Тогда $\mu^* \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$ и при этом $(\int_{E_1} \gamma_i d\mu^*)_{i\in\overline{1,p}} \in O^{(p)}_\varepsilon[P]$. С другой стороны, $\mu^* = (\delta^{(1)}_{x^*}|\mathcal{L}_1)$, где $x^* \in E_1$. Тогда (см. [19, с. 236] $(\gamma_i(x^*))_{i\in\overline{1,p}} = (\int_{E_1} \gamma_i d\mu^*)_{i\in\overline{1,p}}$ и $(\gamma_i(x^*))_{i\in\overline{1,p}} \in O^{(p)}_\varepsilon[P]$, то есть $x^* \in \mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]$, а тогда $\mathfrak{X}(x^*) \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon])$, где $\mathfrak{X}(x^*) = \mu^*$. Поэтому $\mu^* \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon])$. Итак, $\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1) \subset \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon])$. □

П р е д л о ж е н и е 6.1. $\mathbf{T}_1 = \bigcap\limits_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что, согласно (5.24), $\mathbf{T}_1 = \mathbf{x}^{-1}(P)$. С другой стороны, при $\varepsilon \in]0,\infty[$ $\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]) = \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$, а тогда имеем вложения (см. (3.3))

$$\mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \subset \mathrm{cl}\big(\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \cap \mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) =$$
$$= \mathrm{cl}\big(\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \cap \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big).$$

Итак,

$$\mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \subset \mathrm{cl}\big(\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\varepsilon[P]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{6.2}$$

Пусть выбрано произвольно

$$\eta \in \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big). \tag{6.3}$$

Тогда $\eta \in \mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)) \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$. В силу (6.2)

$$\eta \in \mathrm{cl}\big(\mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\alpha), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big) \ \forall \alpha \in]0,\infty[. \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует, в частности, что $\eta \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$. С учетом (6.3) имеем по определению $\mathbf{x}$ (см. [17, (4.6.2), (4.6.8)]) с учетом неравенства треугольника и определения $\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L})$, что

$$\left(\int_{E_1} \gamma_i d\eta\right)_{i\in\overline{1,p}} \in O^{(p)}_\varepsilon[P] \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{6.5}$$

В свою очередь, в силу замкнутости P имеем из (6.5), что

$$\Big(\int_{E_1} \gamma_i d\eta\Big)_{i\in\overline{1,p}} \in P. \tag{6.6}$$

Тогда из (6.6) получаем $\eta \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1) : (\int_{E_1} \gamma_i d\eta)_{\in\overline{1,p}} \in P$. Следовательно, из (5.24) вытекает включение $\eta \in \mathbf{T}_1$. Поскольку выбор η был произвольным, установлено вложение

$$\bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_1)\big) \subset \mathbf{T}_1. \tag{6.7}$$

Пусть напротив $\xi \in \mathbf{T}_1$. Тогда $\xi \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$ и при этом

$$m_* \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{x}(\xi) = \Big(\int_{E_1} \gamma_i d\xi\Big)_{i\in\overline{1,p}} \in P. \tag{6.8}$$

Поскольку $\mathfrak{X}^1(E_1)$ всюду плотно в $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$ в *-слабой топологии, $\xi \in \mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(E_1), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big)$. В обозначениях [17, (4.6.2), (4.6.8)] имеем свойство

$$B \cap \mathfrak{X}^1(E_1) \neq \emptyset \ \forall B \in \mathfrak{N}_*^0(\xi|\mathcal{L}_1). \tag{6.9}$$

В частности, при $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} \{\gamma_i : i \in \overline{1,p}\}$

$$N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K}, \varepsilon) = \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1) \mid |\int_{E_1} \gamma_i d\xi - \int_{E_1} \gamma_i d\mu| < \varepsilon \ \forall i \in \overline{1,p}\} \in \mathfrak{N}_*^0(\xi|\mathcal{L}_1) \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{6.10}$$

Пусть $\kappa \in]0,\infty[$. Рассмотрим следующее множество $\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\kappa]) = \mathbf{x}^{-1}(O_\kappa^{(p)}[P]) \cap$ $\cap \mathfrak{X}^1(E_1) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1))$. Согласно [17, (4.6.8)] справедливо равенство

$$\mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\kappa]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big) = \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1) | \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\kappa]) \cap H \neq \emptyset \ \forall H \in \mathfrak{N}_*^0(\mu|\mathcal{L}_1)\}. \tag{6.11}$$

Покажем, что $\xi \in \mathrm{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\kappa]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big)$. Выберем для этого произвольное множество

$$\Xi \in \mathfrak{N}_*^0(\xi|\mathcal{L}_1), \tag{6.12}$$

после чего подберем [17, (4.6.2)] $\mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(B(E_1, \mathcal{L}_1))$ и $\theta \in]0,\infty[$ так, что

$$\Xi = N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbf{K}, \theta) = \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1) \mid |\int_{E_1} f d\xi - \int_{E_1} f d\nu| < \theta \ \forall f \in \mathbf{K}\}. \tag{6.13}$$

Тогда $\mathbb{K} \cup \mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(B(E_1, \mathcal{L}_1))$ и $\zeta \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\kappa; \theta\}) \in]0,\infty[$, а потому [17, (4.6.1), (4.6.2)]

$$N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K} \cup \mathbf{K}, \zeta) = \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1) \mid |\int_{E_1} f d\xi - \int_{E_1} f d\nu| < \zeta \ \forall f \in \mathbb{K} \cup \mathbf{K}\} \in \mathfrak{N}_*^0(\xi|\mathcal{L}_1). \tag{6.14}$$

При этом (см. (6.10), (6.13)) справедливо, в частности, что

$$N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K} \cup \mathbf{K}, \zeta) \subset N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K}, \kappa) \cap \Xi. \tag{6.15}$$

С другой стороны, из (6.9) и (6.14) получаем, что $N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K} \cup \mathbf{K}, \zeta) \cap \mathfrak{X}^1(E_1) \neq \emptyset$. С учетом этого выберем произвольную к.-а. меру

$$\mu^* \in N_{\mathcal{L}_1}^*(\xi, \mathbb{K} \cup \mathbf{K}, \zeta) \cap \mathfrak{X}^1(E_1). \tag{6.16}$$

Из (6.15) и (6.16) вытекает очевидное включение $\mu^* \in N^*_{\mathcal{L}_1}(\xi, \mathbb{K}, \kappa) \cap \mathfrak{X}^1(E_1)$. Тогда (см. (6.10)) имеем, что $\mu^* \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1)$ и при этом

$$|\int_{E_1} \gamma_i d\xi - \int_{E_1} \gamma_i d\mu^*| < \kappa \ \forall i \in \overline{1,p}. \tag{6.17}$$

Из (6.8) и (6.17) вытекает, в свою очередь, что справедливо неравенство

$$||m_* - (\int_{E_1} \gamma_i d\mu^*)_{i \in \overline{1,p}}||^{(p)} < \kappa. \tag{6.18}$$

Тогда (см. (2.1), (6.8), (6.18)) имеем очевидное включение

$$(\int_{E_1} \gamma_i d\mu^*)_{i \in \overline{1,p}} \in O^{(p)}_\kappa[P]. \tag{6.19}$$

Напомним, что $\mu^* \in \mathfrak{X}^1(E_1)$ и, в частности, что $\mu^* \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$; при этом $\mu^* = (\delta^{(1)}_{x^*}|\mathcal{L}_1)$, где $x^* \in E_1$. Иными словами,

$$\mu^* = \mathfrak{X}(x^*). \tag{6.20}$$

Заметим, что из (6.1), (6.19) вытекает включение

$$\mathbf{x}(\mu^*) \in O^{(p)}_\kappa[P]. \tag{6.21}$$

В свою очередь, из (6.21) получаем следующее свойство

$$\mu^* \in \mathbf{x}^{-1}(O^{(p)}_\kappa[P]). \tag{6.22}$$

Из (6.20), (6.22) и леммы 6.1 вытекает включение

$$\mu^* \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\kappa]). \tag{6.23}$$

Отметим, что (см. (6.15), (6.16)) $\mu^* \in \Xi$. С учетом (6.23) получаем включение $\mu^* \in \Xi \cap \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\kappa])$. Как следствие, $\Xi \cap \mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\kappa]) \neq \emptyset$. Поскольку выбор (6.12) был произвольным, установлено:

$$\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\kappa]) \cap H \neq \emptyset \ \forall H \in \mathfrak{N}^0_*(\xi|\mathcal{L}_1). \tag{6.24}$$

Следовательно, $\mu^* \in \mathbb{A}(\mathcal{L}_1)$ таково, что выполнено (6.24), а потому, согласно (6.11), имеем включение $\xi \in \operatorname{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\kappa]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big)$. Поскольку выбор κ был произвольным, установлена система включений $\xi \in \operatorname{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big) \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Иными словами, $\xi \in \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \operatorname{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big)$. Поскольку выбор ξ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{T}_1 \subset \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \operatorname{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L}_1)\big). \tag{6.25}$$

Из (6.25) вытекает (см. (5.3)) следующее вложение: $\mathbf{T}_1 \subset \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \operatorname{cl}\big(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)\big)$. С учетом (6.7) получаем теперь требуемое равенство. □

Введем в рассмотрение следующее отображение $\mathbf{y}$ посредством правила

$$\nu \longmapsto (\int_{E_2} \omega_j d\nu)_{j \in \overline{1,q}} : \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) \to \mathbb{R}^q;$$

данное отображение непрерывно на компакте $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2))$, то есть

$$\mathbf{y} \in C(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2), \mathbb{R}^q, \tau^{(q)}_{\mathbb{R}}).$$

Л е м м а 6.2. *Если* $\delta \in]0, \infty[$, *то* $\mathfrak{Y}^1(\mathbb{E}^{(2)}_{\partial}[\delta]) = \mathbf{y}^{-1}(O^{(q)}_{\delta}[Q]) \cap \mathfrak{Y}^1(E_2)$.

Доказательство аналогично доказательству Леммы 6.1.

П р е д л о ж е н и е 6.2. $\mathbf{T}_2 = \bigcap\limits_{\delta \in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathfrak{Y}^1(\mathbb{E}^{(2)}_{\partial}[\delta]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_2))$.

Доказательство повторяет обоснование предложения 6.1.

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Эквивалентны следующие два утверждения:*
1) $\mathbf{T}_1 \neq \emptyset$; 2) $\mathbb{E}^{(1)}_{\partial}[\varepsilon] \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathfrak{X}^1(\emptyset) = \emptyset$ и $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(\emptyset), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)) = \emptyset$, то из предложения 6.1 следует импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполняется 2). Тогда $\mathbb{E}^{(1)}_{\partial}[\varepsilon] \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. По свойствам операторов замыкания и взятия образа имеем $\mathcal{M} \triangleq \{\mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_{\partial}[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)) : \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)))$. Из (2.1), (4.8) следует, что $\forall M_1 \in \mathcal{M}\ \forall M_2 \in \mathcal{M}\ \exists M_3 \in \mathcal{M} : M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Следовательно, $\mathcal{M}$ есть база фильтра в $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$. Тогда $\mathcal{M}$ есть центрированное семейство замкнутых в $\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)$ подмножеств $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$. Так как $(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1))$ — непустой компакт, то $\bigcap\limits_{\varepsilon \in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathfrak{X}^1(\mathbb{E}^{(1)}_{\partial}[\varepsilon]), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_1)) = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}} M \neq \emptyset$; см. [21, с. 196]. Из предложения 6.1 получаем свойство: 2) $\Rightarrow$ 1). □

П р е д л о ж е н и е 6.4. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) $\mathbf{T}_2 \neq \emptyset$; 2) $\mathbb{E}^{(2)}_{\partial}[\delta] \neq \emptyset\ \forall \delta \in]0, \infty[$.

Доказательство аналогично предыдущему.

7 Вспомогательные множества притяжения

Далее нас будут интересовать следующие множества:

$$(\mathbb{G}^{(1)}_{\varepsilon} \triangleq \{(\alpha_i(x))_{i \in \overline{1,k}} : x \in \mathbb{E}^{(1)}_{\partial}[\varepsilon]\} \forall \varepsilon \in]0, \infty[) \& (\mathbb{G}^{(2)}_{\delta} \triangleq \{(\beta_j(y))_{j \in \overline{1,l}} : y \in \mathbb{E}^{(2)}_{\partial}[\delta]\} \forall \delta \in]0, \infty[). \quad (7.1)$$

Полагаем, что $\mathfrak{c}_1 \triangleq \max\limits_{i \in \overline{1,k}} ||\alpha_i||_{E_1}, \mathfrak{c}_2 \triangleq \max\limits_{j \in \overline{1,l}} ||\beta_j||_{E_2}$; тогда $\mathfrak{c}_1 \in [0, \infty[, \mathfrak{c}_2 \in [0, \infty[$. Из (7.1) следует теперь, что

$$(||u||^{(k)} \leqslant \mathfrak{c}_1\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall u \in \mathbb{G}^{(1)}_{\varepsilon}) \& (||v||^{(l)} \leqslant \mathfrak{c}_2\ \forall \delta \in]0, \infty[\ \forall v \in \mathbb{G}^{(2)}_{\delta}). \quad (7.2)$$

В этой связи полагаем, что

$$(\mathfrak{K} \triangleq \{u \in \mathbb{R}^k |\ ||u||^{(k)} \leqslant \mathfrak{c}_1\}) \& (\mathfrak{L} \triangleq \{v \in \mathbb{R}^l |\ ||v||^{(l)} \leqslant \mathfrak{c}_2\}), \quad (7.3)$$

получая два замкнутых шара в конечномерных пространствах. Согласно (7.2) и (7.3),

$$(\mathbb{G}^{(1)}_{\varepsilon} \subset \mathfrak{K}\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[) \& (\mathbb{G}^{(2)}_{\delta} \subset \mathfrak{L}\ \forall \delta \in]0, \infty[). \quad (7.4)$$

Поскольку $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ — замкнутые множества, то (см. (7.4))

$$\Big(\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_{\varepsilon}, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \subset \mathfrak{K}\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\Big) \& \Big(\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_{\delta}, \tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \subset \mathfrak{L}\ \forall \delta \in]0, \infty[\Big). \quad (7.5)$$

Введем в рассмотрение отображение $\mathcal{A}$ вида $x \longmapsto (\alpha_i(x))_{i \in \overline{1,k}} : E_1 \to \mathbb{R}^k$; при этом $\mathcal{A} : E_1 \to \mathbb{R}^k$ и справедлива следующая система равенств:

$$\mathcal{A}(x) = (\alpha_i(x))_{i \in \overline{1,k}}\ \forall x \in E_1. \quad (7.6)$$

Тогда, согласно (7.1), (7.6), имеем следующие очевидные равенства:

$$\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)} = \mathcal{A}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]) \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{7.7}$$

По выбору $\mathfrak{c}_1$ имеем из (7.3), (7.6), что $\mathcal{A} : E_1 \to \mathfrak{K}$. Из (7.5), (7.7) получаем, что $\mathrm{cl}\big(\mathcal{A}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}\big) \subset \mathfrak{K} \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Пусть $\mathcal{B}$ есть отображение $y \longmapsto (\beta_j(y))_{j \in \overline{1,l}} : E_2 \to \mathbb{R}^l$; при этом $\mathcal{B} : E_2 \to \mathbb{R}^l$ и

$$\mathcal{B}(y) = (\beta_j(y))_{j \in \overline{1,l}} \ \forall y \in E_2. \tag{7.8}$$

Тогда, согласно (7.1) и (7.8), получаем, что справедливы равенства

$$\mathbb{G}_\delta^{(2)} = \mathcal{B}^1(\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]) \ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{7.9}$$

По выбору $\mathfrak{c}_2$ имеем, что $\mathcal{B} : E_2 \to \mathfrak{L}$. Из (7.5) и (7.9) получаем систему вложений $\mathrm{cl}\big(\mathcal{B}^1(\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}\big) \subset \mathfrak{L} \ \forall \delta \in]0, \infty[$. Напомним, что (см. (5.8), (5.9)) $(\mathbf{A} \subset \mathfrak{K}) \& (\mathbf{B} \subset \mathfrak{L})$. При этом учитывается, что, согласно (5.8),

$$\mathcal{A} : E_1 \to \mathbf{A}, \tag{7.10}$$

откуда в силу замкнутости $\mathbf{A}$ и (7.7) вытекает, что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) = \mathrm{cl}\big(\mathcal{A}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}\big) \subset \mathbf{A} \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{7.11}$$

Аналогичным образом, из (5.9) и (7.8) следует, что

$$\mathcal{B} : E_2 \to \mathbf{B}. \tag{7.12}$$

С учетом замкнутости $\mathbf{B}$ и (7.9) получаем:

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) = \mathrm{cl}\big(\mathcal{B}^1(\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}\big) \subset \mathbf{B} \ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{7.13}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Справедливо равенство* $\mathcal{A} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $\mathcal{A} : E_1 \to \mathbb{R}^k, \mathfrak{a} \circ \mathfrak{X} : E_1 \to \mathbb{R}^k$. Пусть $x_* \in E_1$. Тогда

$$\mathcal{A}(x_*) = (\alpha_i(x_*))_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k. \tag{7.14}$$

Далее, из определения $\mathfrak{X}$ вытекает, что $\mathfrak{X}(x_*) = (\delta_{x_*}^{(1)} | \mathcal{L}_1)$, а потому (см. [19, с. 236])

$$(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{X})(x_*) = \mathfrak{a}(\mathfrak{X}(x_*)) = \Big(\int_{E_1} \alpha_i d(\delta_{x_*}^{(1)} | \mathcal{L}_1)\Big)_{i \in \overline{1,k}} = (\alpha_i(x_*))_{i \in \overline{1,k}}.$$

С учетом (7.14) имеем следующее равенство: $\mathcal{A}(x_*) = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{X})(x_*)$. Поскольку выбор x_* был произвольным, установлено, что $\mathcal{A} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{X}$. □

Через $\mathfrak{b}$ условимся обозначать следующее отображение:

$$\nu \longmapsto \Big(\int_{E_2} \beta_j d\nu\Big)_{j \in \overline{1,l}} : \mathbb{T}(\mathcal{L}_2) \to \mathbb{R}^l. \tag{7.15}$$

Из (7.15) легко следует свойство непрерывности:

$$\mathfrak{b} \in C(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_2), \mathbb{R}^l, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}). \tag{7.16}$$

П р е д л о ж е н и е 7.2. *Справедливо равенство* $\mathcal{B} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{Y}$.

Доказательство аналогично обоснованию предложения 7.1. Из предложения 7.1 вытекает (см. предложение 5.2.1 монографии [16]), с учетом компактности первой топологии в (5.3), свойство

$$\bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_\mathbb{R}^{(k)}) = \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1). \tag{7.17}$$

Из предложения 7.2 следует (подобно (7.17)) равенство

$$\bigcap_{\delta\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_\mathbb{R}^{(l)}) = \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2). \tag{7.18}$$

8 Максимин в задачах с ослабленными ограничениями

Имея в виду предложения 6.3 и 6.4, мы ограничиваемся далее случаем, когда у каждого из игроков существуют допустимые обобщенные элементы: полагаем в дальнейшем, что

$$(\mathbf{T}_1 \neq \emptyset)\&(\mathbf{T}_2 \neq \emptyset). \tag{8.1}$$

Тогда, согласно предложению 6.3, справедливы следующие свойства:

$$(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon] \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[)\&(\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta] \neq \emptyset\ \forall \delta \in]0,\infty[). \tag{8.2}$$

Согласно (7.7), (7.9) и (8.2) имеем также, что

$$(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)} \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[)\&(\mathbb{G}_\delta^{(2)} \neq \emptyset\ \forall \delta \in]0,\infty[). \tag{8.3}$$

Тогда (см. (8.3)) имеем свойства: 1) $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_\mathbb{R}^{(k)}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[$; 2) $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_\mathbb{R}^{(l)}) \neq \emptyset$ $\forall \delta \in]0,\infty[$.

С учетом (8.1) имеем следующие свойства непустоты: $(\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \neq \emptyset)\&(\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \neq \emptyset)$. Иными словами, $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^k)$ и $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^l)$. Поэтому $\forall \zeta \in]0,\infty[$

$$\big(O_\zeta^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)] \in \tau_\mathbb{R}^{(k)}\big)\&\big(O_\zeta^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)] \in \tau_\mathbb{R}^{(l)}\big). \tag{8.4}$$

Более того, из (2.1) и (8.4) вытекает, что при $\zeta_1 \in]0,\infty[$ множество $O_{\zeta_1}^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]$ есть открытая в $\tau_\mathbb{R}^{(k)}$ окрестность множества $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$: первое в (8.4) множество открыто и содержит $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$. Аналогичным образом из (2.1) и (8.4) следует, что при $\zeta_2 \in]0,\infty[$ множество $O_{\zeta_2}^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]$ есть открытая в $\tau_\mathbb{R}^{(l)}$ окрестность $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$: второе в (8.4) множество открыто и содержит $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$.

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если* $\zeta \in]0,\infty[$, *то непременно* $\exists \varepsilon \in]0,\infty[$:

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_\mathbb{R}^{(k)}) \subset O_\zeta^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]. \tag{8.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать предложение 3.6.1 монографии [17]. В обозначениях [17, (3.2.8)], используемых в данном доказательстве, имеем (см. (7.11)) равенство

$$(\tau_\mathbb{R}^{(k)}-\mathrm{LIM})[\mathcal{E}_1|\mathcal{A}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}_1} \mathrm{cl}(\mathcal{A}^1(U), \tau_\mathbb{R}^{(k)}) = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathcal{A}^1(\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]), \tau_\mathbb{R}^{(k)}) = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_\mathbb{R}^{(k)}), \tag{8.6}$$

где $\mathcal{E}_1 \triangleq \{\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon] : \varepsilon \in]0,\infty[\}$, причем $\mathcal{E}_1$ направлено двойственно к вложению, что существенно в [17, (3.2.8)]. Отметим, что все множества из $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}, \tau_\mathbb{R}^{(k)}), \varepsilon \in]0,\infty[$, компактны в $(\mathbb{R}^k, \tau_\mathbb{R}^{(k)})$; в этой связи см. (7.3), (7.5). Тогда при всяком выборе $U \in \mathcal{E}_1$ множество $\mathrm{cl}(\mathcal{A}^1(U), \tau_\mathbb{R}^{(k)})$ компактно в $(\mathbb{R}^k, \tau_\mathbb{R}^{(k)})$. С учетом [17, (3.2.1)], (8.6) и свойств $\mathcal{E}_1$

получаем из предложения 3.6.1 монографии [17] следующий факт: если $\zeta \in]0,\infty[$, то $O^{(k)}_\zeta[(\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{LIM})[\mathcal{E}_1|\mathcal{A}]]$ является открытой окрестностью множества $\mathrm{cl}(\mathcal{A}^1(U),\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$ для некоторого $U \in \mathcal{E}_1$ и, в частности,

$$\mathrm{cl}(\mathcal{A}^1(U),\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \subset O^{(k)}_\zeta[(\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{LIM})[\mathcal{E}_1|\mathcal{A}]]. \tag{8.7}$$

Однако из (7.17), (8.6) вытекает (см. [17, (3.2.8)]), что $(\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{LIM})[\mathcal{E}_1|\mathcal{A}] = \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$. Возвращаясь к (8.7) и определению $\mathcal{E}_1$, получаем, что $\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists \upsilon \in]0,\infty[$:

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\upsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{cl}\big(\mathcal{A}^1(\mathbb{E}^{(1)}_\partial[\upsilon]),\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}\big) \subset O^{(k)}_\zeta[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]. \tag{8.8}$$

Из (7.17) имеем, что $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\upsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$ при $\upsilon \in]0,\infty[$. Тогда с учетом (8.8) получаем (8.5). □

Аналогичным образом из (7.18) вытекает, что $\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists \delta \in]0,\infty[$:

$$\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_\delta,\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \subset O^{(l)}_\zeta[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]. \tag{8.9}$$

Напомним теперь в связи с (7.17), что (см. (7.3), (7.5)) $\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k]$ $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$. Кроме того, справедливо (7.11). Поэтому имеем из (7.11), что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}]\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[. \tag{8.10}$$

Аналогично, из (7.3), (7.5) следует, что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_\delta,\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(l)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l]\ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{8.11}$$

Из (5.23), (7.13) и (8.11) вытекает система включений

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_\delta,\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{B}} - \mathrm{comp})[\mathbf{B}]\ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{8.12}$$

Из (5.17) и (8.10) следует, что при $\varepsilon \in]0,\infty[$ мы располагаем функцией

$$\phi_\varepsilon \triangleq \Big(\min_{x \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})} \hat{\Phi}(x,y)\Big)_{y \in \mathbf{B}}, \tag{8.13}$$

действующей из $\mathbf{B}$ в $\mathbb{R}$ (мы имеем вариант функции (5.22), в котором $K = \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$); тогда функция ϕ_ε равномерно непрерывна, то есть $\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists \upsilon \in]0,\infty[\ \forall y_1 \in \mathbf{B}\ \forall y_2 \in \mathbf{B}$

$$(||y_1 - y_2||^{(l)} < \upsilon) \Rightarrow (|\phi_\varepsilon(y_1) - \phi_\varepsilon(y_2)| < \zeta). \tag{8.14}$$

Поэтому по теореме Вейерштрасса получаем (см. раздел 5), что при $\varepsilon \in]0,\infty[, \delta \in]0,\infty[$, согласно (8.11), определяется значение

$$\mathbb{V}(\varepsilon,\delta) \triangleq \max_{y \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_\delta,\tau^{(l)}_{\mathbb{R}})} \phi_\varepsilon(y) = \max_{y \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}_\delta,\tau^{(l)}_{\mathbb{R}})} \min_{x \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon,\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})} \hat{\Phi}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{8.15}$$

Можно, однако, рассматривать значение (8.15) как апроксимативный максимин. Дело в том, что в силу (5.17) при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $y \in \mathbf{B}$

$$\phi_\varepsilon(y) = \inf_{x \in \mathbb{G}^{(1)}_\varepsilon} \hat{\Phi}(x,y). \tag{8.16}$$

Итак, из (8.13) и (8.16) вытекает, что

$$\phi_\varepsilon = \Big(\inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y)\Big)_{y\in\mathbf{B}} = \Big(\min_{x\in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)},\tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \hat{\Phi}(x,y)\Big)_{y\in\mathbf{B}} \;\forall\varepsilon\in]0,\infty[\;\forall y\in\mathbf{B}. \tag{8.17}$$

С учетом (8.12), (8.15) и (8.17) получаем также, что

$$\inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) = \min_{x\in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)},\tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \hat{\Phi}(x,y) = \phi_\varepsilon(y) \leqslant \mathbb{V}(\varepsilon,\delta)\;\forall\varepsilon\in]0,\infty[\;\forall\delta\in]0,\infty[\;\forall y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}.$$

Как следствие, при $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $\delta\in]0,\infty[$ имеем следующее равенство:

$$\{\phi_\varepsilon(y) : y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}\} = \{\inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) : y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}\}. \tag{8.18}$$

Для множества (8.18) определена (конечная) точная верхняя грань:

$$\sup_{y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}} \phi_\varepsilon(y) = \sup_{y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}} \inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) \in]-\infty, \mathbb{V}(\varepsilon,\delta)].$$

Более того, имеем на самом деле следующую систему равенств (см. (8.14), (8.15)):

$$\sup_{y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}} \phi_\varepsilon(y) = \sup_{y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}} \inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) = \mathbb{V}(\varepsilon,\delta)\;\forall\varepsilon\in]0,\infty[\;\forall\delta\in]0,\infty[. \tag{8.19}$$

Из (8.15) и (8.19) вытекает, что справедлива цепочка равенств: $\forall\varepsilon\in]0,\infty[\;\;\forall\delta\in]0,\infty[$

$$\mathbb{V}(\varepsilon,\delta) = \sup_{y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}} \inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) = \max_{y\in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)},\tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{x\in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)},\tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \hat{\Phi}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{8.20}$$

Учтем теперь, наряду с (8.20), представления (7.1) и свойства (8.3). Тогда при $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $y\in\mathbf{B}$, согласно (5.16), (7.1) и (8.3),

$$\{f_0((\alpha_i(\tilde{x}))_{i\in\overline{1,k}}, y) : \tilde{x}\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]\} = \{f_0(x,y) : x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}\} = \{\hat{\Phi}(x,y) : x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}\}$$

есть непустое ограниченное снизу п/м $\mathbb{R}$; определена (конечная) точная нижняя грань и

$$\inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\Big(\big(\alpha_i(u)\big)_{i\in\overline{1,k}}, y\Big) = \inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} f_0(x,y) = \inf_{x\in\mathbb{G}_\varepsilon^{(1)}} \hat{\Phi}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{8.21}$$

С учетом (8.16) и (8.21) имеем теперь, что $\phi_\varepsilon(y) = \inf\limits_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0((\alpha_i(u))_{i\in\overline{1,k}}, y)\;\forall\varepsilon\in]0,\infty[\;\forall y\in\mathbf{B}$.
Если $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $\delta\in]0,\infty[$, то, согласно (7.1) и (8.18), имеем свойство:

$$\{\inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\Big(\big(\alpha_i(u)\big)_{i\in\overline{1,k}}, \big(\beta_j(v)\big)_{j\in\overline{1,l}}\Big) : v\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]\} =$$

$$= \{\inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\big((\alpha_i(u))_{i\in\overline{1,k}}, y\big) : y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}\} = \{\phi_\varepsilon(y) : y\in\mathbb{G}_\delta^{(2)}\}$$

есть непустое ограниченное сверху п/м $\mathbb{R}$, а тогда определено значение

$$\sup_{v\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\Big(\big(\alpha_i(u)\big)_{i\in\overline{1,k}}, \big(\beta_j(v)\big)_{j\in\overline{1,l}}\Big) = \sup_{v\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \phi_\varepsilon(y) = \mathbb{V}(\varepsilon,\delta).$$

Итак, установлено, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall \delta \in]0, \infty[$

$$\mathbb{V}(\varepsilon, \delta) = \sup_{v \in \mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \inf_{u \in \mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\Big(\big(\alpha_i(u)\big)_{i \in \overline{1,k}}, \big(\beta_j(v)\big)_{j \in \overline{1,l}}\Big). \qquad (8.22)$$

Напомним теперь, что, согласно (5.24), (5.25) и (8.1),

$$\Big(\mathbf{T}_1 \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)\big)\Big) \& \Big(\mathbf{T}_2 \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{T}(\mathcal{L}_2)\big)\Big). \qquad (8.23)$$

С учетом (5.10) и (8.23) получаем, в частности, что

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) = \{(\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i \in \overline{1,k}} : \mu \in \mathbf{T}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^k). \qquad (8.24)$$

Из предложения 5.1, (8.23) и (8.24) вытекает, что

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \in \mathcal{P}'(\mathbf{A}). \qquad (8.25)$$

Из предложения 6.1 вытекает, что $\mathbf{T}_1$ есть замкнутое в $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_1)$ п/м $\mathbb{T}(\mathcal{L}_1)$, а с учетом (5.11) и компактности топологий (5.3) получаем, что $\mathbf{T}_1$ компактно в смысле $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_1)$ и

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k].$$

Это означает, что топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)}$ компактна и, кроме того (см. (8.25)), $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} = \theta|_{\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)}$, где $\theta \stackrel{\triangle}{=} \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}}$. Иными словами, $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$ компактно в ТП (5.19) и непусто (см. (8.25)), то есть $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{A}} - \mathrm{comp})[\mathbf{A}]$, а тогда, согласно (5.17) и теореме Вейерштрасса, имеем при $y \in \mathbf{B}$, что (см. (5.22)) достигается минимум $\hat{\Phi}(\cdot, y)$ на $\mathfrak{a}(\mathbf{T}_1)$, а отображение $y \longmapsto \min\limits_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывно относительно метрики

$$(x, y) \longmapsto ||x - y||^{(l)} : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \to [0, \infty[,$$

которая порождает топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}}$ (см. [17, (2.7.32)]). Иными словами,

$$\big(\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y)\big)_{y \in \mathbf{B}} \in \mathbb{C}(\mathbf{B}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}}). \qquad (8.26)$$

Из (7.15) и (8.23) вытекает следующее свойство:

$$\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) = \{(\int_{E_2} \beta_j d\nu)_{j \in \overline{1,l}} : \nu \in \mathbf{T}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^l). \qquad (8.27)$$

Из предложения 5.2, (8.23) и (8.27) вытекает, что

$$\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \in \mathcal{P}'(\mathbf{B}). \qquad (8.28)$$

Далее, из предложения 6.2 следует, что $\mathbf{T}_2$ — замкнутое в $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_2)$ п/м $\mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$, а тогда, согласно (7.16) и компактности топологий (5.3), мы получаем, что $\mathbf{T}_2$ компактно в топологии $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}_2)$ и, как следствие [17, (2.8.5)], $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l]$. Это означает, что компактна топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)}$ и, с учетом (8.28), $\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)} = \tilde{\theta}|_{\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)}$, где $\tilde{\theta} \stackrel{\triangle}{=} \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}}$. Как следствие, $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$ есть п/м $\mathbf{B}$, компактное в топологии $\tilde{\theta}$. Поскольку $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \neq \emptyset$, то

$$\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}} - \mathrm{comp})[\mathbf{B}]. \qquad (8.29)$$

Из (8.26) и (8.29) следует, что в задаче $\min\limits_{x\in\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x,y) \to \max, y \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$, непременно достигается максимум, то есть определено значение

$$\mathbf{V} \stackrel{\triangle}{=} \max_{y\in\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)} \min_{x\in\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{8.30}$$

Мы рассматриваем далее $\mathbf{V}$ (8.30) как максимин в обобщенной игровой задаче. Для этого заметим сначала, что при $y \in \mathbf{B}$, согласно предложению 5.1, $\{\hat{\Phi}(x,y) : x \in \mathbf{A}\} = \{\hat{\Phi}((\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i\in\overline{1,k}}, y) : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)\}$. Аналогичным образом имеем при $y \in \mathbf{B}$, что (см. определение $\mathfrak{a}$ (5.10))

$$\{\hat{\Phi}(x,y) : x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)\} = \{\hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), y) : \mu \in \mathbf{T}_1\} = \{\hat{\Phi}((\int_{E_1} \alpha_i d\mu)_{i\in\overline{1,k}}, y) : \mu \in \mathbf{T}_1\}; \tag{8.31}$$

используя (8.31), получаем также, что

$$\min_{x\in\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x,y) = \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), y). \tag{8.32}$$

Следовательно, мы используем на самом деле отображение $y \longmapsto \min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), y) : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$. В частности, согласно (8.28), $\mathfrak{b}(\nu) \in \mathbf{B}\ \forall \nu \in \mathbf{T}_2$. Поэтому при $\nu \in \mathbf{T}_2$, согласно (8.32),

$$\min_{x\in\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, \mathfrak{b}(\nu)) = \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}\big(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)\big) \in \mathbb{R}. \tag{8.33}$$

С учетом (8.30) получаем, что в задаче $\min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) \to \max, \nu \in \mathbf{T}_2$, максимум непременно достигается и

$$\mathbf{V} = \max_{\nu\in\mathbf{T}_2} \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) \in \mathbb{R}. \tag{8.34}$$

Иными словами, $\mathbf{V}$ есть значение задачи $\hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) \to \max\limits_{\nu\in\mathbf{T}_2} \min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1}$. Из (5.4) по определению $\mathfrak{a}$ (5.10) и $\mathfrak{b}$ (7.15) имеем $\forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_1)\ \forall \nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}_2)$

$$\tilde{\Phi}(\mu, \nu) = f_0(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) = \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) \tag{8.35}$$

(см. (8.25), (8.28)). Тогда (см. (8.23), (8.35)) имеем при $\nu \in \mathbf{T}_2$, что $\{\tilde{\Phi}(\mu,\nu) : \mu \in \mathbf{T}_1\} = \{\hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) : \mu \in \mathbf{T}_1\}$, а потому (см. (8.33)) в задаче $\tilde{\Phi}(\mu,\nu) \longmapsto \min, \mu \in \mathbf{T}_1$, минимум непременно достигается и при этом

$$\min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \tilde{\Phi}(\mu,\nu) = \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) \in \mathbb{R}. \tag{8.36}$$

Следовательно, справедливо равенство $\{\min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1} \tilde{\Phi}(\mu,\nu) : \nu\in\mathbf{T}_2\} = \{\min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)) : \nu\in\mathbf{T}_2\}$, а потому (см. (8.34)) в задаче $\min\limits_{\mu\in\mathbf{T}_1} \tilde{\Phi}(\mu,\nu) \to \max, \nu \in \mathbf{T}_2$, достигается максимум и

$$\mathbf{V} = \max_{\nu\in\mathbf{T}_2} \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \tilde{\Phi}(\mu,\nu) \in \mathbb{R}. \tag{8.37}$$

Таким образом (см. (8.15), (8.22), (8.37)), у нас определены экстремумы

$$\Big(\mathbb{V}(\varepsilon,\delta) = \sup_{v\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\Big(\big(\alpha_i(u)\big)_{i\in\overline{1,k}}, \big(\beta_j(v)\big)_{j\in\overline{1,l}}\Big) = \sup_{v\in\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \inf_{u\in\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} f_0\big(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(v)\big) \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \forall \delta \in]0,\infty[\Big) \& \Big(\mathbf{V} = \max_{\nu\in\mathbf{T}_2} \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \tilde{\Phi}(\mu,\nu) = \max_{\nu\in\mathbf{T}_2} \min_{\mu\in\mathbf{T}_1} \hat{\Phi}\big(\mathfrak{a}(\mu), \mathfrak{b}(\nu)\big) \in \mathbb{R}\Big). \tag{8.38}$$

Заметим, что (см. (7.10)) при $u \in E_1$ справедливо свойство $\mathcal{A}(u) \in \mathbf{A}$; кроме того, при $v \in E_2$ справедливо (см. (7.12)) включение $\mathcal{B}(u) \in \mathbf{B}$. Поэтому, согласно (5.16),

$$\hat{\Phi}(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(v)) = f_0(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(v)); \tag{8.39}$$

В частности, это равенство справедливо при $u \in \mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon], v \in \mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]$, где $\varepsilon \in]0, \infty[, \delta \in]0, \infty[$; см. (4.8), (4.9). Из (8.38) и (8.39) вытекает, что

$$\mathbb{V}(\varepsilon, \delta) = \sup_{v \in \mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta]} \inf_{u \in \mathbb{E}_\partial^{(1)}[\varepsilon]} \hat{\Phi}(\mathcal{A}(u), \mathcal{B}(v)) \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall \delta \in]0, \infty[.$$

9. Аппроксимативная реализация обобщенного максимина

Ниже показано, что обобщенный максимин $\mathbf{V}$ сколь угодно точно аппроксимируется значениями $\mathbb{V}(\varepsilon, \delta)$ при достаточно малых значениях $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $\delta \in]0, \infty[$. Сначала отметим свойство аппроксимативного характера, подобное предложению 4 работы [12].

П р е д л о ж е н и е 9.1. $\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \delta_\zeta \in]0, \infty[$:

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \zeta[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \forall y \in \mathbf{B}. \tag{9.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\zeta \in]0, \infty[$. Тогда, согласно (5.21), можно указать $\tilde{\delta} \in]0, \infty[$, для которого $\forall x' \in \mathbf{A} \ \forall y' \in \mathbf{B} \ \forall x'' \in \mathbf{A} \ \forall y'' \in \mathbf{B}$

$$((||x' - x''||^{(k)} < \tilde{\delta}) \& (||y' - y''||^{(l)} < \tilde{\delta})) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(x', y') - \hat{\Phi}(x'', y'')| < \zeta). \tag{9.2}$$

С учетом предложения 8.1 получаем, что для некоторого $\tilde{\varepsilon} \in]0, \infty[$

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\tilde{\varepsilon}}^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\tilde{\delta}}^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]. \tag{9.3}$$

Пусть $\kappa \in]0, \tilde{\varepsilon}[$ и $y_* \in \mathbf{B}$. С учетом (9.2) имеем $\forall x' \in \mathbf{A} \ \forall x'' \in \mathbf{A}$

$$(||x' - x''||^{(k)} < \tilde{\delta}) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(x', y_*) - \hat{\Phi}(x'', y_*)| < \zeta). \tag{9.4}$$

При этом, согласно (4.8), имеем по выбору κ вложение $\mathbb{E}_\partial^{(1)}[\kappa] \subset \mathbb{E}_\partial^{(1)}[\tilde{\varepsilon}]$, откуда, согласно (7.1), вытекает, что $\mathbb{G}_\kappa^{(1)} \subset \mathbb{G}_{\tilde{\varepsilon}}^{(1)}$ и, как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\kappa^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\tilde{\varepsilon}}^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$. Поэтому из (9.3) вытекает вложение $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_\kappa^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\tilde{\delta}}^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]$ и с учетом (7.17)

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\kappa^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\tilde{\delta}}^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]. \tag{9.5}$$

Из (8.13) и (9.5) следует очевидное неравенство:

$$\phi_\kappa(y_*) \leqslant \min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y_*). \tag{9.6}$$

Подберем теперь $x_* \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\kappa^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$ такое, что справедливо равенство

$$\phi_\kappa(y_*) = \hat{\Phi}(x_*, y_*). \tag{9.7}$$

Согласно (9.5) имеем, в частности, включение $x_* \in O_{\tilde{\delta}}^{(k)}[\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)]$. Это означает, что $x_* \in \mathbb{R}^k$ таково (см. (2.1)), что для некоторого $x^* \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$

$$||x_* - x^*||^{(k)} < \tilde{\delta}. \tag{9.8}$$

Заметим, что, согласно (7.11), $x_* \in \mathbf{A}$. Кроме того, из (8.25) имеем по выбору x^* включение $x^* \in \mathbf{A}$. Тогда из (9.4) следует импликация $(||x_* - x^*||^{(k)} < \tilde{\delta}) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(x_*, y_*) - \hat{\Phi}(x^*, y_*)| < \zeta)$. Поэтому из (9.8) получаем неравенство $|\hat{\Phi}(x_*, y_*) - \hat{\Phi}(x^*, y_*)| < \zeta$. С учетом (9.7) $|\phi_\kappa(y_*) - \hat{\Phi}(x^*, y_*)| < \zeta$. По выбору x^* имеем неравенство $\min\limits_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y_*) < \phi_\kappa(y_*) + \zeta$. Тогда (см. (9.6)) получаем цепочку неравенств $\phi_\kappa(y_*) \leqslant \min\limits_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y_*) < \phi_\kappa(y_*) + \zeta$. Поскольку выбор κ и y_* был произвольным, установлено, что

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \zeta[\ \forall \varepsilon \in]0, \tilde{\varepsilon}[\ \forall y \in \mathbf{B}. \tag{9.9}$$

Коль скоро $\tilde{\varepsilon} \in]0, \infty[$, из (9.9) вытекает, что $\exists \delta_\zeta \in]0, \infty[$:

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \zeta[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \forall y \in \mathbf{B}.$$

Поскольку выбор ζ был произвольным, установлено (9.1). □

Т е о р е м а 9.1. *Имеет место следующее свойство аппроксимативной реализации* $\mathbf{V}$:

$$\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \kappa_\zeta \in]0, \infty[: |\mathbb{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < \zeta \ \forall \varepsilon \in]0, \kappa_\zeta[\ \forall \delta \in]0, \kappa_\zeta[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (7.13) и предложения 9.1 вытекает, что

$$\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \delta_\zeta \in]0, \infty[: \min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \zeta[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \forall \delta \in]0, \infty[\ \forall y \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}).$$

Далее из (8.28) и предложения 9.1 следует, что

$$\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \delta_\zeta \in]0, \infty[: \min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \zeta[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \forall y \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2). \tag{9.10}$$

С учетом (8.30) выберем и зафиксируем $y_0 \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$ такое, что

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y_0) = \mathbf{V}. \tag{9.11}$$

Тогда, в частности, $y_0 \in \mathbf{B}$, согласно (8.28). Выберем и зафиксируем произвольное число $\kappa \in]0, \infty[$. С учетом (9.10) подбираем число $\delta_1^* \in]0, \infty[$, для которого

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y) \in [\phi_\varepsilon(y), \phi_\varepsilon(y) + \kappa[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \forall y \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2).$$

В частности, получаем систему включений $\min\limits_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y_0) \in [\phi_\varepsilon(y_0), \ \phi_\varepsilon(y_0) + \kappa[\ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[$. С учетом (9.11) получаем, что $\mathbf{V} < \phi_\varepsilon(y_0) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[$. Поскольку $y_0 \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$, то

$$\mathbf{V} < \max_{y \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)} \phi_\varepsilon(y) + \kappa \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[. \tag{9.12}$$

Вместе с тем, согласно (7.18), $\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \ \forall \delta \in]0, \infty[$. Поэтому при $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $\delta \in]0, \infty[$ $\max\limits_{y \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)} \phi_\varepsilon(y) \leqslant \max\limits_{y \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \phi_\varepsilon(y)$. Данные неравенства используем в (9.12):

$$\mathbf{V} < \max_{y \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_\delta^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \phi_\varepsilon(y) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{9.13}$$

Как следствие из (8.15) и (9.13) вытекает следующая система неравенств: $\mathbf{V} < \mathbb{V}(\varepsilon, \delta) + \kappa$ $\forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \forall \delta \in]0, \infty[$. Иными словами,

$$\mathbf{V} - \mathbb{V}(\varepsilon, \delta) < \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{9.14}$$

С учетом (4.3) и (5.21) подберем $\delta_2^* \in]0,\infty[$ такое, что $\forall x' \in \mathbf{A}\ \forall y' \in \mathbf{B}\ \forall x'' \in \mathbf{A}\ \forall y'' \in \mathbf{B}$

$$((||x'-x''||^{(k)} < \delta_2^*)\&(||y'-y''||^{(l)} < \delta_2^*)) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(x',y') - \hat{\Phi}(x'',y'')| < \kappa). \tag{9.15}$$

Пусть теперь $\tilde{\delta_2^*} \triangleq \inf(\{\delta_1^*, \delta_2^*\}); \tilde{\delta_2^*} \in]0,\infty[$. Из (9.14) имеем, следовательно, что

$$\mathbf{V} - \mathbb{V}(\varepsilon,\delta) < \kappa \quad \forall \varepsilon \in]0, \tilde{\delta_2^*}[\ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{9.16}$$

Из (9.15) вытекает при этом, что $\forall x' \in \mathbf{A}\ \forall y' \in \mathbf{B}\ \forall x'' \in \mathbf{A}\ \forall y'' \in \mathbf{B}$

$$((||x'-x''||^{(k)} < \tilde{\delta_2^*})\&(||y'-y''||^{(l)} < \tilde{\delta_2^*})) \Rightarrow (|\hat{\Phi}(x',y') - \hat{\Phi}(x'',y'')| < \kappa). \tag{9.17}$$

Подберем теперь, используя (8.9), такое число $\delta_3^* \in]0,\infty[$, что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\delta_3^*}^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\tilde{\delta_2^*}}^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]. \tag{9.18}$$

Отметим, что, согласно (4.9), $\mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta] \subset \mathbb{E}_\partial^{(2)}[\delta_3^*]\ \forall \delta \in]0,\delta_3^*]$. С учетом (7.1) получаем вложения $\mathbb{G}_\delta^{(2)} \subset \mathbb{G}_{\delta_3^*}^{(2)}\ \forall \delta \in]0,\delta_3^*]$. Как следствие (см. (9.18)),

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\delta}^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\tilde{\delta_2^*}}^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]\ \forall \delta \in]0,\delta_3^*]. \tag{9.19}$$

Введем $\delta^0 \triangleq \inf(\{\tilde{\delta_2^*}; \delta_3^*\}) \in]0,\infty[$. Тогда, поскольку $\delta^0 \leqslant \tilde{\delta_2^*}$, имеем из (9.16), что

$$\mathbf{V} - \mathbb{V}(\varepsilon,\delta) < \kappa \quad \forall \varepsilon \in]0, \delta^0[\ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{9.20}$$

С другой стороны, из (9.19) вытекает, что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\delta}^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\tilde{\delta_2^*}}^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]\ \forall \delta \in]0,\delta^0]. \tag{9.21}$$

Выберем произвольно $\varepsilon_0 \in]0,\delta^0[$ и $\delta_0 \in]0,\delta^0[$. Из (9.20) следует (по выбору ε_0, δ_0), что

$$\mathbf{V} - \mathbb{V}(\varepsilon_0,\delta_0) < \kappa. \tag{9.22}$$

С учетом (8.15) подберем точку $\hat{y} \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\delta_0}^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})$, для которой

$$\mathbb{V}(\varepsilon_0,\delta_0) = \phi_{\varepsilon_0}(\hat{y}). \tag{9.23}$$

Поскольку (см. (9.21)) справедливо (по выбору δ_0) вложение $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\delta_0}^{(2)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\tilde{\delta_2^*}}^{(l)}[\mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)]$, то для некоторого $y^0 \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$ справедливо неравенство

$$||\hat{y} - y^0||^{(l)} < \tilde{\delta_2^*}. \tag{9.24}$$

В силу (7.13) имеем по выбору $\hat{y}$ следующее включение: $\hat{y} \in \mathbf{B}$. С другой стороны, из (8.28) по выбору y^0 имеем включение $y^0 \in \mathbf{B}$. С учетом (9.17) и (9.24) получаем, что

$$|\hat{\Phi}(x,\hat{y}) - \hat{\Phi}(x,y^0)| < \kappa \quad \forall x \in \mathbf{A}. \tag{9.25}$$

Напомним, что, согласно (9.23), справедливо равенство

$$\mathbb{V}(\varepsilon_0,\delta_0) = \min_{x \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_{\varepsilon_0}^{(1)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \hat{\Phi}(x,\hat{y}). \tag{9.26}$$

С учетом (7.17) получаем, однако, вложение $\mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}_{\varepsilon_0}, \tau^{(k)}_{\mathbb{R}})$. Поэтому, согласно (9.26), имеем очевидное неравенство

$$\mathbb{V}(\varepsilon_0, \delta_0) \leqslant \min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, \hat{y}). \tag{9.27}$$

Вместе с тем из (9.25) вытекает, что $\min\limits_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, \hat{y}) - \kappa < \hat{\Phi}(\tilde{x}, y^0)\ \forall \tilde{x} \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)$. Это означает, что

$$\min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, \hat{y}) - \kappa < \min_{x \in \mathfrak{a}^1(\mathbf{T}_1)} \hat{\Phi}(x, y^0).$$

Коль скоро $y^0 \in \mathfrak{b}^1(\mathbf{T}_2)$, из (8.30), (9.27) и последнего неравенства вытекает, что непременно $\mathbb{V}(\varepsilon_0, \delta_0) - \kappa < \mathbf{V}$. Иными словами, $\mathbb{V}(\varepsilon_0, \delta_0) - \mathbf{V} < \kappa$, откуда с учетом (9.22) вытекает неравенство $|\mathbb{V}(\varepsilon_0, \delta_0) - \mathbf{V}| < \kappa$. Поскольку выбор ε_0, δ_0 был произвольным, установлено, что $|\mathbb{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < \kappa\ \forall \varepsilon \in]0, \delta^0[\ \forall \delta \in]0, \delta^0[$. Коль скоро и выбор κ был произвольным, имеем, что $\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \kappa_\zeta \in]0, \infty[: |\mathbb{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < \zeta\ \forall \varepsilon \in]0, \kappa_\zeta[\ \forall \delta \in]0, \kappa_\zeta[$. □

ЛИТЕРАТУРА

1 . *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

2 . *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

3 . *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.

4 . *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

5 . *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

6 . *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

7 . *Даффин Р. Дж.* Бесконечные программы. // Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959. С.263-267.

8 . *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.

9 . *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

10 . *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.

11 . *Ченцов А. Г.* Об одной игровой задаче управления на минимакс // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. М., 1975. № 1. С. 170-175.

12 . *Ченцов А. Г., Шапаръ Ю. В.* Об одной игровой задаче с приближенным соблюдением ограничений // Доклады Академии Наук. М., 2009. Том 427, № 2. С. 170-175.

13 . *Ченцов А. Г., Шапаръ Ю. В.* Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2010. № 1. С. 89–111.

14 . *Ченцов А. Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2010. № 3. С. 104–119.

15 . *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York; London; Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996.

16 . *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997.

17 . *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

18 . *Chentsov A.G.* Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 133, № 2. Springer, 2006.

19 . *Ченцов А. Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2008.

20 . *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.

21 . *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
22 . *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
23 . *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1968.
24 . *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН (проекты №№ 09-П-1-1007, 09-П-1-1014) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 09-01-00436, 10-01-96020).

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Baklanov A.P. and Chentsov A.G. On question about extension of a game problem in the class of two-valued finitely-additive measures.

We consider a maximin problem with the conditions that admit the relaxations of constraints for strategies choosing. The cost function is supposed to be realized by the "continuous aggregation" of the discontinuous vector-functions which arguments are the players strategies. We construct the generalized representation of the asymptotics of realizable maximin values in the case when the relaxation of constraints is tightened up. Finitely-additive measures are used as the generalized elements.

One of the authors has repeatedly participated in the scientific conferences held at Tambov State University named after G.R. Derzhavin. These conferences have been organized by Tambov mathematicians, well-known specialists in the field of differential equations theory and optimal control theory. Thanks to these scientists the researches in the aforementioned fields have reached the present level. These researches are widely known and have been highly evaluated in other scientific centers. The Tambov mathematicians are connected with the number of research centers of the highest standards by existing traditions, based upon both the priorities of mathematics as a science and mathematical education. Recently the Tambov mathematicians have celebrated the great anniversary - as far as 80 years ago the Institute of Mathematics, Physics and Computer Science of the Tambov State University Named After G.R. Derzhavin was established. The authors wish the Tambov mathematicians every success.

Key words: finitely-additive measures, maximin, attraction set, generalized element, topological space.

Бакланов Артем Павлович, Институт математики и механики Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, аспирант отдела управляемых систем, e-mail: artem.b.123@gmail.com

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом управляемых систем, e-mail: agchentsov@mail.ru