УДК 519.6

НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

© В.И. Левин

Levin V.I. Continuous logic with interval variables. The generalisation of continuous logic was considered in case of uncertainty where logical operations are carried out not on exactly known real numbers from a continuous set but on intervals of possible values of such numbers. Basic laws were formulated for the algebra of such logic. Its possible application was shown in informational technologies.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 50-е – 60-е гг. усилиями ученых ряда стран [1–4] были заложены основы непрерывной логики (НЛ), в которой логические операции совершаются над переменными из непрерывных множеств, в качестве которых обычно берутся конечные или бесконечные интервалы. Переход от традиционных дискретных логик, в которых логические операции совершались над дискретными переменными, к непрерывной логике сулил значительное увеличение областей применения логических методов. Уже исследования конца 60-х – начала 70-х годов показали ряд прикладных направлений, в которых с успехом могли быть применены непрерывно-логические методы, а также важные для этих и других возможных приложений усовершенствования основ и математического аппарата НЛ [5–8]. В настоящее время НЛ представляет собой развитую область исследований, находящуюся на стыке прикладной математики и математической логики и имеющую многочисленные приложения в технике, экономике, гуманитарных и общественных науках, в том числе, связанные с новыми информационными технологиями и задачами управления техническими, экономическими и другими системами [3, 6–21]. Все известные на сегодня результаты в теории НЛ и ее приложениях относятся к случаю, когда независимые переменные задаются, а зависимые переменные вычисляются по ним, с помощью операций НЛ, абсолютно точно. Между тем, все большее число прикладных задач приходится решать в условиях той или иной неопределенности, когда независимые переменные, характеризующие изучаемую систему, задаются лишь приближенно, так что и зависимые переменные, являющиеся различными характеристиками этой системы, могут быть вычислены лишь приближенно. Эта качественно новая ситуация означает, что многочисленные прикладные системы для адекватного их описания в условиях неопределенности требуют использования нового логико-математического аппарата, получаемого путем обобщения НЛ на случай, когда логические операции выполняются над неточно известными переменными. Такой математический аппарат представлен в настоящей статье.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно [1, 3, 8–11], основные операции НЛ: дизъюнкция $\vee$, конъюнкция $\wedge$ и отрицание $\overline{}$ определяются следующим образом. Пусть $C=[A,B]$ – замкнутый интервал вещественных чисел с центром $M=(A+B)/2$. Тогда для любых переменных $a,b\in C$

$$a\vee b=\max(a,b),\qquad a\wedge b=\min(a,b),\quad \overline{a}=2M-a. \tag{1}$$

Иногда в качестве основных в НЛ выбирают операции, отличные от дизъюнкции, конъюнкции и отрицания [1, 14]. Алгебры, образованные множеством C с теми или иными базовыми операциями НЛ на нем, называются алгебрами НЛ. Любая функция вида $C^n\to C$, заданная в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры НЛ, примененных к аргументам $x_1,\dots,x_n\in C$, называется функцией НЛ. Наиболее разработанная алгебра НЛ – квазибулева алгебра

$$\Delta=(C;\vee,\wedge,\overline{}). \tag{2}$$

Операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ в алгебре (2) над переменными a и b дают значение одной из этих переменных, а операция $\overline{}$ над переменной a – число, симметричное с a относительно M. Более того, любая функция НЛ в алгебре (2) на любом наборе значений аргументов принимает значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию можно таблицей значений. От таблицы можно перейти к аналитическому представлению функции НЛ в виде суперпозиции операций $\vee,\wedge,\overline{}$ (1). Для этого используется метод сочленения [8, 9 11].

В квазибулевой алгебре НЛ (2) справедливы следующие логические законы:

$a \vee a = a,\ a \wedge a = a$	тавтологии	(3)
$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$	переместительный	(4)
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	сочетательный	(5)
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	распределительный	(6)
$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b},\ \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$	де Моргана	(7)
$a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$	поглощения	(8)
$\bar{\bar{a}} = a$	двойного отрицания	(9)
$a \wedge A = A,\ \ a \wedge B = a$, $a \vee A = a,\ \ a \vee B = B$	действий с константами	(10)
$a \wedge \bar{a} = M - \lvert a - M \rvert$	псевдо-противоречия	(11)
$a \vee \bar{a} = M + \lvert a - M \rvert$	псевдо-исключенного третьего	(12)
$a \vee (\bar{a} \wedge b) =$ $= (a \vee b) \wedge (M + \lvert a - M \rvert)$	псевдоортогональности	(13)

Кроме того, при комбинировании базовых логических операций $\vee, \wedge, \overline{}$ (1) квазибулевой алгебры (2) со сложением и умножением появляются новые, комбинированные законы:

$\left.\begin{array}{l} a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c) \\ a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c) \end{array}\right\}$	распределительный для сложения относительно дизъюнкции	(14)
$\left.\begin{array}{l} a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c) \\ a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c) \end{array}\right\}$	распределительный для сложения относительно конъюнкции	(15)
$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c) \\ -a \cdot (b \vee c) = (-a \cdot b) \wedge (-a \cdot c) \end{array}\right\},$ $a, b, c > 0$	распределительный для умножения относительно дизъюнкции	(16)
$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b) \wedge (a \cdot c) \\ -a \cdot (b \wedge c) = (-a \cdot b) \vee (-a \cdot c) \end{array}\right\},$ $a, b, c > 0$	распределительный для умножения относительно конъюнкции	(17)
$\overline{a + b} = \bar{a} - b = \bar{b} - a$	спуска отрицания на слагаемые	(18)

Законы (3)–(18) позволяют совершать эквивалентные преобразования логико-алгебраических выражений в НЛ, приводя их к наиболее простому или удобному виду.

Пусть теперь значения логических переменных $a, b, c, \ldots$ из отрезка $C = [A, B]$ известны не точно, а приближенно, и заданы с точностью до интервала возможных значений. Т. е. любая переменная a задается в виде замкнутого интервала

$$\tilde{a} = \{a | a_1 \le a \le a_2\} = [a_1, a_2]\ . \qquad (19)$$

В этом, более общем случае операции НЛ не могут определяться прежними выражениями типа (1), а нуждаются в новых, обобщенных определениях. Наша задача – дать эти новые определения для основных логических операций и принципы их получения для всех остальных операций, установить основные законы получающейся новой, интервальной НЛ и их отличия от аналогичных законов (3)–(18) классической НЛ и наметить пути применения этой новой НЛ для решения прикладных задач управления в условиях неопределенности.

3. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

Независимые переменные a, b, c в интервальной НЛ рассматриваются как замкнутые интервалы возможных значений этих переменных, т. е. как $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2], \tilde{c} = [c_1, c_2]$. Введение логических операций над такими интервальными переменными возможно на основе различных принципов. Мы будем исходить из принципа, принятого в современной интервальной математике [22]. Согласно нему, произвольная операция $\circ$ над двумя интервальными переменными $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ вводится как прямое теоретико-множественное обобщение соответствующей операции $\bullet$ над точными переменными a и b, при условии, что a и b принадлежат соответственно множествам $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, т. е.

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \qquad (20)$$

Другими словами, результатом операции $\circ$ над интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в интервальной математике считается множество результатов соответствующей операции $\bullet$ над вещественными числами a и b, при условии, что a пробегает множество значений $\tilde{a}$, а b – множество значений $\tilde{b}$. Операция $\circ$ над одним или несколькими интервальными переменными вводится аналогично (20). Пользуясь определением (20), в интервальной математике вводят и изучают алгебраические операции над интервалами – сложение, вычитание, умножение и деление. Мы же воспользуемся этим определением для введения логических – в НЛ – операций над интервалами.

Согласно (20) и с учетом определений (1) операций дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\overline{}$ обычной НЛ получим следующие определения этих операций в интервальной НЛ

$$\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\{a\vee b\mid a\in\widetilde{a},b\in\widetilde{b}\},$$
$$\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\{a\wedge b\mid a\in\widetilde{a},b\in\widetilde{b}\}, \quad (21)$$
$$\overline{\widetilde{a}}=\{\overline{a}\mid a\in\widetilde{a}\};\widetilde{a},\widetilde{b}\subseteq C=[A,B].$$

Другие возможные операции интервальной НЛ определяются аналогично (21), т. е. согласно (20) и с учетом определений соответствующих операций в обычной НЛ. Алгебры, образованные множеством C вместе с теми или иными базовыми операциями интервальной НЛ на нем, называются алгебрами интервальной НЛ. Любая функция вида $C^n\to C$, заданная в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры интервальной НЛ, примененных к аргументам $x_1,...,x_n$ – интервалами из C, называется функцией интервальной НЛ. Наибольший интерес с точки зрения возможностей изучения и практического применения представляет квазибулева алгебра интервальной НЛ

$$\Delta_n=(C;\vee,\wedge,\overline{}). \quad (22)$$

Эта алгебра отличается от квазибулевой алгебры обычной НЛ (2) тем, что логические операции дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и отрицания – выполняются в ней не над вещественными числами из интервала C в соответствии с определением (1), а над вещественными интервалами из C в соответствии с определением (21). Данное отличие двух алгебр приводит к большим различиям в их свойствах.

Основные свойства интервальной НЛ описаны ниже. При этом мы ограничиваемся только рамками квазибулевой алгебры (22) этой НЛ, что не снижает общности, поскольку в интервальной НЛ, как и в обычной НЛ (см. [21]), различные возможные операции обычно выражаются суперпозицией операций $\vee,\wedge,\overline{}$ алгебры (22).

Т е о р е м а 1. Результаты операций дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\overline{}$ НЛ над интервалами $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$, $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$, есть интервалы, вычисляемые по формулам

$$\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=[a_1,a_2]\vee[b_1,b_2]=[a_1\vee b_1,a_2\vee b_2],$$
$$\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=[a_1,a_2]\wedge[b_1,b_2]=[a_1\wedge b_1,a_2\wedge b_2], \quad (23)$$
$$\overline{\widetilde{a}}=\overline{[a_1,a_2]}=[\overline{a}_2,\overline{a}_1].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую формулу (23). Согласно определению (21) операции $\vee$ над интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, нижняя граница множества значений результата этой операции равна $a_1\vee b_1$, а верхняя $a_2\vee b_2$, где $\vee=\max$ – операция дизъюнкции обычной НЛ (1). Как известно из теории чисел, множество вещественных чисел всюду плотное. Это значит, что интервал $\widetilde{a}$ (интервал $\widetilde{b}$) содержит все вещественные значения между его нижней и верхней границами a_1 и a_2 (b_1 и b_2). Отсюда следует, что множество значений результата операции $\vee$ над интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ содержит все вещественные значения между нижней и верхней границами этого результата, найденными выше, что и означает первую формулу (23). Доказательство остальных формул (23) получается аналогично.

Как следует из формул (23), дизъюнкция $\vee$ (конъюнкция $\wedge$) НЛ двух интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ есть интервал, нижняя граница которого есть дизъюнкция $\vee=\max$ (конъюнкция $\wedge=\min$) НЛ нижних границ $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, а верхняя граница – дизъюнкция $\vee=\max$ (конъюнкция $\wedge=\min$) НЛ верхних границ $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$. Далее, отрицание $\overline{}$ НЛ интервала $\widetilde{a}$ есть интервал, нижняя (верхняя) граница которого есть отрицание верхней (нижней) границы интервала $\widetilde{a}$, т. е. интервал, расположенный симметрично с $\widetilde{a}$ относительно центра M множества-носителя $C=[A,B]$ алгебры НЛ (22).

Т е о р е м а 2. Операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ НЛ над интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ согласованы в следующем смысле: если одна из операций дает результат $\widetilde{a}$, то вторая дает $\widetilde{b}$ и обратно, т. е. справедлива эквивалентность

$$(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a})\Leftrightarrow(\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b}). \quad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что из левой части (24) следует правая часть. Учитывая формулу (23), найдем

$$(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a})\Rightarrow([a_1\vee b_1,a_2\vee b_2]=$$
$$=[a_1,a_2])\Rightarrow(a_1\vee b_1=a_1,a_2\vee b_2=a_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(a_1\geq b_1,a_2\geq b_2)\Rightarrow(a_1\wedge b_1=b_1,a_2\wedge b_2=b_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow([a_1\wedge b_1,a_2\wedge b_2]=[b_1,b_2])\Rightarrow(\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b}),$$

что и требовалось доказать. Доказательство того, что из правой части (24) следует левая часть, аналогично.

Теорема 2 отнюдь не означает, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами всегда дают в качестве результата какой-то из этих интервалов. Ее смысл лишь в том, что два этих события (они показаны в левой и правой скобках соотношения (24)) наступают всегда одновременно. Условия же, при которых они происходят, определяются следующим утверждением.

Т е о р е м а 3. Для того чтобы в паре интервалов $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$, $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$, выполнялись равенства $\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a}$, $\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения системы неравенств $a_1\geq b_1,a_2\geq b_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая половина цепочки следствий из доказательства теоремы 2 показывает, что $(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a})\Rightarrow(a_1\geq b_1,\ a_2\geq b_2)$. Аналогичная цепочка следствий показывает, что $(\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \widetilde{b}) \Rightarrow$. $\Rightarrow (a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2)$. Два полученных следствия доказывают необходимость сформулированного в теореме условия. Достаточность этого условия доказывается аналогично.

Из теоремы 3 следует, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами дают в качестве результата один из интервалов только в том случае, когда один из интервалов сдвинут относительно другого в одну сторону (вправо или влево) хотя бы по одной из двух границ либо когда интервалы совпадают.

Ситуация, когда операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ приводят к новому интервалу, отличному и от $\widetilde{a}$ и от $\widetilde{b}$, полностью описывается следующим утверждением.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы для пары интервалов $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$, $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ выполнялись неравенства $\widetilde{a} \vee \widetilde{b} \neq a, b$, $\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} \neq a, b$, необходимо и достаточно выполнения какой-нибудь одной из двух систем неравенств $a_1 < b_1, a_2 > b_2$ или $b_1 < a_1, b_2 > a_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4 есть прямое следствие теоремы 3 и вытекает из того, что фигурирующие в ней интервальные неравенства есть дополнения интервальных равенств теоремы 3, а сформулированные необходимые и достаточные условия этих неравенств есть дополнение необходимых и достаточных условий интервальных равенств теоремы 3.

Из теоремы 4 следует, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ дают результат в виде нового интервала, отличного и от $\widetilde{a}$ и от $\widetilde{b}$, только в тех случаях, когда один из интервалов накрывает другой. В целом, приведенные результаты свидетельствуют о значительных отличиях интервальной НЛ от обычной НЛ и тем более от дискретных логик. Главное отличие состоит в том, что операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ НЛ (21) над интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ не всегда дают значение одного из них. В связи с этим функции интервальной НЛ в алгебре (22) не на любом наборе значений аргументов принимают значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию таблицей значений нельзя. Это задание требует указания самого алгебраического выражения, описывающего функцию интервальной НЛ в виде суперпозиции базовых операций этой алгебры. Такое задание функций интервальной НЛ позволяет вычислять их и совершать с ними другие действия.

П р и м е р 1. Вычислить функцию, заданную выражением $\widetilde{v} = (\widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \wedge \overline{\widetilde{z}}$. По формулам (23) полагая $\widetilde{x} = [x_1, x_2]$, $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$, $\widetilde{z} = [z_1, z_2]$, находим

$$\widetilde{v} = [v_1, v_2] = ([x_1, x_2] \vee [y_1, y_2]) \wedge [z_1, z_2] = \\ = [(x_1 \vee y_1) \wedge \overline{z}_2, (x_2 \vee y_2) \wedge \overline{z}_1]$$

Теперь для вычисления значений $\widetilde{v}$ остается подставить в полученное выражение $\widetilde{v}$ численные значения интервалов $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ и выполнить операции обычной НЛ (1).

4. ЗАКОНЫ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

Особенно большие отличия между обычной и интервальной НЛ имеются на уровне их логических законов. При этом лишь 7 из 16 законов обычной НЛ сохраняют свою силу в интервальной НЛ, в то время как 9 других законов меняются. Начнем с законов НЛ, сохраняющих свою силу.

$$\widetilde{a} \vee \widetilde{a} = \widetilde{a}, \ \widetilde{a} \wedge \widetilde{a} = \widetilde{a} \quad \text{– тавтологии;} \quad (25)$$

Доказательство закона (25). Согласно определению (21) операций дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ интервальной НЛ и с учетом закона тавтологии (3) обычной НЛ $\widetilde{a} \vee \widetilde{a} = \{a \vee a \mid a \in \widetilde{a}\} = \{a \mid a \in \widetilde{a}\} = \widetilde{a}$, что доказывает первое тождество (25). Доказательство второго тождества аналогично.

$$\widetilde{a} \vee \widetilde{b} = \widetilde{b} \vee \widetilde{a}, \quad \widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \widetilde{b} \wedge \widetilde{a} \quad \text{– переместительный;} \quad (26)$$

Доказательство закона (26) аналогично доказательству закона (25), причем используется соответствующий закону (26) закон (4) обычной НЛ. Последующие 5 законов также доказываются аналогично закону (25).

$$(\widetilde{a} \vee \widetilde{b}) \vee \widetilde{c} = \widetilde{a} \vee (\widetilde{b} \vee \widetilde{c}), \ (\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}) \wedge \widetilde{c} = \widetilde{a} \wedge (\widetilde{b} \wedge \widetilde{c}) \quad \text{– сочетательный;} \quad (27)$$

$$\overline{\widetilde{a} \vee \widetilde{b}} = \overline{\widetilde{a}} \wedge \overline{\widetilde{b}}, \quad \overline{\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}} = \overline{\widetilde{a}} \vee \overline{\widetilde{b}} \quad \text{– де Моргана;} \quad (28)$$

$$\overline{\overline{\widetilde{a}}} = \widetilde{a} \quad \text{– двойного отрицания;} \quad (29)$$

$$\widetilde{a} \wedge A = A, \ \widetilde{a} \wedge B = \widetilde{a}, \ \widetilde{a} \vee A = \widetilde{a}, \ \widetilde{a} \vee B = B \quad \text{– действий с константами;} \quad (30)$$

$$\overline{\widetilde{a} + \widetilde{b}} = \overline{\widetilde{a}} - \widetilde{b} = \overline{\widetilde{b}} - \widetilde{a} \quad \text{– спуска отрицания на слагаемые.} \quad (31)$$

Теперь перечислим законы интервальной НЛ, отличающиеся от соответствующих законов обычной НЛ.

$$\widetilde{a} \vee (\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}) \supseteq \widetilde{a}, \ \widetilde{a} \wedge (\widetilde{a} \vee \widetilde{b}) \supseteq \widetilde{a} \quad \text{– субпоглощения;} \quad (32)$$

Доказательство закона (32). Согласно определению (19) произвольного интервала $\widetilde{a}$ и с учетом закона (8) поглощения обычной НЛ $\widetilde{a} = \{a \mid a \in \widetilde{a}\} \subseteq$ $\subseteq \{a \vee (a' \wedge b) \mid a, a' \in \widetilde{a}, b \in \widetilde{b}\} = \widetilde{a} \vee (\widetilde{a} \wedge \widetilde{b})$, что доказывает первое включение (32). Доказательство второго включения аналогично. В выписанной цепочке равенств знак включения $\subseteq$, а не равенства, стоит потому, что переменные a и a', являясь независимыми переменными, могут принимать любые, в том числе, неравные значения из множества $\widetilde{a}$.

$$\tilde a\wedge(\tilde b\vee\tilde c)\subseteq(\tilde a\wedge\tilde b)\vee(\tilde a\wedge\tilde c),\tilde a\vee(\tilde b\wedge\tilde c)\subseteq(\tilde a\vee\tilde b)\wedge(\tilde a\vee\tilde c)$$

– субраспределительный; (33)

Доказательство закона (33) аналогично доказательству закона (32), причем используется соответствующий закону (33) закон (6) обычной НЛ. Последующие 4 закона также доказываются аналогично закону (32).

$\left.\begin{array}{l}\tilde a+(\tilde b\vee\tilde c)\subseteq(\tilde a+\tilde b)\vee(\tilde a+\tilde c)\\ \tilde a-(\tilde b\vee\tilde c)\subseteq(\tilde a-\tilde b)\wedge(\tilde a-\tilde c)\end{array}\right\}$	субраспределительный для сложения относительно дизъюнкции;	(34)
$\left.\begin{array}{l}\tilde a+(\tilde b\wedge\tilde c)\subseteq(\tilde a+\tilde b)\wedge(\tilde a+\tilde c)\\ \tilde a-(\tilde b\wedge\tilde c)\subseteq(\tilde a-\tilde b)\vee(\tilde a-\tilde c)\end{array}\right\}$	субраспределительный для сложения относительно конъюнкции;	(35)
$\left.\begin{array}{l}\tilde a\cdot(\tilde b\vee\tilde c)\subseteq(\tilde a\cdot\tilde b)\vee(\tilde a\cdot\tilde c),\\ \tilde a,\tilde b,\tilde c>0\\ -\tilde a\cdot(\tilde b\vee\tilde c)\subseteq(-\tilde a\cdot\tilde b)\wedge(-\tilde a\cdot\tilde c),\\ \tilde a,\tilde b,\tilde c>0\end{array}\right\}$	субраспределительный для умножения относительно дизъюнкции;	(36)
$\left.\begin{array}{l}\tilde a\cdot(\tilde b\wedge\tilde c)\subseteq(\tilde a\cdot\tilde b)\wedge(\tilde a\cdot\tilde c),\\ \tilde a,\tilde b,\tilde c>0\\ -\tilde a\cdot(\tilde b\wedge\tilde c)\subseteq(-\tilde a\cdot\tilde b)\vee(-\tilde a\cdot\tilde c),\\ \tilde a,\tilde b,\tilde c>0\end{array}\right\}$	субраспределительный для умножения относительно конъюнкции;	(37)
$\tilde a\wedge\bar{\tilde a}=M-\lvert\tilde a-M\rvert\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M)$	псевдопротиворечия	(38)

(здесь $M=(A+B)/2$ – центр множества-носителя $C=[A,B]$ алгебры (22), $M_{\tilde a}=(a_1+a_2)/2$ – центр интервала $\tilde a=[a_1,a_2]$, $\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1, x\ge 0;\\ -1, x<0.\end{cases}$).

Доказательство закона (38). Рассмотрим два возможных случая: 1) $M\not\subset\tilde a$, 2) $M\subset\tilde a$. В случае 1 имеем с учетом симметричного расположения $\tilde a$ и $\bar{\tilde a}$ относительно точки M и теоремы 3

$$\tilde a\wedge\bar{\tilde a}=\left\{\begin{array}{ll}\tilde a, & \tilde a<M\\ \bar{\tilde a}=2M-\tilde a, & \tilde a>M\end{array}\right| =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}M+(\tilde a-M),M_{\tilde a}<M\\ M-(\tilde a-M),M_{\tilde a}\ge M\end{array}\right| =$$

$$=M-(\tilde a-M)\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M).$$

В случае 2 имеем с учетом теоремы 3 и того, что относительная сдвинутость двух интервалов $\tilde a$ и $\bar{\tilde a}$ равносильна соответствующей сдвинутости их центров $M_{\tilde a}$ и $M_{\bar{\tilde a}}$, между которыми находится точка M.

$$\tilde a\wedge\bar{\tilde a}=\left\{\begin{array}{ll}\tilde a, & M_{\tilde a}<M_{\bar{\tilde a}}\\ \bar{\tilde a}=2M-\tilde a, & M_{\tilde a}\ge M_{\bar{\tilde a}}\end{array}\right| =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}M+(\tilde a-M),M_{\tilde a}<M\\ M-(\tilde a-M),M_{\tilde a}\ge M\end{array}\right| =$$

$$=M-(\tilde a-M)\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M)$$

Таким образом, в обоих случаях тождество (38) выполнено, что и доказывает данный закон.

$$\tilde a\vee\bar{\tilde a}=M+(\tilde a-M)\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M)$$

– псевдоисключенного третьего (39)

(здесь $M, M_{\tilde a}$ и $\mathrm{sgn}\,x$ – те же, что и в законе (38)).

Доказательство закона (39) аналогично доказательству закона (38).

$$\tilde a\vee(\bar{\tilde a}\wedge\tilde b)\subseteq(\tilde a\vee\tilde b)\wedge[M+(\tilde a-M)\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M)]$$

– субортогональности (40)

($M, M_{\tilde a}$ и $\mathrm{sgn}\,x$ – те же).

Доказательство закона (40). Положив во 2-м выражении (33) $\tilde c=\bar{\tilde a}$, получим $\tilde a\vee(\bar{\tilde a}\wedge\tilde b)\subseteq$ $\subseteq(\tilde a\vee\tilde b)\wedge(\tilde a\vee\bar{\tilde a})$, откуда после замены $(\tilde a\vee\bar{\tilde a})$ по формуле (39) получим (40).

$$\tilde a\wedge(\bar{\tilde a}\vee\tilde b)\subseteq(\tilde a\wedge\tilde b)\vee[M+(\tilde a-M)\,\mathrm{sgn}(M_{\tilde a}-M)]$$

– субортогональности (41)

($M, M_{\tilde a}, \mathrm{sgn}\,x$ – те же).

Доказательство закона (41) аналогично доказательству закона (40) и использует 1-е выражение (33) и формулу (38).

Законы интервальной НЛ (25)–(31), (38), (39), имеющие форму тождеств, можно использовать для эквивалентных преобразований логических выражений с целью приведения к наиболее простому (удобному) виду. Законы (32)–(37), (40), (41), имеющие форму включений, можно использовать только для оценки логических выражений.

5. ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

Интервальная НЛ может найти широкое применение в информационных технологиях, связанных с задачами управления, вычислительной и измерительной техники при наличии неопределенности. Ограничимся тремя примерами.

1. Геометрическое моделирование. Пусть задана точно некоторая кривая, характеризующая объект управления; требуется описать ее аналитически соответствующим уравнением [21]. В случае сложных

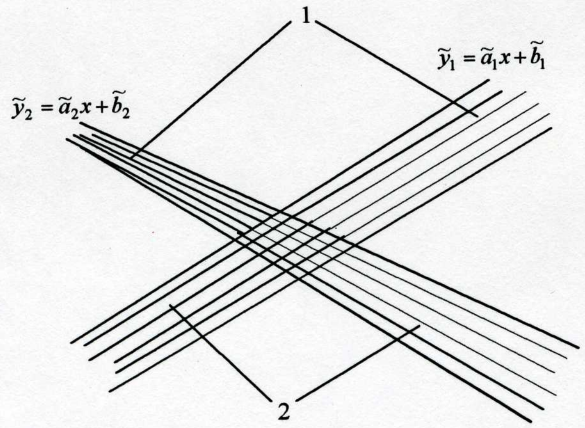

Рис. 1. Размытая (интервальная) кривая, полученная пересечением интервальных прямых (1 – вогнутая, 2 – выпуклая)

(изломанных, разрывных и т. д.) кривых решение данной задачи с помощью НЛ обычно требует меньше исходных параметров и проще описывает объект, чем другие методы [18, 21]. Так, изломанную кривую, полученную пересечением двух прямых $a_1 x + b_1$ и $a_2 x + b_2$, можно записать аналитически

$$y = (a_1 x + b_1) \genfrac{}{}{0pt}{}{\vee}{\wedge} (a_2 x + b_2), \tag{42}$$

где операция конъюнкции НЛ $\wedge$ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции НЛ $\vee$ – для вогнутой.

Представление (42) не требует знания даже точки пересечения прямых, и потому оно особенно простое. Пусть теперь параметры указанных прямых известны не точно, а приближенно – в виде интервалов возможных значений $\widetilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}]$, $\widetilde{b}_1 = [b_{11}, b_{12}]$, $\widetilde{a}_2 = [a_{12}, a_{22}]$, $\widetilde{b}_2 = [b_{21}, b_{22}]$. Тогда каждая прямая в любой точке X принимает не одно значение, а интервал возможных значений: $\widetilde{y}_1 = \widetilde{a}_1 x + \widetilde{b}_1$, $\widetilde{y}_2 = \widetilde{a}_2 x + \widetilde{b}_2$. Как видим, исходные прямые превратились теперь в полосы с линейно возрастающей при увеличении x толщиной (рис. 1). Образующуюся при их пересечении размытую интервально кусочно-линейную кривую можно записать аналитически подобно (42)

$$\widetilde{y} = (\widetilde{a}_1 x + \widetilde{b}_1) \genfrac{}{}{0pt}{}{\vee}{\wedge} (\widetilde{a}_2 x + \widetilde{b}_2), \tag{43}$$

где операция конъюнкции интервальной НЛ $\wedge$ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции интервальной НЛ $\vee$ – для вогнутой. Получаемые изломанные интервальные кривые (43) показаны на рис. 1. Представления типа (43) верны также для кривых.

2. Динамика автоматов. Пусть в элементарном дискретном автомате с 2 двоичными входами x_1 и x_2, 1 двоичным выходом y и реализуемой булевой функцией конъюнкция: $y = x_1 \,\&\, x_2$, $x_1, x_2, y \in \{0,1\}$ на входы действуют двоичные точно известные процессы

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \ge a, \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1, & t < b, \\ 0, & t \ge b. \end{cases} \tag{44}$$

Двоичный процесс $y(t)$ на выходе автомата – реакция на заданные входные процессы $x_1(t), x_2(t)$, при обозначении $1(A, B)$ двоичного процесса в виде импульса в интервале времени (A, B), равен импульсу $1(a, b)$ при $b \ge a$ и постоянному 0 при $b < a$. Интерпретируя постоянный 0 как импульс $1(a, a)$ с совпадающими началом и концом и используя операцию дизъюнкции НЛ $\vee$, получим выражение выходного процесса $y(t)$ в виде

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1(a, b), & b \ge a, \\ 0 = 1(a, a), & b < a, \end{array} \right| = 1(a, a \vee b). \tag{45}$$

Аналогично находятся выходные процессы в других элементарных автоматах и при других входных процессах. На базе этих расчетов строятся расчеты выходных процессов в произвольных дискретных автоматах, собранных из элементарных автоматов [8, 9, 18–21]. Пусть теперь временные параметры a, b входных процессов изученного элементарного автомата известны не точно, а приближенно – в виде интервалов возможных значений $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$, $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$. Тогда двоичные процессы на входах автомата можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} 0, & t < \widetilde{a} = [a_1, a_2], \\ 1, & t \ge \widetilde{a} = [a_1, a_2], \end{cases} \\ x_1(t) &= \begin{cases} 1, & t < \widetilde{b} = [b_1, b_2], \\ 0, & t \ge \widetilde{b} = [b_1, b_2]. \end{cases} \end{aligned} \tag{46}$$

Ясно, что сравнение двух интервалов по отношениям $>, \ge$ возможно, лишь если дизъюнкция интервальной НЛ $\vee$ дает один из них (больший), а конъюнкция $\wedge$ – другой (меньший), а для этого, согласно теореме 3, интервалы должны быть сдвинуты относительно друг друга либо совпадать. Применительно к записанным процессам $x_1(t), x_2(t)$ это означает наличие эквивалентностей

$$(t < \widetilde{a}) \Leftrightarrow (t \le a_1), (t \ge \widetilde{a}) \Leftrightarrow (t \ge a_2), (t < \widetilde{b}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t \le b_1), (t \ge \widetilde{b}) \Leftrightarrow (t \ge b_2).$$

Так что заданные двоичные входные процессы можно записать как

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \le a_1\ , \\ \Theta, & a_1 < t < a_2, \\ 1, & t \ge a_2\ , \end{cases}$$

$$x_1(t)=\begin{cases}0, & t\le b_1\ ,\\ \Theta, & b_1<t<b_2,\\ 1, & t\ge b_2\ ,\end{cases}$$

где Θ – состояние неопределенности процесса, промежуточное между 0 и 1. Видим, что процессы на входах автомата – это переключения из 0 в 1 (из 1 в 0), но не мгновенные в момент a (момент b), как раньше, а затянутые на интервале времени $\widetilde{a}=(a_1,a_2)$ [интервале $\widetilde{b}=(b_1,b_2)$], где состояния процессов логически не определены. Для нахождения процесса $y(t)$ на выходе автомата при новых, неопределенных входных процессах $x_1(t)$, $x_2(t)$ применим метод раздетерминизации [20]. Для этого сначала детерминизируем входные процессы (46), положив $a_1=a_2=a, b_1=b_2=b$. Тогда эти процессы примут вид (44), а соответствующий выходной процесс – вид (45) единичного импульса в указанном интервале времени. Совершая теперь обратное преобразование $a\to\widetilde{a},\ b\to\widetilde{b}$, т. е. раздетерминизируя снова входные процессы по условию задачи, получим выходной процесс $y(t)$ в виде $y(t)=1(\widetilde{a},\widetilde{a}\vee\widetilde{b})$ единичного импульса с затянутыми передним (на интервале $\widetilde{a}$) и задним (на интервале $\widetilde{a}\vee\widetilde{b}$) фронтами. После подстановки значений $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$; $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ и выполнения дизъюнкции $\vee$ НЛ (23) над интервалами получим окончательно выходной процесс автомата с входными процессами (46)

$$y(t)=1([a_1,a_2],[a_1\vee b_1,a_2\vee b_2])=$$
$$=\left\{\begin{matrix}\Theta(a_1,a_2)1(a_2,a_1\vee b_1)\Theta(a_1\vee b_1,a_2\vee b_2), & a_2\le a_1\vee b_1\\ \Theta(a_1,a_2\vee b_2)=\Theta(a_1,a_2)1(a_2,a_2)\Theta(a_2,a_2\vee b_2), & a_2>a_1\vee b_1\end{matrix}\right| ,$$

или, объединяя два выражения с помощью дизъюнкции $\vee$ НЛ (1)

$$y(t)=\Theta(a_1,a_2)1(a_2,a_2\vee b_1)\Theta(a_2\vee b_1,a_2\vee b_2)\,. \quad (47)$$

Выражения вида (47) получаются при расчетах динамики в условиях неопределенности и более сложных автоматов, чем рассмотренный [20].

3. Дискретная оптимизация. Пусть надо распределить 3 кандидатов по 3 должностям так, чтобы все должности были заняты, все кандидаты трудоустроены, а суммарная эффективность была максимальной. При этом значения a_{ij} эффективности кандидатов i в должностях j $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$ известна лишь с точностью до интервала возможных значений: $\widetilde{a}_{ij}=[a_{ij1},a_{ij2}]$. Детерминированный вариант этой задачи с точно известными эффективностями a_{ij} рассмотрен в [11, 14, 18, 21]. Сейчас используем аналогичный подход. Каждому распределению должностей соответствует своя распределяющая сумма элементов матрицы эффективности $\widetilde{A}=\left\|\widetilde{a}_{ij}\right\|$, включающая ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца $\widetilde{A}$. Поэтому задача сводится к отысканию максимальной распределяющей суммы $\widetilde{A}^0$ элементов матрицы $\widetilde{A}$. Общее выражение этой суммы при помощи операций интервальной НЛ, дающее алгоритм полного перебора для отыскания $\widetilde{A}^0$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^0=(\widetilde{a}_{11}+\widetilde{a}_{22}+\widetilde{a}_{33})\vee(\widetilde{a}_{11}+\widetilde{a}_{23}+\widetilde{a}_{32})\vee\\ \vee(\widetilde{a}_{12}+\widetilde{a}_{21}+\widetilde{a}_{33})\vee(\widetilde{a}_{12}+\widetilde{a}_{23}+\widetilde{a}_{31})\vee\\ \vee(\widetilde{a}_{13}+\widetilde{a}_{21}+\widetilde{a}_{32})\vee(\widetilde{a}_{13}+\widetilde{a}_{22}+\widetilde{a}_{31}).\end{aligned} \quad (48)$$

Согласно алгоритму (48), для решения задачи надо: 1) вычислить все скобки в (48), используя правило сложения интервалов $[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=$ $=[a_1+b_1,a_2+b_2]$ [22]; 2) выделить максимальную скобку, считая определением большего (меньшего) из двух интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ такую эквивалентность [23] $(\widetilde{a}\ge\widetilde{b})\Leftrightarrow(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a},\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b})$, где $\vee$ и $\wedge$ – дизъюнкция и конъюнкция (21) интервальной НЛ; при этом, согласно теореме 3, правило сравнения интервалов оказывается таким [23]

$$\begin{aligned}&(\widetilde{a}=[a_1,a_2]\ge\widetilde{b}=[b_1,b_2])\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow(a_1\ge b_1,a_2\ge b_2).\end{aligned} \quad (49)$$

Выделенная максимальная скобка в (48) и определит оптимальное распределение должностей между кандидатами. Например, если $(\widetilde{a}_{11}+\widetilde{a}_{23}+\widetilde{a}_{32})=\max$, то оптимально такое распределение: кандидат 1 занимает должность 1, кандидат 2 – должность 3, а кандидат 3 – должность 2.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный вариант построения непрерывной логики (НЛ) с неопределенными (неточно заданными) параметрами – интервальная НЛ – позволяет выполнять все традиционные логические операции над переменными, известными лишь с точностью до интервалов возможных значений. Это открывает возможность изучения с помощью логических методов более широкого, чем прежде, класса систем – неопределенных (с интервальными параметрами), внося в это изучение свойственные таким методам преимущества. Эти преимущества – конструктивность, т. е. взаимно-однозначное соответствие между логическими выражениями и реализующими их алгоритмами или схемами; обозримость, т. е. возможность осмысленного представления с помощью логических выражений систем высокой размерности; формализуемость, т. е. возможность полностью формализованного анализа и синтеза изучаемых прикладных систем с помощью подходящих эквивалентных логических преобразований (законов). Вместе с тем, не все достоинства логических методов сохраняются в полной мере и в интервальной

НЛ. Это вызвано тем, что часть законов интервальной НЛ, в отличие от традиционных логик, вообще не являются эквивалентными логическими преобразованиями, а носят лишь оценочный характер [законы (32)–(37), (40), (41)], а часть законов, являющихся такими преобразованиями, существенно усложняются [законы (38), (39)]. Такое уменьшение возможностей логических методов при переходе к интервальной НЛ следует рассматривать как неизбежную плату за получаемую возможность изучения с помощью логических методов систем в условиях неопределенности, когда параметры системы известны лишь с точностью до интервалов возможных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мак-Нотон Р.* Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // Кибернетический сб. Вып. 3. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 59-78.
2. *Schaefer D.H.* A rectifier algebra // Trans. American Inst. Electrical Eng. 1955. V. 73. № 1. P. 679-682.
3. *Гинзбург С.А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968. 136 с.
4. *Иванов Л.Л.* Начала аналитической теории разрывных функций и расчет нелинейных цепей // Электричество. 1960. № 9. С. 23-29.
5. *Гинзбург С.А.* Непрерывная логика и ее применения // Автоматика и телемеханика. 1967. № 2. С. 115-132.
6. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 218 с.
7. *Гинзбург С.А., Любарский Ю.Я.* Функциональные преобразователи с аналогово-цифровым представлением информации. М.: Энергия, 1973. 120 с.
8. *Левин В.И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига: Зинатне, 1975. 376 с.
9. *Левин В.И.* Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980. 226 с.
10. *Коффман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 350 с.
11. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982. 176 с.
12. *Левин В.И.* Логическая теория надежности сложных систем. М.: Энергоатомиздат, 1985. 132 с.
13. *Золотова Т.М., Кербников Ф.И., Розенблат М.А.* Резервирование аналоговых устройств автоматики. М.: Энергоатомиздат, 1986. 155 с.
14. *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем. М.: Наука, 1987. 304 с.
15. *Беркович Е.И.* Непрерывнозначная логика в задачах микроэлектроники // Опыт, результаты, проблемы. Повышение конкурентоспособности радиоэлектронной аппаратуры. Таллинн: Валгус, 1988. С. 165-201.
16. *Волгин Л.И.* Синтез устройств для обработки и преобразования информации в элементном базисе реляторов. Таллинн: Валгус, 1989. 220 с.
17. *Шимбирев П.Н.* Гибридные непрерывно-логические устройства. М.: Энергоатомиздат, 1990. 125 с.
18. *Волгин Л.И., Левин В.И.* Непрерывная логика: Теория и применения. Таллинн: АН Эстонии, 1990. 210 с.
19. *Левин В.И.* Математические основы динамической диагностики цифровых схем. Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1994. 85 с.
20. *Левин В.И.* Теория динамических автоматов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. 408 с.
21. *Левин В.И.* Методы непрерывной логики в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2.
22. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
23. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-107.

Поступила в редакцию 19 февраля 2002 г.