6. V. F. Molchanov. Canonical representations on Lobachevsky spaces: an interaction with an overalgebra. Acta Appl. Math. 2007, vol. 99, 321–337.

V. F. Molchanov. Canonical representations for hyperboloids: an interaction with an overalgebra. For canonical representations on hyperboloids, an interaction of Poisson transforms with an overalgebra is determined explicitly (the overalgebra is the Lie algebra of $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$).
Keywords: hyperboloids, overgroups, canonical representations, Poisson and Fourier transforms.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Конечномерный анализ на однополостном гиперболоиде [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова

Ключевые слова: гиперболоид, тензорные произведения, преобразования Пуассона и Фурье, формула Планшереля.

Тензорное произведение двух неприводимых конечномерных представлений группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ реализуется как представление группы G в функциях на однополостном гиперболоиде в $\mathbb{R}^3$. Дается разложение этого представления в терминах гиперболоида.

В построении [2] полиномиального квантования на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$ существенную роль играл конечномерный анализ на этом гиперболоиде, то есть разложение на неприводимые составляющие представлений группы G сдвигами в многочленах на $\mathcal{X}$. Эти представления могут быть рассматриваемы как конечномерный аналог канонических представлений. Такие представления появляются, когда мы умножаем тензорно неприводимые конечномерные представления π_l группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ на их контраградиентные представления $\widehat{\pi}_l$. В настоящей работе мы хотим изучить в таком же духе тензорные произведения $\pi_l \otimes \widehat{\pi}_m$, $l \neq m$.

Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

Всякое конечномерное неприводимое представление π_l группы G задается числом l (*старшим весом*), таким, что $2l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Оно действует в пространстве V_l многочленов от t степени $\leqslant 2l$ (так что $\dim V_l = 2l + 1$) по формуле

$$(\pi_l(g)f)(t) = f(\widetilde{t})(\beta t + \delta)^{2l}, \quad \widetilde{t} = t \cdot g = \frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}, \tag{1}$$

Меняя в (1) α с δ и β с γ, мы получим контраградиентное представление $\widehat{\pi}_l$ (оно эквивалентно π_l):

$$(\widehat{\pi}_l(g)f)(t) = f(\widehat{t})(\gamma t + \alpha)^{2l},$$

где

$$\widehat{t} = t \cdot \widehat{g} = \frac{\delta t + \beta}{\gamma t + \alpha}, \quad \widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X со следом 0. Базис в ней состоит из матриц:

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для базисных элементов из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\pi_l(L_1) = -\widehat{\pi}_l(L_1) = t\,\frac{d}{dt} - l,$$
$$\pi_l(L_+) = \widehat{\pi}_l(L_-) = -t^2\,\frac{d}{dt} + 2lt,$$
$$\pi_l(L_-) = \widehat{\pi}_l(L_+) = \frac{d}{dt}.$$

Одночлены 1 и t^{2l} являются соответственно минимальным и максимальным векторами относительно представления π_l, т. е. аннулируются соответственно элементами L_- и L_+, относительно представления $\widehat{\pi}_l$ таковыми являются одночлены t^{2l} и 1.

Представление π_l сохраняет следующую невырожденную билинейную форму B_l на V_l: на базисных элементах она задается формулой (δ_{ij} – дельта Кронекера):

$$B_l(t^m, t^p) = (-1)^m \binom{2l}{m}^{-1} \delta_{m,2l-p}\,.$$

Пусть $2l, 2m \in \mathbb{N}$. Предположим, что число $r = m - l$ – целое. Для определенности возьмем $l \leqslant m$, так что $r \in \mathbb{N}$. Пространство $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(\xi, \eta)$ от двух переменных ξ, η степени $\leqslant 2l$ по ξ и степени $\leqslant 2m$ по η. Представление $R_{lm} = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_m$ группы G действует в W_{lm} по формуле

$$(R_l(g)f)(\xi, \eta) = f(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})(\beta\xi + \delta)^{2l}(\gamma\eta + \alpha)^{2m}.$$

Представление R_{lm} и пространство W_{lm} разлагаются в прямые суммы

$$\begin{aligned} R_{lm} &= \pi_{m-l} + \pi_{m-l+1} + \ldots + \pi_{m+l}, \\ W_{lm} &= W^{(lm)}_{m-l} + W^{(lm)}_{m-l+1} + \ldots + W^{(lm)}_{m+l}, \end{aligned}$$

π_k действует в $W_k^{(lm)}$, $k = m-l, \ldots, m+l$. Минимальный и максимальный векторы в W_k^{lm} – это многочлены (мы не указываем зависимость от l, m)

$$u_k = N^{m+l-k}\,\eta^{k+m-l}, \quad v_k = N^{m+l-k}\,\xi^{k-m+l}, \quad N = 1 - \xi\eta.$$

Билинейная форма $B_{lm} = B_l \otimes B_m$ на W_{lm} инвариантна относительно R_{lm}, подпространства $W_k^{(lm)}$ ортогональны относительно нее. Обозначим

$$B_{lm}(u_k, v_k) = \lambda(l, m; k).$$

Вычисление дает

$$\lambda(l,m;k) = \frac{(k-m+l)!\,(k+m-l)!\,(m+l-k)!\,(m+l+k+1)!}{(2l)!\,(2m)!\,(2k+1)!}.$$

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает гиперболоид $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Реализуем его как множество матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

с определителем равным нулю. Группа G действует $x \mapsto g^{-1}xg$ на нем транзитивно. Стационарная подгруппа точки $x^0 = (0,0,1)$ – подгруппа H диагональных матриц $h = \mathrm{diag}(\delta^{-1}, \delta)$. Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Действие группы G в этих координатах разделяется: если x имеет координаты ξ, η, то $g^{-1}xg$ имеет координаты $\widetilde{\xi}$, $\widehat{\eta}$. Базисная точка x^0 имеет координаты $\xi = 0$, $\eta = 0$. Элемент $g \in G$ переводит x^0 в точку с координатами $\xi = \gamma/\delta$, $\eta = \beta/\alpha$, так что $N = (\alpha\delta)^{-1}$. В частности, таковым является элемент

$$g_x = \begin{pmatrix} 1/N & \eta/N \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Отображение

$$f \mapsto F = N^{-2m} f, \quad f \in W_{lm}, \tag{4}$$

переводит W_{lm} в пространство M_{lm} некоторых рациональных функций F от ξ, η. В силу (2) и (3) эти рациональные функции являются *многочленами* от x_1, x_2, x_3 на $\mathcal{X}$. В частности, функции $f = 1$ отвечает многочлен

$$A(x) = \left(\frac{x_3 + 1}{2}\right)^{2m}.$$

Отображение (4) сплетает R_{lm} и представление U_r группы G, индуцированное характером $h \mapsto \delta^{-2r}$ подгруппы H. В орисферических координатах представление U_r есть

$$(U_r(g)F)(\xi, \eta) = F\left(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}\right)(\beta\xi + \delta)^{-2r}.$$

Обозначим через $M_k^{(lm)}$ образ подпространства $W_k^{(lm)}$ при отображении (4).

Возьмем в пространстве V_k одночлен $\theta_{k,r}(t) = t^{k-r}$. В представлении π_k он является собственным вектором для $h \in H$ с собственным числом δ^{2r}. Он порождает ядро, назовем его ядром Пуассона:

$$\begin{aligned} P_{k,r}(x;t) &= \left(\pi_k(g_x^{-1})\,\theta_{k,r}\right)(t) \\ &= (t-\xi)^{k-r}\left\{(1-\eta t)/N\right\}^{k+r}. \end{aligned}$$

Ядро $P_{k,r}$ определяет преобразование Пуассона

$$(\mathcal{P}_{k,r}\varphi)(x) = (\mathcal{P}_{k,r}\varphi)(\xi,\eta) = B_k(P_{k,r}(x,\cdot),\,\varphi).$$

Это преобразование отображает V_k на $M_k^{(lm)}$ и сплетает π_k и U_r. Базис t^s в V_k переходит при отображении $\mathcal{P}_{k,r}$ и умножении на $(-1)^{k-r}$ в базис

$$F_{k,s}(x) = N^{-k-r}\binom{2k}{s}^{-1}\sum\binom{k+r}{j}\binom{k-r}{s-j}\xi^{s-j}\,\eta^{k+r-j}.$$

Минимальный и максимальный векторы

$$F_{k,0}(x) = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^{k+r}, \quad F_{k,2k}(x) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k-r}\left(\frac{x_3+1}{2}\right)^{2r}$$

отвечают u_k, v_k при отображении (4). Базисный вектор $\Psi_k = F_{k,k+r}$ зависит только от x_3, он выражается через многочлены Якоби [1] 10.8:

$$\Psi_k(x) = \binom{2k}{k+r}^{-1}\left(\frac{x_3+1}{2}\right)^{2r} P_{k-r}^{(0,2r)}(x_3).$$

Мы имеем разложение:

$$A = \sum_{k=m-l}^{m+l}\lambda(l,m;k)^{-1}\Psi_k.$$

Эту формулу можно рассматривать как аналог разложения дельта-функции по сферическим функциям (аналог формулы Планшереля).

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

2. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского унив. Серия: Ест. техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.

V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis on a hyperboloid of one sheet. The tensor product of two irreducible finite dimensional representations of the group $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ is realized as a representation of G on functions on the hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$. A decomposition of this representation is given in terms of the hyperboloid.
Keywords: hyperboloid, tensor products, Poisson and Fourier transforms, Plancherel formula.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Инварианты аффинной группы в пространстве многочленов [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок

Ключевые слова: аффинная группа прямой, орбиты, инварианты, результант.

Дано описание инвариантов группы $x \mapsto \alpha x + \beta$, действующей сопряжениями в пространстве многочленов.

В настоящей работе мы даем описание инвариантов аффинной группы прямой, действующей сопряжениями в пространстве многочленов: мы пишем различные формулы для инвариантов этого действия в терминах коэффициентов многочлена и в терминах корней его производных. Наши результаты дают простые и прозрачные доказательства формул, полученных в [1], [2].

Пусть V_n – пространство многочленов $f(x)$ степени $\leqslant n$ над полем $\mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

переменная x пробегает $\mathbb{R}$. Оно имеет размерность $n+1$. Пусть G – группа аффинных преобразований φ прямой $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \varphi(x) = \alpha x + \beta,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Она действует в пространстве V_n сопряжениями:

$$T(\varphi) f = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.