УДК 517.925

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А. В. Щербакова

Shcherbakova A.V. Conditions for the existence of a non-zero periodical solution to the nonlinear system of differential equations of second order. The article investigates the existence of a non-zero periodical solution to the system of differential equations with a nonlinear first approximation. A theorem is proved that contains adequate conditions for the existence of a periodical solution.

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений второго порядка, укороченная система которой не является линейной и не содержит линейных членов. Ставится задача – определить условия существования ненулевого периодического решения такой системы. Аналогичная задача рассматривалась в работах [1–3] в предположении, что укороченная система является линейной.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot y &= P_n(x,y,\lambda) + f_1(x,y,\lambda), \\ \dot x &= Q_n(x,y,\lambda) + f_2(x,y,\lambda), \end{aligned} \tag{1}$$

в которой $P_n(x,y,\lambda)$ и $Q_n(x,y,\lambda)$ – однородные многочлены степени n относительно x, y, λ – параметр, $f_1(x,y,\lambda)$, $f_2(x,y,\lambda)$ – члены более высокого порядка, чем n, относительно x, y, $n \geqslant 1$ – натуральное число.

Пусть

$$\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ &D(\delta_0) = \{(x,y,\lambda) : 0 \leqslant \rho \leqslant \delta_0, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0\}, \\ &\Lambda(\delta_0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0\}, \\ &W(\delta_0) = \{r : 0 \leqslant r \leqslant \delta_0\}, \\ &V(\delta_0) = \{\rho : 0 \leqslant \rho \leqslant \delta_0\}, \end{aligned}$$

$\delta_0 > 0$ – некоторое число, λ_0 – значение параметра λ.

Далее всюду будем предполагать, что на множестве $D(\delta_0)$ функции $P_n(x,y,\lambda)$, $Q_n(x,y,\lambda)$, $f_1(x,y,\lambda)$, $f_2(x,y,\lambda)$ непрерывны по совокупности переменных, $f_1(0,0,\lambda) \equiv f_2(0,0,\lambda) \equiv 0$, система (1) обладает свойством единственности решения.

Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, систему (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot\rho &= \rho^n(\alpha(\varphi,\lambda) + \alpha_1(\varphi,\rho,\lambda)), \\ \dot\varphi &= \rho^{n-1}(\beta(\varphi,\lambda) + \beta_1(\varphi,\rho,\lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

в котором

$$\alpha(\varphi,\lambda) = P_n(\cos\varphi,\sin\varphi,\lambda)\sin\varphi + {} \\ + Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi,\lambda)\cos\varphi,$$

$$\beta(\varphi,\lambda) = P_n(\cos\varphi,\sin\varphi,\lambda)\cos\varphi - {} \\ - Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi,\lambda)\sin\varphi,$$

$\alpha_1(\varphi,\rho,\lambda) \to 0$, $\beta_1(\varphi,\rho,\lambda) \to 0$ при $\rho \to 0$ равномерно относительно φ, λ и $\alpha_1(\varphi,0,\lambda) \equiv \beta_1(\varphi,0,\lambda) \equiv 0$ на множестве $[0,2\pi]\times\Lambda(\delta_0)$.

Далее будем также предполагать, что при любых $\varphi \in [0,2\pi]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $\beta(\varphi,\lambda) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $\beta(\varphi,\lambda)$ на множестве $[0,2\pi]\times\Lambda(\delta_0)$ существует число $m > 0$, такое, что при любых $(\varphi,\lambda) \in [0,2\pi]\times\Lambda(\delta_0)$ выполнено неравенство $|\beta(\varphi,\lambda)| \geqslant m$.

Выберем $\delta_1 \in (0,\delta_0]$ таким образом, чтобы на множестве $[0,2\pi]\times D(\delta_1)$ выполнялось неравенство $|\beta_1(\varphi,\rho,\lambda)| \leqslant \frac{m}{2}$. Следовательно, на множестве $[0,2\pi]\times D(\delta_1)$ систему (2) можно заменить уравнением

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho\frac{\alpha(\varphi,\lambda) + \alpha_1(\varphi,\rho,\lambda)}{\beta(\varphi,\lambda) + \beta_1(\varphi,\rho,\lambda)}. \tag{3}$$

Заметим, что на множестве $[0,2\pi]\times D(\delta_1)$ $\left|\frac{\beta_1(\varphi,\rho,\lambda)}{\beta(\varphi,\lambda)}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда, положив $\frac{\alpha(\varphi,\lambda)}{\beta(\varphi,\lambda)} = a(\varphi,\lambda)$, уравнение (3) можно записать так

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho[a(\varphi,\lambda) + f(\varphi,\rho,\lambda)], \tag{4}$$

$f(\varphi,0,\lambda) = 0$, $f(\varphi,\rho,\lambda) \to 0$ при $\rho \to 0$ равномерно относительно φ, λ на множестве $[0,2\pi]\times\Lambda(\delta_1)$.

Таким образом, в приведенных выше предположениях проблема существования ненулевого периодического решения системы (1) свелась к проблеме существования ненулевого 2π-периодического решения уравнения (4).

Символом $\rho(0,r,\lambda)$ обозначим решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $\rho(0,r,\lambda)=r$.

Очевидно, что при любом $\lambda\in\Lambda(\delta_1)$ $\rho\equiv 0$ является решением уравнения (4).

Одновременно с уравнением (4) рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho[a(\varphi,\lambda)+f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)]. \qquad (5)$$

Т е о р е м а 1. Решение $\rho(\cdot,r_0,\lambda_0)$ уравнения (4), определенное на сегменте $[0,2\pi]$, тогда и только тогда является 2π-периодическим решением этого уравнения, когда $r=r_0$ является корнем уравнения

$$\{\exp\int\limits_0^{2\pi}[a(\varphi,\lambda_0)+ + f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda_0),\lambda_0)]d\varphi-1\}r=0. \qquad (6)$$

Теорема непосредственно следует из общего решения уравнения (5).

Т е о р е м а 2. Пусть

1) число λ_0 таково, что выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi}a(\varphi,\lambda_0)d\varphi=0$;

2) на множестве $\Lambda(\delta_1)$ выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi}a(\varphi,\lambda)d\varphi=\psi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^s+o(|\bar\lambda|)$, $\bar\lambda = (\lambda-\lambda_0)^s$, $\lim\limits_{\bar\lambda\to 0}o(|\bar\lambda|)/|\bar\lambda|=0$, функция $\lambda\to\psi(\lambda)$ непрерывна, $\psi(\lambda_0)\neq 0$;

3) число $s>0$ удовлетворяет равенству $(-\gamma)^s=-\gamma^s,\gamma>0$ – некоторое число.

Тогда существует число $\delta_2\in(0,\delta_1]$ такое, что для любого числа $r\in W(\delta_2)$ существует число $\lambda\in\Lambda(\delta_2)$, при котором $\rho(\cdot,r,\lambda)$ является 2π-периодическим решением уравнения (4).

Доказательство. Пусть число $\delta^*\in(0,\delta_1]$ таково, что при любых $r\in W(\delta^*)$, $\lambda\in\Lambda(\delta^*)$ решение $\rho(\cdot,r,\lambda)$ уравнения (4) определено на сегменте $[0,2\pi]$. Из равенства (6) следует, что теорема будет доказана, если будет установлено существование чисел $\delta_2\in(0,\delta^*]$, $\delta_3\in(0,\delta^*]$, при которых для любого числа $r\in W(\delta_2)$ существует число $\lambda\in\Lambda(\delta_3)$, удовлетворяющее равенству

$$\int\limits_0^{2\pi}[a(\varphi,\lambda_0)+f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)]d\varphi=0. \qquad (7)$$

Из условия 2) теоремы следует, что равенство (7) можно записать в виде

$$\psi(\lambda)\bar\lambda=-\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)d\varphi-o(|\bar\lambda|). \qquad (8)$$

Так как $\psi(\lambda_0)\neq 0$, то число $\delta_3\in(0,\delta^*]$ можно выбрать так, что при любом $\lambda\in\Lambda(\delta_3)\psi(\lambda_0)\neq 0$. Поэтому уравнение (8) можно записать так:

$$\bar\lambda=-\psi^{-1}(\lambda)(\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)d\varphi+o(|\bar\lambda|)).$$

Оператор A определим равенством

$$A\bar\lambda=-\psi^{-1}(\lambda)(\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)d\varphi+o(|\bar\lambda|)).$$

Заметим, что при $r\to 0$ $\rho(\varphi,r,\lambda)\to 0$, и следовательно, и $f(\varphi,\rho(\varphi,r,\lambda),\lambda)\to 0$ равномерно относительно φ,λ на множестве $[0,2\pi]\times\Lambda(\delta^*)$. Поэтому числа $\delta_2\in(0,\delta^*]$, $\delta_3\in(0,\delta^*]$ можно выбрать таким образом, что при любом фиксированном $r\in W(\delta_2)$ оператор A непрерывен на множестве $\{\bar\lambda:|\bar\lambda|\leqslant\delta_3\}$ и для любого числа $\bar\lambda$ $(|\bar\lambda|\leqslant\delta_3)$ имеет место включение $A\bar\lambda\in\{\bar\lambda:|\bar\lambda|\leqslant\delta_3\}$. А это значит, что при любом фиксированном $r\in W(\delta_2)$ оператор A на множестве $\{\bar\lambda:|\bar\lambda|\leqslant\delta_3\}$ имеет неподвижную точку. Фиксируем $r^*\in W(\delta_2), r^*>0$. Пусть неподвижной точкой оператора является $\bar\lambda^*(\bar\lambda^*\leqslant\delta_3)$. Тогда ненулевым 2π-периодическим решением уравнения (4) является $\rho(\cdot,r^*,\lambda^*)$, где $\lambda^*=\lambda_0+\bar\lambda^{*\frac{1}{s}}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кубышкин Е.П.* Бифуркация периодических решений в критическом случае двух пар чисто мнимых корней при наличии старших резонансов// Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. №10. С. 1693-1697.

2. *Stephen L. Hoyle.* Hopf bifurcation for ordinary differential equations with a zero eigenvalue// J. of math analisis and applications. 1980. V. 74. P. 212-232.

3. *Hansjorg Kielhofer.* Holp bifurcation at multiple eigenvalues// Arch. Ration. Mech. and Anal. 1979. V. 69. №1. P. 53-83.

Поступила в редакцию 9 июня 2004 г.