УДК 517.954

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА НА ГРАФЕ

© Е.В. Петрова

*Ключевые слова:* задача Неймана на графе; обобщенное решение; теорема единственности.

Осуществлено расширение понятия классического решения на пути перехода к обобщенному решению, принадлежащему к классу функций, интегрируемых с квадратом. Получены условия на функции, определяющие краевые условия, гарантирующие единственность обобщенного решения задачи Неймана для волнового уравнения на графе-звезде. Эти же условия гарантируют единственность обобщенного решения более общих краевых задач.

В настоящей работе расширяется понятие классического решения задачи Неймана для волнового уравнения на геометрическом графе с сохранением теоремы единственности. В конце 1990-х годов открылась возможность более широкого взгляда на понятие обобщенных решений краевых задач – решения, являющиеся функциями класса $\hat{L}_2$ и не имеющие обобщенных производных. Класс функций $\hat{L}_2(Q)$ введен Л.Н. Знаменской [1] для краевых задач, заданных на классическом прямоугольнике $Q = \{[0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]\}$, и он несколько уже обычного класса $L_2$, поскольку на функции класса $\hat{L}_2$ накладываются дополнительные условия: их сужения при фиксированном $x$ или $t$ также принадлежат классу $L_2$. Результаты данной работы связаны с пространством $\hat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$, $Q_{\Gamma,T} = \{(x,t): x \in \Gamma \setminus \partial\Gamma,\ t \in 0,T,\ \Gamma$–граф–звезда (определение введено ниже). Получены условия на функции краевых условий, гарантирующие единственность обобщенного решения класса $\hat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$ задачи Неймана для волнового уравнения на графе-звезде.

Пусть $\Gamma$ – граф-звезда, состоящий из $m$ одинаковых ребер $\gamma_k$ и одного внутреннего узла $\xi$. При этом ребра $\gamma_k$ $(k = \overline{1, m-1})$ параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах «к узлу $\xi$»), ребро $\gamma_m$ – отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре – «от узла $\xi$»). И пусть $R(\Gamma)$ – несвязное формальное объединение ребер графа – замкнутых отрезков (здесь и ниже используются понятия и обозначения монографий [1] и [2]).

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на $\Gamma$ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно-непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле по разным ребрам могут быть различными), $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$. Сужение функции $f(x)$ на ребро $\gamma$ графа обозначим через $f(x)_\gamma$.

Введем следующие пространства функций:

$H[0,T] = \{h(t) \in C^2[0,T]: h(T) = h'(T) = 0, T < \infty\}$,
$F(\Gamma) = \{f(x) \in C^2[\Gamma]: f(0)_{\gamma_k} = f(\pi)_{\gamma_m} = 0, k = \overline{1,m-1}$;

пространства, сопряженные к $H[0,T]$, $F(\Gamma)$, обозначим соответственно $H'[0,T]$, $F'(\Gamma)$. Для обобщенных функций из $H'[0,T]$ и $F'(\Gamma)$ введем понятие первообразной.

**Определение 1.** Функция $g^*(t) \in L_2[0,T]$ такая, что $g^*(t)$ непрерывна в нуле и $g^*(0) = 0$, называется первообразной обобщенной функции $g(t) \in H'[0,T]$, если выполняется равенство:

$$(g^*, h') = -\langle g, h \rangle, \forall\, h(t) \in H[0,T]$$

(здесь $(g^*, h') = \int\limits_0^T g^*(t)h'(t)dt$; символ $\langle g, h \rangle$ обозначает действие функционала $g$ на пробных функциях $h$ указанного класса).

Совокупность элементов $g$ пространства $H'[0,T]$, для которых существуют первообразные $g^*$, обозначим через $(H')^*[0,T]$.

**Определение 2.** Функция $g^*(x) \in L_2(\Gamma)$ такая, что $g^*(x)$ непрерывна в каждой точке $\pi/2 \in \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$ и $g^*(\pi/2) = 0$, называется первообразной обобщенной функции $g \in F'(\Gamma)$, если выполняется равенство:

$$(g^*, f') = -\langle g, f \rangle, \forall f(x) \in F(\Gamma)$$

(здесь

$$(g^*, f') = \int\limits_\Gamma g^*(x)f'(x)dx =$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_0^{\pi/2} g^*(x)_{\gamma_k} f'(x)_{\gamma_k} dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} g^*(x)_{\gamma_m} f'(x)_{\gamma_m} dx$$

; символ $\langle g, f \rangle$, как и выше, обозначает действие функционала $g$ на пробных функциях $f$).

Совокупность элементов $g$ пространства $F'(\Gamma)$, для которых существуют первообразные $g^*$, обозначим через $(F')^*(\Gamma)$.

Колебания на каждом из ребер графа $\Gamma$ при произвольном значении времени $t$ описываются уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} \qquad (1)$$

внутри каждого ребра $\gamma_k$ $(k=\overline{1,m})$, $t\in(0,T)$ и соотношениями в узле $\xi$ (условия непрерывности и гладкости)

$$\Omega\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_k} = \Omega\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_m}, \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x}\Omega\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\Omega\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_m}, k=\overline{1,m-1}, t\in(0,T). \qquad (2)$$

К соотношениям (1), (2) добавляются начальные условия при $x\in\Gamma$, $t=0$:

$$\Omega(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)=\psi(x), \qquad (3)$$

и граничные условия в граничных узлах графа (условия Неймана):

$$\frac{\partial}{\partial x}\Omega(0,t)_{\gamma_k}=\mu_k(t), k=\overline{1,m-1}, \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m} = \\ = \nu(t), t\in[0,T]; \qquad (4)$$

$\varphi(x),\psi(x),\mu_k(t),\nu(t)$ – заданные функции.

Обозначим через $Q_{\Gamma,T}$ и $Q_{R(\Gamma),T}$ области вида

$$Q_{\Gamma,T}=\{(x,t): x\in\Gamma\backslash\partial\Gamma, t\in(0,T)\}, \\ Q_{R(\Gamma),T}\{(x,t): x\in R(\Gamma), t\in[0,T]\}.$$

Совокупность функций $\eta(x,t)$, два раза непрерывно дифференцируемых вплоть до границ области $Q_{R(\Gamma),T}$, обозначим через $C^2\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$, $C^2_\xi\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$ – множество функций $\eta(x,t)\in C^2\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$, удовлетворяющих соотношениям (2) в узле $\xi$ графа.

Пусть $L_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$ – пространство измеримых на $Q_{\Gamma,T}$ функций, суммируемых с квадратом. Все дальнейшие рассуждения проводятся для функций из пространства $\hat{L}_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$: функция $\eta(x,t)$ принадлежит пространству $\hat{L}_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$, если она принадлежит пространству $L_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$, а также пространству $L_2(\Gamma)$ при любом $t\in[0,T]$ и пространству $L_2[0,T]$ при любом $x\in\Gamma$.

Обозначим через $\hat{L}_{2,\xi}\left(Q_{\Gamma,T}\right)$ множество функций $\eta(x,t)\in\hat{L}_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$, удовлетворяющих соотношениям (2) в узле $\xi$ графа $\Gamma$, причем первое соотношение (2) выполняется в смысле равенства элементов $L_2[0,T]$, второе соотношение (2) – в смысле равенства элементов $(H')^*[0,T]$. Очевидно, $\hat{L}_{2,\xi}\left(Q_{\Gamma,T}\right)\subset\hat{L}_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$.

Если $\Omega(x,t)\in C^2_\xi\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$ – решение краевой задачи (1)–(4), то для любой функции $\omega(x,t)\in C^2_\xi\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$ справедливо равенство

$$\iint_{Q_{\Gamma,T}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)\right)\omega(x,t)dxdt=0.$$

Вычислим интеграл в этом соотношении два раза по частям:

$$\iint_{Q_{\Gamma,T}}\Omega(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right)dxdt+ \\ +\int_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,T)\omega(x,T)-\Omega(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,T)\right)dx- \\ -\int_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)\omega(x,0)-\Omega(x,0)\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,0)\right)dx- \\ -a^2\int_0^T\left(\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}- \\ -\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(0,t)_{\gamma_k}\omega(0,t)_{\gamma_k}\end{array}\right)dt+ \\ +a^2\int_0^T\left(\begin{array}{c}\Omega(\pi,t)_{\gamma_m}\frac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}- \\ -\sum\limits_{k=1}^{m-1}\Omega(0,t)_{\gamma_k}\frac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k}\end{array}\right)dt=0 \qquad (5)$$

(здесь $\int_\Gamma p(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}p(x)_{\gamma_k}dx$). Потребуем от функции $\omega(x,t)$ выполнения следующих равенств

$$\omega(x,T)=0, \frac{\partial}{\partial t}\omega(x,T)=0, x\in\Gamma, \qquad (6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k}=0\ (k=\overline{1,m-1}), \frac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m}=0, \\ t\in[0,T]. \qquad (7)$$

Интегральное соотношение (5) будем использовать для определения обобщенного решения краевой задачи (1)–(4). Пусть выполняются следующие предположения, определяющие начальные и граничные условия (3), (4) краевой задачи:

$$\varphi(x)\in L_2(\Gamma), \psi(x)\in(F')^*(\Gamma), \mu_k,\nu\in(H')^*[0,T], \\ k=\overline{1,m-1}.$$

**Определение 3.** Обобщенным решением (решением из класса $\hat{L}_2\left(Q_{\Gamma,T}\right)$) краевой задачи (1)–(4) называется функция $\Omega(x,t)\in\hat{L}_{2,\xi}\left(Q_{\Gamma,T}\right)$, для которой равенство

$$\iint_{Q_{\Gamma,T}}\Omega(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)\right)dxdt+ \\ +\int_\Gamma\varphi(x)\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,0)dx-\langle\psi(\cdot)\omega(\cdot,0)\rangle- \\ -a^2\left(\langle\nu(\cdot)\omega(\pi,\cdot)_{\gamma_m}\rangle-\sum_{k=1}^{m-1}\langle\mu_k(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\omega(0,\cdot)_{\gamma_k}\rangle\right)=0.$$

верно для всех функций $\omega(x,t)\in C^2_\xi\left(Q_{R(\Gamma),T}\right)$ с условиями (6), (7) и для которой первое начальное условие

(3) выполняется в смысле равенства элементов $L_2(\Gamma)$, второе начальное условие (3) и граничные условия (4) – в смысле равенства элементов $(F')^*(\Gamma)$ и $(H')^*[0,T]$, соответственно.

Ниже представлено утверждение теоремы единственности обобщенного решения $\Omega(x,t) \in \hat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ краевой задачи (1)–(4). Единственность обобщенного решения краевой задачи (1)–(4) будем понимать в следующем смысле: если существуют два обобщенных решения краевой задачи (1)–(4), то их разность есть нулевой элемент пространства $\hat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$.

**Теорема.** *Обобщенное решение* $\Omega(x,t) \in \hat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$ *краевой задачи (1)–(4) единственно.*

Доказательство теоремы аналогично рассуждениям, изложенным в работе В.А. Ильина [3] (см. также [1, гл. 3, § 2]), и основано на описании спектральных характеристик задачи Штурма–Лиувилля [4], соответствующей краевой задаче (1)–(4).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. С. 176.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В. [и др.]. М.: Физматлит, 2004. С. 227.
3. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. Вып. 2 (92). С. 97-154.
4. *Провоторов В.В.* Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 10. С. 105-126.


Поступила в редакцию 29 декабря 2011 г.

Petrova E.V. UNIQUENESS OF DECISION OF NEUMANN PROBLEM ON GRAPH

Expansion of concept of the classical decision on a transition way to the generalized decision belonging to a class of functions, integrated with a quadrate is carried out. Conditions on the functions of the regional conditions guaranteeing uniqueness of the generalized decision of a problem of Neumann for the wave equation on the graph-star are received. The same conditions guarantee uniqueness of the generalized decision more the general regional problems.

*Key words*: Neumann’s problem on graph; generalized decision; uniqueness theorem.