УДК 517.977.5

НЕОБХОДИМОСТЬ УСЛОВИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© **Д.В. Хлопин**

Ключевые слова: оптимальное управление; задача на бесконечном промежутке; условие трансверсальности на бесконечности; необходимые условия оптимальности; устойчивость по Ляпунову; множители Лагранжа.

В работе обсуждаются необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке времени. Показано, что краевое условие для сопряженной переменной становится необходимым, если эта переменная частично устойчива по Ляпунову. Показано, что предложенная в [3] формула дополняет соотношения принципа максимума до полного множества необходимых для оптимальности условий в том случае, если входящий в формулу несобственный интеграл условно сходится и непрерывно зависит от начальной позиции.

Принцип максимума Понтрягина (ПМП) уже в монографии [1] был сформулирован и для задач управления на бесконечном промежутке, однако полученные соотношения не полны и выделяют, вообще говоря, слишком широкое семейство подозрительных на экстремум траекторий, и нужно наложить краевое условие на бесконечности. Предложено достаточно много вариантов таких условий [2–6]; однако как показано, например, в [2; 3, §6; 7; 8, Example 10.2], эти условия могут как оказаться несовместными с соотношениями ПМП, так и следовать из них. Отсюда приходится исследовать [2–9] применимость того или иного краевого условия, а его необходимость для каждой оптимизационной задачи проверять отдельно. Первая цель данного исследования — сформулировать общий подход для подбора необходимого в данной задаче краевого условия на бесконечности.

Но необходимость того или иного условия не означает его нетривиальность на решениях ПМП, поэтому хотелось бы подобрать условие, выделяющее для всякого оптимального управления одно решение соотношений ПМП. В работе [3] С.М. Асеевым и А.В. Кряжимским предложена формула для сопряженной переменной (по типу формулы Коши) с таким свойством. Вторая цель — максимально расширить область применения подхода [3].

В рамках данного исследования сначала создается бикомпактное расширение пространства допустимых управлений как обратный предел последовательности соответствующих компактификаций на конечном промежутке, так в обобщенной задаче достигается оптимальное решение. Следуя схеме [3, §7–9] и перейдя к управлениям Гамкрелидзе, для всякой исходной задачи на бесконечном промежутке строится такая последовательность конечных задач, что при должном выборе топологий решения соотношений ПМП и оптимальные управления сходятся на конечных промежутках к ним же, но уже исходной задачи. Тем самым показана необходимость ПМП в форме Кларка и в условиях более общих, чем в [3, 5, 8]; в сравнении с [9] требуется непрерывность правой части по u, но не нужна равномерная ограниченность сопряженной переменной.

Если во вспомогательных задачах необходимы были также некоторые краевые условия на сопряженную переменную ψ, то для их переноса в качестве необходимых условий в исходную задачу достаточно интегральной частичной устойчивости для сопряженной переменной ψ, как компоненты системы ПМП. Тем самым получены более общие, чем, например, в [8], предположения, гарантирующие необходимость условий на сопряженную переменную (в задаче со свободным правым концом это: $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$).

Далее, в случае гладкости (по фазовой переменной) правой части уравнения динамики и целевого функционала можно вместо интегральной частичной устойчивости проверять более простое условие — частичную устойчивость по Ляпунову переменной ψ (или $\psi(\cdot)A(\cdot)$) как компоненты решений системы ПМП.

Наложим краевое условие не на ψ, а на произведение $\psi(\cdot)A(\cdot)$ для некоторой матричнозначной функции $A(\cdot)$ (сюда вкладываются и краевые условия на поведение $\psi(\cdot)x(\cdot)$). Такое условие станет необходимым при устойчивости произведения $\psi(\cdot)A(\cdot)$, что можно обеспечить выбором A. При этом выбор A может учесть также априорную информацию об устойчивости и асимптотические оценки для ψ или ее компонент. Если теперь в качестве матрицы A взять матричную экспоненту вдоль оптимальной траектории, то из соответствующего краевого условия автоматически выписывается формула, полученная в [3, теоремы 11.1, 12.1] для задачи со свободным правым концом. Как показано в [3, §16], результаты [4, 8] следуют для этой задачи из [3, теорема 12.1].

Такой выбор матрицы A позволяет свести вопрос о необходимости соответствующего условия даже не к устойчивости произведения $\psi(\cdot)A(\cdot)$, а к проверке сходимости (по Риману) и непрерывной зависимости от начальной позиции исходной задачи используемого в формуле [3, (12.8)] несобственного интеграла. Это существенно ослабляет предположения [3,теорема 12.1]. Результаты работ [6, 9] (в части необходимых условий) также вкладываются, в т. ч. и для задач с фазовым ограничением на правый конец.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

2. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.

3. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В.А.Стеклова. 2007. Т. 257. С. 1–271.

4. *Aubin J.P., Clarke F.H.* Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. V. 17. P.567-586.

5. *Michel P.* On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. V. 50. P. 975–984.

6. *Smirnov G.V.* Transversality condition for infinite-horizon problems // J. Optim. Theory Appl. 1996. V. 88. № 3. P. 671-688.

7. *Seierstad A.* Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. №. 1. P. 201–230;

8. *Ye J.J.* Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems // J. Optim. Theory Appl. 1993. V. 76. P. 485–500.

9. *Sagara N.* Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems // Set-Valued Var. Anal. 2010. V. 18. № 1. P.1–28.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00436) и программой президиума РАН «Математическая теория управления».

Khlopin D.V. Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems and stability of shadow prices. This note discusses necessary conditions of an optimality for infinite-horizon optimal control problems. Assuming that the shadow prices is partially stable it is shown that a transversality condition for shadow prices is the necessary optimality conddition. We develop a version of the Pontryagin maximum principle providing a complete set of necessary optimality conditions. The dominating discount condition is not assumed.

Key words: optimal control; Infinite horizon; infinite horizon transversality condition; necessary conditions of optimality; Lyapunov stability; shadow prices.

Хлопин Дмитрий Валерьевич, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: khlopin@imm.uran.ru.

УДК 517.929

SOME PROBLEMS OF ON-TARGET CONTROL FOR A CLASS OF CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

© **A.L. Chadov, V.P. Maksimov**

Key words: abstract functional differential equations; hybrid systems; control problems.
For a functional differential system with continuous and discrete times, the problem of control with respect to an on-target vector-functional is considered. Conditions for the solvability of the problem are obtained.

We consider here a system of functional differential equations (FDE, FDS) that, formally speaking, is a concrete realization of the so-called abstract functional differential equation (AFDE). Theory of AFDE is thoroughly treated in [1, 2]. On the other hand, the system under consideration is a typical one met with in mathematical modeling economic dynamic processes and covers many kinds of dynamic models with aftereffect (integro-differential, delayed differential, differential difference, difference) and impulsive perturbations resulting in system's state jumps at prescribed time moments. The equations of the system contain simultaneously terms depending on continuous time, $t \in [0,T]$, and discrete, $t \in \{0, t_1, ..., t_\mu, T\}$, this is why the term «hybrid» seems to be suitable. As this term is deeply embedded in the literature in different senses, we will follow the authors employing the more definite name «continuous-discrete systems» (CDS), see, for instance [3, 4], and references therein. Notice that in [3] a detailed motivation for studying CDS and examples of applications can be found together with results on stabilization, observability and controllabality for a class of linear CDS with continuous-time dynamics described by ordinary differential equations.

The abstract functional differential system [1]

$$\delta x = \Theta x + f \tag{1}$$

is considered, where $x = col(y, z)$, $y : [0,T] \to R^n$, $z : \{0, t_1, ..., t_N, T\} \to R^\nu$, $\delta x = col(\dot{y}, \Delta z)$, $(\Delta z)(t_i) = z(t_i) - z(0), \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$; $\Theta_{11} : DS^n \to L^n$, $\Theta_{12} : M^\nu \to L^n$, $\Theta_{21} : DS^n \to M^\nu$, $\Theta_{22} : M^\nu \to M^\nu$ are linear operators. Given sets $I = \{0, t_1, ..., t_\mu, T\}, 0 < t_1 < ... < t_\mu < T$; $J = \{0, \tau_1, ..., \tau_m, T\}, 0 < \tau_1 < ... < \tau_m < T$, the spaces DS^n and M^ν are defined as follows. Let us denote the characteristic function of the set A by χ_A. DS^n (see [2]) is the space of functions $y : [0,T] \to R^n$ representable in the form $y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\,ds + \sum_1^m \chi_{[\tau_i,T]}(t)[y(\tau_i) - y(\tau_i - 0)]$; M^ν is the space of functions