О РАЗРЕШИМОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С ЛИНЕЙНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ [5]

© С.Е. Жуковский

В исследовании задач управления часто прибегают к замене управляющей системы соответствующим включением [1]. Если модель управляемого процесса линейная, то соответствующее включение будет порождаться многозначным отображением, имеющим линейные сечения. Изучению свойств таких отображений посвящена эта работа.

Пусть X, Y – банаховы пространства, 2^x – множество всех подмножеств множества X, $B(X,Y)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов $f : X \to Y$, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, $S_{(f,r)}$ – открытый шар в пространстве $B(X,Y)$ с центром в элементе f радиуса $r > 0$, $B_0 \subset B(X,Y)$, $B_0 \neq \emptyset$. Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \to 2^Y$, $Fx = \bigcup\limits_{f\in B_0} \{fx\}$, образовано линейными ограниченными операторами. Такое отображение назовем ограниченным, если существует $\sup\limits_{f\in B_0} \|f(x)\|$. Будем говорить, что отображение $G : X \to 2^Y$ имеет линейные ограниченные сечения, если существует такой оператор $g \in B(X,Y)$, что при всех $x \in X$ выполнено $gx \in Gx$.

Т е о р е м а 1. *Пусть многозначное отображение $F : X \to 2^Y$ образовано линейными ограниченными операторами. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) отображение F полунепрерывно сверху в точке $x = 0$;

б) отображение F непрерывно на X;

в) отображение F ограничено;

г) для любого $x \in X$ множество Fx ограничено в Y.

Рассмотрим включение

$$y \in Fx. \tag{2}$$

Если при каждом $y \in Y$ включение (2) разрешимо, то определим отображение $F^{-1} : Y \to 2^X$, ставящее в соответствие элементу y множество решений $F^{-1}y$ этого включения.

Наиболее "удобно" исследовать разрешимость включения (2) в случае, когда многозначное отображение $F : X \to 2^Y$ образовано линейными ограниченными операторами, и каждый из них обратим. Тогда при любом $y \in Y$ множество решений включения (2) представимо в виде $F^{-1}y = \bigcup\limits_{f\in B_0} \{f^{-1}y\}$. Из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что отображение $F^{-1} : Y \to 2^X$ также образовано линейными ограниченными операторами.

Пусть отображение $\Phi : X \to 2^X$ определено равенством $\Phi x = \bigcup\limits_{\varphi\in B_0} x - \varphi x$, где $B_0 \subset B(X,X)$. Если каждый из операторов φ имеет спектральный радиус $\rho(\varphi) < 1$, то $\Phi^{-1}y = \bigcup\limits_{\varphi\in B_0} \{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^k y\}$.

В более сложных случаях, когда нельзя гарантировать обратимости каждого линейного сечения, можно воспользоваться топологическими свойствами отображений.

Т е о р е м а 2. *Пусть отображение $\Phi : X \to 2^X$ имеет линейные ограниченные сечения. Пусть, далее, существует такой линейный вполне непрерывный оператор $\varphi_0 : X \to X$ и найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $\lambda \in (1, 1+\delta)$, $x \in X$ выполнено $x - \lambda\varphi_0 x \in \Phi x$. Тогда для любого $y \in X$ включение $y \in \Phi x$ разрешимо, многозначное отображение $\Phi^{-1} : X \to 2^X$ имеет линейные ограниченные сечения.*

С л е д с т в и е. *Если существует такой линейный вполне непрерывный оператор $\varphi_0 : X \to X$ и найдется такое число $\delta > 0$, что для любого оператора $f \in S_{(\varphi_0\delta)}$ при всех $x \in X$ выполнено $x - fx \in \Phi x$.*

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00140), Министерства Образования РФ (проект № Е02-1.0-212)

Тогда для любого $y \in X$ включение $y \in \Phi x$ разрешимо, многозначное отображение $\Phi^{-1} : X \to 2^X$ имеет линейные ограниченные сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. Серия 1: Математика и механика. 1959, № 2, 25–32.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© Т.В. Жуковская, С.Н. Никулин

Некоторые задачи управления, автоматического регулирования описываются дифференциальными уравнениями

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \tag{3}$$

в которых функция $f : [a, b] \times R \to R$ не удовлетворяет условиям Каратеодори[1]. К таким уравнениям не применима классическая теория. Наиболее "продуктивный"и общепризнанный метод изучения таких уравнений, основанный на построении соответствующего дифференциального включения, предложил А.Ф. Филиппов[2]. Однако, в некоторых случаях удается исследовать само уравнение, не прибегая к замене его включением.

Будем предполагать, что функция $f : [a, b] \times R \to R$ суммируема по первому аргументу, непрерывна справа по второму аргументу и существует такое $c \in (a, b)$, что при почти всех $t \in [c, b]$ функция $f(t, \cdot)$ не убывает, а при почти всех $t \in [a, c]$ функция $f(t, \cdot)$ не возрастает. Как доказано И.В. Шрагиным в [3], эти условия обеспечивают измеримость суперпозиции $f(\cdot, x(\cdot))$ для каждой непрерывной функции x.

Рассмотрим для уравнения (3) краевую задачу с условием

$$x(c) = \alpha. \tag{4}$$

Запишем ее в виде интегрального уравнения $x'(t) = f(t, \alpha + \int\limits_c^t x'(s)\, ds)$. Оператор $K : L_{[a,b]} \to L_{[a,b]}$, $(Ky)(t) = f(t, \alpha + \int\limits_c^t y(s)\, ds)$, является монотонным, улучшающим, вольтерровым на совокупности v множеств $e_\gamma = [c - \sigma(\gamma), c + \beta(\gamma)]$, где $\sigma(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ – любые неубывающие функции, для которых $\beta(\gamma) - \sigma(\gamma) = \gamma$. Это позволяет применить к исследованию задачи (3,4) утверждения об операторных неравенствах [4,5].

Т е о р е м а. *Если для некоторой функции $u \in D_{[a,b]}$ выполнено неравенство $u'(t) \geqslant f(t, u(t))$, $t \in [a, b]$, $u(c) \geqslant \alpha$, то*

- *существует такое $\delta > 0$ и существует определенное на $e_\delta = [c - \eta(\delta), c + \beta(\delta)]$ локальное решение x_δ задачи (3,4), для которого имеет место оценка $x'_\delta(t) \leqslant u'(t)$, $t \in e_\delta$;*
- *любое локальное решение x_γ задачи (3,4), для которого имеет место оценка $x'_\gamma(t) \leqslant u'(t)$, $t \in e_\gamma$, продолжаемо до решения x_ξ, определенного на таком интервале (ξ_1, ξ_2), что $\xi_1 = a \vee \int\limits_{\xi_1}^{c} |x'_\xi(s)|\, ds = \infty$, $\xi_2 = b \vee \int\limits_c^{\xi_2} |x'_\xi(s)|\, ds = \infty$, и удовлетворяющего неравенству $x'_\xi(t) \leqslant u'(t)$, $t \in (\xi_1, \xi_2)$;*