УДК 681.3

НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА И ПРОБЛЕМА ОБЪЕДИНЕНИЯ ОЦЕНОК ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОСТИ ОБЪЕКТОВ

© В.И. Левин

Levin V.I. Continuous logic and the problem of collating estimations of object preference. The problem of choosing the most preferable object was considered through collating different estimations of every object with further comparison of the collated estimations and choice of the object with the maximal (minimal) estimation. An approach was proposed to solving the problem by means of continuous logic.

1. ВВЕДЕНИЕ

Очень часто в задачах управления, в нейронных сетях, системах отображения информации, экспертных системах и в ряде других случаев возникает необходимость выбрать наиболее предпочтительный объект (управление, сигнал, ситуацию, решение и т. д.), исходя из оценок объектов, даваемых в условиях неопределенности некоторым числом независимых экспертов или регистрирующих приборов. Наличие фактора неопределенности обычно проявляется в следующем: 1) индивидуальные оценки отдельных экспертов (приборов) различаются между собой; 2) эти оценки размыты и даются в виде соответствующих нечетких подмножеств множества всех возможных альтернатив. При этом проблема получения объективной количественной оценки изучаемого объекта сводится к агрегированию (объединению) по некоторому разумному правилу имеющихся индивидуальных оценок этого объекта, сделанных различными экспертами (приборами), в единую коллективную оценку. В качестве правила агрегирования при наличии эффекта неопределенности 2) обычно принимают пересечение нечетких подмножеств, служащих индивидуальными оценками отдельных экспертов. Полученное в результате пересечения новое нечеткое подмножество и принимают за коллективную оценку объекта. Объект с наилучшим (максимальным или минимальным) значением коллективной оценки выбирается в качестве наиболее предпочтительного [1]. Данный подход может быть уточнен в тех или иных отношениях, однако, без изменения его сущности [2–4]. В частности, при этом сохраняются узость получаемых коллективных оценок объектов и их недостаточная надежность [5]. Возможный путь решения возникающих здесь проблем – переход от принципа пересечения индивидуальных экспертных оценок [1] к принципу конструирования «наиболее представительного эксперта», индивидуальная оценка которого принимается за искомую коллективную оценку объекта. При этом конструирование осуществляется с помощью некоторых новых операций над нечеткими множествами [5].

В случаях, когда фактор неопределенности проявляется только в эффекте 1), т. е. в различии между индивидуальными оценками одного и того же объекта у различных экспертов (приборов), а эффект 2) размытости оценок отсутствует, проблема заключается в том, что индивидуальные оценки объекта не всегда можно агрегировать в коллективную оценку, позволяющую упорядочить объекты по предпочтению (парадокс Эрроу) [6]. Возможны различные подходы к преодолению возникающей здесь принципиальной трудности, базирующиеся на эвристических соображениях, например, усреднении индивидуальных оценок [7]. Однако возможны и чисто математические подходы. Один из них излагается в настоящей статье. Он основан на прямом теоретико-множественном обобщении операций над вещественными числами на множества таких чисел. В частности, если операция сравнения чисел, с выбором их максимума или минимума, обобщается на множества чисел, представляющие собой коллективные оценки различных объектов, то получается операция сравнения этих множеств, с выбором «максимального» или «минимального» из них, или, что равносильно, операция сравнения оцениваемых этими множествами объектов и выбора наиболее предпочтительного объекта. Указанное теоретико-множественное обобщение операций над вещественными числами относится, как следует из изложенного, к дискретным множествам; однако осуществляется оно методически так же, как для непрерывных множеств, поскольку в обоих случаях обобщаются одни и те же операции: $\vee = \max$ и $\wedge = \min$, называемые соответственно дизъюнкцией и конъюнкцией непрерывной логики [8]. Таким образом, можно говорить о применении аппарата непрерывной логики для агрегирования индивидуальных оценок в коллективную.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим два объекта A и B, характеризуемых единственным параметром P. Пусть лучшим (более предпочтительным) считается тот объект, у которого значение параметра P больше. Тогда выбор более предпочтительного из двух заданных объектов осуществляется без труда, путем сравнения численных значений их параметра P и выделения объекта с большим значением P. Так же просто осуществляется выбор наиболее предпочтительного из нескольких заданных объектов – путем их попарного упорядочения по предпочтению и последующего выделения объекта, более предпочтительного, чем каждый из остальных. Пусть теперь два указанных объекта A и B характеризуются m различными параметрами $p_1,...,p_m$, причем по-прежнему лучшим (более предпочтительным) считается тот объект, у которого значения параметров $p_i \ (i=\overline{1,m})$ больше, а задача также состоит в выборе более предпочтительного из двух объектов. Наличие m параметров в новой задаче можно рассматривать как результат оценки одного имеющегося параметра объекта m независимыми экспертами (приборами) либо как существенную многопараметричность объекта и решаемой задачи его оптимального выбора. При этом математическая постановка и решение задачи не меняются. А именно, требуется сравнить два вектора $P(A) = (p_1^A,...,p_m^A)$ и $P(B) = (p_1^B,...,p_m^B)$, характеризующих значения всех параметров объектов A и B, и по результатам этого сравнения выбрать «больший» из векторов $P(A)$ и $P(B)$ и соответствующий ему лучший (более предпочтительный) объект. При решении данной задачи возникает следующая принципиальная трудность. Лишь в одном случае, при $p_i^A > p_i^B$, $i=\overline{1,m}$, ясно, что $P(A) > P(B)$ и, следовательно, объект A лучше (предпочтительнее) объекта B. Во всех остальных случаях сравнение векторов $P(A)$ и $P(B)$ и выбор «большего» из них (а следовательно, и выбор лучшего из двух объектов A и B) проблематично, поскольку сравнение отдельных компонент указанных векторов может давать противоречивые результаты (по одним компонентам «больший» вектор A, по другим – B), объединение которых невозможно без знания весов компонент. Однако эти веса в условиях рассматриваемой задачи (а также большинства других подобных задач) отсутствуют. Поэтому на практике при реализации весового подхода к сравнению векторов веса отдельных компонент назначают, исходя из эвристических соображений. Получаемые этим путем решения часто носят субъективный характер.

Предлагаемый в данной статье подход к сравнению векторов $P(A)$ и $P(B)$ и выбору на этой основе лучшего из двух объектов A и B базируется на чисто математических (точнее, теоретико-множественных) соображениях. Он не требует назначения весов компонент сравниваемых векторов, с использованием необходимых для этого эвристических соображений. Вместо этого предлагается сравнение векторов не покомпонентно, а как единого целого. Для возможности такого сравнения вводится формальная операция сравнения (взятия максимума и минимума) двух векторов или множеств как теоретико-множественное обобщение соответствующей операции с вещественными числами.

3. ИДЕЯ РЕШЕНИЯ

Идея решения поставленной задачи проста и состоит в следующем. Для любой пары вещественных чисел (a,b) возможные неравенства между ними можно задать с помощью эквивалентностей

$$\begin{aligned} &(a \ge b) \Leftrightarrow (a \vee b = a,\ a \wedge b = b), \\ &(a > b) \Leftrightarrow (a \vee b = a,\ a \wedge b = b,\ a \ne b), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vee = \max$ и $\wedge = \min$ – операции дизъюнкции и конъюнкции непрерывной логики (НЛ) над числами [8]. Определения отношений между числами (1) хороши тем, что они могут быть перенесены на множества. При этом получаем, что возможные неравенства между произвольными множествами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задаются следующими эквивалентностями

$$\begin{aligned} &(\widetilde{A} \ge \widetilde{B}) \Leftrightarrow (\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \widetilde{A},\ \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \widetilde{B}), \\ &(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \Leftrightarrow (\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \widetilde{A},\ \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \widetilde{B},\ \widetilde{A} \ne \widetilde{B}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vee = \max$ и $\wedge = \min$ – операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над множествами. Эти операции вводятся как теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над числами [8]

$$\begin{aligned} &\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \{a \vee b \mid a \in \widetilde{A}, b \in \widetilde{B}\}, \\ &\widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \{a \wedge b \mid a \in \widetilde{A}, b \in \widetilde{B}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Использование определений (1) для сравнения (выявления неравенств $\ge, >$) чисел существенно опирается на следующие свойства вещественных чисел: 1) операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя числами a и b всегда имеют своим результатом одно из этих чисел; 2) если дизъюнкция НЛ над двумя числами a и b равна одному из них, то конъюнкция НЛ равна другому, и обратно. Т. е. взятие максимума или минимума двух чисел всегда дает одно из этих чисел, причем, если максимум равен одному числу, то минимум равен другому, и обратно. Однако множества не обладают двумя указанными свойствами вещественных чисел. Например, при $\widetilde{A} = \{2,4,6\}$, $\widetilde{B} = \{1,3,5\}$ в соответствии с определением (3) имеем

$$\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \{2,3,4,5,6\}, \quad \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \{1,2,3,4,5\},$$

т. е. как максимум (дизъюнкция НЛ), так и минимум (конъюнкция НЛ) двух множеств не равны какому-то одному из них, и потому свойство 1 у множеств $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ отсутствует. Далее, при $\widetilde{A} = \{1,5\}$, $\widetilde{B} = \{1,3,5\}$ имеем

$$\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \{1,3,5\}, \quad \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \{1,3,5\},$$

т. е. как максимум (дизъюнкция НЛ), так и минимум (конъюнкция НЛ) двух множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ равны одному и тому же из них – $\widetilde{B}$ – и потому свойство 2 у множеств $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ отсутствует. В связи с отсутствием у множеств указанных двух свойств их непосредственное сравнение и выбор «большего» или «меньшего» из них на основании определения (2) невозможны. Однако остается вполне возможным косвенное сравнение двух множеств и выбор большего (меньшего) множества. Действительно, если выполненные в соответствии с определениями (3) операции взятия максимума $\widetilde{A} \vee \widetilde{B}$ и минимума $\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}$ двух множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ не дают ни $\widetilde{A}$, ни $\widetilde{B}$, тем самым не позволяя сравнить эти множества и выбрать большее и меньшее из них, то в качестве большего естественно принять то из множеств $\widetilde{A}, \widetilde{B}$, которое находится ближе к $\widetilde{A} \vee \widetilde{B}$, а в качестве меньшего – то, которое находится ближе к $\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}$. Таким образом, для решения задачи сравнения множеств необходимо лишь ввести логически, математически и содержательно обоснованную меру близости множеств или двойственную ей меру их удаленности.

Задача сравнения векторов и выбора «большего» или «меньшего» из них, поставленная в § 2, отличается от описанной выше задачи сравнения множеств и выбора «большего» или «меньшего» множества только определением операций дизъюнкции $\vee = \max$ и конъюнкции $\wedge = \min$ НЛ векторов, поскольку любые действия над векторами сводятся к аналогичным действиям над **соответствующими друг другу элементами** векторов. Таким образом, вместо (3) имеем следующее определение указанных операций для произвольных векторов $P = (p_1, \ldots, p_m)$ и $Q = (q_1, \ldots, q_m)$

$$\begin{aligned} P \vee Q &= (p_i \vee q_i \mid i = \overline{1,m}), \\ P \wedge Q &= (p_i \wedge q_i \mid i = \overline{1,m}). \end{aligned} \tag{4}$$

Как видно из (4), операция $\vee$ или $\wedge$ над двумя m-элементными векторами дает опять m-элементный вектор.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим два произвольных вектора $P = (p_1, \ldots, p_m)$ и $Q = (q_1, \ldots, q_m)$. Введем следующее

Определение 1. P и Q находятся в отношении $P > Q$, если и только если $p_i > q_i$ для всех $i, i = \overline{1,m}$; в отношении $P \geq Q$, если и только если $p_i \geq q_i$ для всех $i, i = \overline{1,m}$; в отношении $P = Q$, если и только если $p_i = q_i$ для всех $i, i = \overline{1,m}$.

Отношения между векторами – больше $(>)$, больше или равно $(\geq)$, равно $(=)$, вводимые по определению 1, являются наиболее простыми отношениями этого типа. Поэтому их свойства также весьма просты. Они вытекают из самого определения 1 и из нижеприведенного его следствия.

Следствие 1. P и Q не находятся в отношении $P > Q$, если и только если $p_i > q_i$ для $i \in M$ и $p_i \not> q_i$ для $i \in N$, где $M \cup N = \{1, \ldots, m\}$ и $N \neq \varnothing$; не находятся в отношении $P \geq Q$, если и только если $p_i \geq q_i$ для $i \in M$ и $p_i \not\geq q_i$ для $i \in N$, с такими же M и N; не находятся в отношении $P = Q$, если и только если $p_i = q_i$ для $i \in M$ и $p_i \neq q_i$ для $i \in N$ с такими же M и N.

Сравнение векторов и выбор большего (меньшего) из них на основе определения 1 осуществляется в соответствии со следующими определениями-эквивалентностями, аналогичными эквивалентностям (1), (2).

$$\begin{aligned} &(P \geq Q) \Leftrightarrow (P \vee Q = P, P \wedge Q = Q), \\ &(P > Q) \Leftrightarrow (P \vee Q = P, P \wedge Q = Q, P \neq Q). \end{aligned} \tag{5}$$

Практическое использование определений (5) для сравнения векторов (выявления неравенств $\geq, >$ между ними) требует, чтобы сравниваемые векторы обладали двумя свойствами вещественных чисел, указанными в § 3. А именно: 1) операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя векторами имеют своим результатом один из них; 2) если дизъюнкция НЛ над двумя векторами равна одному из них, то конъюнкция НЛ равна другому, и обратно. Наличие указанных свойств у векторов описывается следующими двумя предложениями.

Теорема 1. Для того чтобы операции дизъюнкции $\vee = \max$ и конъюнкции $\wedge = \min$ НЛ над двумя векторами P и Q имели своим результатом один из них, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы находились между собой в одном из отношений $>, \geq$ или $=$, согласно определению 1.

Доказательство. Пусть векторы P и Q находятся в одном из соотношений $>, \geq, =$, согласно определению 1. Тогда, используя определение операций дизъюнкции и конъюнкции НЛ над векторами (4), легко проверить, что эти операции имеют своим результатом один из векторов. Так, для операции дизъюнкции $\vee$ над векторами P и Q, находящимися в отношении $P > Q$, имеем $P \vee Q = (p_i \vee q_i \mid i = \overline{1,m}) = (p_i \mid i = \overline{1,m}) = (p_1, \ldots, p_m) = P$. Совершенно аналогично проводится проверка в других случаях, т. е. для других отношений между векторами P и Q и другой операции над ними – конъюнкции $\wedge$. Тем самым получается доказательство достаточности условий теоремы.

Пусть теперь одна из операций НЛ над векторами P и Q имеет своим результатом один из этих векторов. Тогда, используя определение операций дизъюнкции и конъюнкции НЛ над векторами (4), легко проверить, что эти векторы находятся в одном из отношений $>, \geq, =$, согласно определению 1. Так, для случая, когда операция дизъюнкции $\vee$ над векторами P и Q имеет своим результатом вектор P, получаем $P \vee Q = P$ или $(p_i \vee q_i \mid i = \overline{1,m}) = (p_i \mid i = \overline{1,m})$, что означает одну из трех возможностей: 1) $p_i > q_i$,

$i=\overline{1,m}$, т. е. $P>Q$; 2) $p_i \geq q_i$, $i=\overline{1,m}$, т. е. $P \geq Q$; 3) $p_i = q_i$, $i=\overline{1,m}$, т. е. $P=Q$. Совершенно аналогично проводится проверка в другом случае, при выполнении операции конъюнкции $\wedge$ над векторами P и Q, результатом чего является вектор P. Тем самым получаем доказательство необходимости условий теоремы.

Т е о р е м а 2. Если дизъюнкция $\vee = \max$ НЛ над двумя векторами P и Q равна одному из них, то конъюнкция $\wedge = \min$ НЛ равна другому, и обратно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дизъюнкция НЛ над векторами P и Q дает P, т. е. $P \vee Q = P$. Тогда, согласно доказательству теоремы 1, имеется одна из трех возможностей: 1) $p_i > q_i, i=\overline{1,m}$; 2) $p_i \geq q_i$, $i=\overline{1,m}$; 3) $p_i = q_i, i=\overline{1,m}$. Но для всех трех, в соответствии с определением операции конъюнкции НЛ над векторами, $P \wedge Q = (p_i \wedge q_i \mid i=\overline{1,m}) = (q_i \mid i=\overline{1,m}) = Q$. Таким образом, получаем $(P \vee Q = P) \Rightarrow (P \wedge Q = Q)$. Совершенно аналогично получается соотношение $(P \wedge Q = Q) \Rightarrow (P \vee Q = P)$. Что и требовалось доказать. Заметим, что условие $P \vee Q = P$ или $P \wedge Q = Q$ означает, что вектора P и Q находятся в одном из отношений $>, \geq, =$, согласно определению 1.

Как показывают теоремы 1 и 2, во всех случаях, когда сравниваемые векторы P и Q находятся в одном из отношений $>, \geq, =$, согласно определению 1, возможно их сравнение в выделением большего и меньшего из них, с помощью эквивалентностей (5).

Очевидно, что условия, указанные в следствии 1, реализуются практически гораздо чаще, чем условия, фигурирующие в исходном определении 1. Другими словами, произвольные векторы P и Q не находятся в отношениях $>, \geq, =$ согласно определению 1 гораздо чаще, чем находятся. Поэтому шансы на возможность сравнения двух векторов и выбора большего (меньшего) из них, если использовать понятие большего (меньшего) вектора в соответствии с определением 1, очень малы. В связи с этим возникает необходимость другого, более широкого определения отношений векторов.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем расстоянием $u(P,Q)$ между векторами $P=(p_1,\dots,p_m)$ и $Q=(q_1,\dots,q_m)$ общее число элементов, которыми они различаются. Например, для $P=(1,2,3)$ и $Q=(1,5,6)$ имеем $u(P,Q)=2$.

Расстояние $u(P,Q)$ между векторами обладает всеми свойствами обычного расстояния между объектами. А именно, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Функция $u(P,Q)$ расстояния между векторами P и Q обладает следующими свойствами

$$u(P,P)=0, \quad u(P,Q)>0 \text{ при } P \neq Q, \tag{6}$$

где неравенство векторов P и Q понимается в смысле определения 1 и следствия из него, т. е. означает несовпадение хотя бы одного элемента векторов:

$$u(P,Q)=u(Q,P); \tag{7}$$

$$u(P,Q)+u(Q,R) \geq u(P,R). \tag{8}$$

Свойство (6) означает, что расстояние между совпадающими векторами равно нулю, а между несовпадающими больше нуля. Свойство (7) есть перестановочное свойство функции расстояния, а свойство (8) есть неравенство треугольника.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость свойств (6) и (7) вытекает непосредственно из определения функции $u(P,Q)$. Справедливость свойства (8) вытекает из таких соображений. Если множество A номеров i элементов, которыми различаются векторы P и Q, не пересекается с множеством B номеров элементов, которыми различаются векторы Q и R, то множество C номеров элементов, которыми различаются векторы P и R, есть объединение указанных непересекающихся множеств и потому

$$u(P,R)=u(P,Q)+u(Q,R). \tag{9}$$

Если же множества A и B пересекаются, то одни и те же номера i элементов, принадлежащие пересечению – а векторы P и R могут различаться и этими элементами – учитываются в правой части (9) дважды: в первом и втором слагаемых. Поэтому в выражении (9) для $u(P,R)$ равенство должно быть заменено на неравенство $\leq$. В результате получаем соотношение (8), что и требовалось доказать.

С помощью определенного выше понятия расстояния $u(P,Q)$ между векторами P и Q введем теперь более общие, чем в определении 1, отношения векторов. В соответствии с идеей решения задачи (§ 3) в общем случае, когда сравниваемые векторы P и Q не находятся в одном из отношений $>, \geq, =$ согласно определению 1, так что в силу теоремы 1 операции дизъюнкции НЛ (взятия максимума) $P \vee Q$ и конъюнкции НЛ (взятия минимума) $P \wedge Q$ этих векторов по формулам (4) не дают ни P, ни Q, тем самым не позволяя сравнить эти векторы и выбрать больший и меньший из них, в качестве большего следует принять тот из векторов P,Q, который находится ближе к вектору $P \vee Q$, а в качестве меньшего – тот, который находится ближе к вектору $P \wedge Q$. Однако для возможности такого подхода к сравнению двух векторов требуется, чтобы тот из векторов P,Q, который находится ближе к вектору $P \vee Q$, находился дальше от вектора $P \wedge Q$, а тот, который находится ближе к вектору $P \wedge Q$, находился дальше от вектора $P \vee Q$. Следующее утверждение показывает, что введенная функция расстояния между векторами $u(P,Q)$ удовлетворяет этому требованию.

Т е о р е м а 4. Функция $u(P,Q)$ расстояния между произвольными векторами $P=(p_1,...,p_m)$ и $Q=(q_1,...,q_m)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} &u(P,P\vee Q)=u(Q,P\wedge Q),\\ &u(Q,P\vee Q)=u(P,P\wedge Q), \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &[u(P,P\vee Q)\underset{=}{\leq}u(Q,P\vee Q)]\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow[u(P,P\wedge Q)\underset{=}{\geq}u(Q,P\wedge Q)]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Условие (10) означает, что расстояние одного из векторов P,Q до их дизъюнкции НЛ $P\vee Q$ (максимума) равно расстоянию другого до их конъюнкции НЛ $P\wedge Q$ (минимума). Условие (11) в случае неравенств означает, что если один из векторов P ближе к дизъюнкции НЛ $\vee$ (максимуму) двух векторов $P\vee Q$, чем другой Q, то он дальше от конъюнкции НЛ $\wedge$ (минимума) этих векторов $P\wedge Q$, и обратно, если P дальше от $P\wedge Q$, чем Q, то он ближе к $P\vee Q$, чем Q. Условие (11) в случае равенств означает, что при одинаковой удаленности векторов P и Q от их дизъюнкции НЛ $\vee$ (максимума) $P\vee Q$ оба они одинаково удалены и от их конъюнкции НЛ $\wedge$ (минимума) $P\wedge Q$ и обратно, при одинаковой удаленности P и Q от $P\wedge Q$ оба они равноудалены и от $P\vee Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала равенства (10). Пусть $P=(p_1,...,p_m)$ и $Q=(q_1,...,q_m)$ – два произвольных вектора. Пусть в k одноименных разрядах этих векторов $p_i>q_i$, в r разрядах $p_i=q_i$ и, наконец, в s разрядах $p_i<q_i$, где $k+r+s=m$. Тогда, согласно (4), в дизъюнкции НЛ этих векторов $P\vee Q$ k разрядов содержат элементы вектора P, s разрядов – элементы вектора Q и r разрядов – элементы, одинаковые для обоих векторов. Аналогично, в конъюнкции НЛ векторов $P\wedge Q$ k разрядов содержат элементы вектора Q, s разрядов – элементы вектора P и r разрядов – элементы, одинаковые для обоих векторов. Отсюда, в соответствии с определением 2, получаем

$$\begin{aligned} &U(P,P\vee Q)=s, \quad U(Q,P\vee Q)=k,\\ &U(P,P\wedge Q)=k, \quad U(Q,P\wedge Q)=s, \end{aligned} \qquad (12)$$

что доказывает равенства (10). Заменив в какой-либо части – левой или правой – эквивалентности (11) функции $U(\bullet)$ равными им функциями из соотношений (10), получим другую часть, что доказывает справедливость (11).

Теперь, используя свойства (10), (11) расстояний между векторами, введем более общие, чем в определении 1, отношения векторов $>$ (больше), $\geq$ (больше или равно) и = (равно).

О п р е д е л е н и е 3. Произвольные векторы $P=(p_1,...,p_m)$ и $Q=(q_1,...,q_m)$ находятся в отношениях $>,\geq,=$ при выполнении следующих условий

$$\left.\begin{aligned} &P>Q, \text{ если и только если } U(P,P\vee Q)<\\ &<U(Q,P\vee Q),\ U(P,P\wedge Q)>U(Q,P\wedge Q);\\ &P\geq Q, \text{ если и только если } U(P,P\vee Q)\leq\\ &\leq U(Q,P\vee Q),\ U(P,P\wedge Q)\geq U(Q,P\wedge Q); \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} &P=Q, \text{ если и только если } U(P,P\vee Q)=\\ &=U(Q,P\vee Q),\ U(P,P\wedge Q)=U(Q,P\wedge Q). \end{aligned} \qquad (14)$$

Как видно из (13), для того чтобы некоторый вектор P был большим (большим или равным) из двух векторов P и Q, нужно, чтобы вектор P был ближе (ближе или равноудален) к дизъюнкции НЛ (максимуму) $P\vee Q$ векторов P и Q, и дальше (дальше или равноудален) от конъюнкции НЛ (минимума) $P\wedge Q$ этих векторов, чем вектор Q. Как видно из (14), для равенства двух векторов P и Q нужно, чтобы они были равноудалены от дизъюнкции НЛ (максимума) этих векторов и равноудалены от их конъюнкции НЛ (минимума).

Нижеследующее предложение полностью описывает условия, при которых произвольные векторы находятся в одном из отношений $>,\geq,=$, согласно определению 3. Обозначим $K(P\,\square\,Q)$ число одноименных разрядов векторов P и Q, элементы которых находятся в отношении $p_i\,\square\,q_i$, $\square\in\{>,\geq,=\}$. Число $K(P\,\square\,Q)$ есть характеристика различия (сходства) векторов P и Q.

Т е о р е м а 5. Для того чтобы два произвольных вектора P и Q находились в одном из отношений $\square\in\{>,\geq,=\}$ в смысле определения 3, необходимо и достаточно, чтобы в таком же отношении находились характеристики различия этих векторов $K(P>Q)$ и $K(Q>P)$, т. е.

$$(P\,\square\,Q)\Leftrightarrow[K(P>Q)\,\square\,K(Q>P)]. \qquad (15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P=(p_1,...,p_m)$ и $Q=(q_1,...,q_m)$ – два произвольных вектора, в k одноименных разрядах которых $p_i>q_i$, в r разрядах $p_i=q_i$ и в s разрядах $p_i<q_i$, где $k+r+s=m$. Согласно подсчетам (12) и определению (13), $(P\,\square\,Q)\Leftrightarrow(k\,\square\,s)$, $\square\in\{>,\geq,=\}$. Но, согласно определению функции $K(\bullet)$, $k=K(P>Q)$, $s=K(Q>P)$. Подставив эти выражения k и s в предыдущую эквивалентность, получим эквивалентность (15), что и требовалось доказать.

Таблица 1

		Случай 1 оценки экспертов			Случай 2 оценки экспертов			Случай 3 оценки экспертов		
Объекты	P	1	2	3	4	5	6	1	3	5
	Q	2	3	4	3	4	7	5	3	1

Как показывает теорема 5, сравнение двух произвольных векторов P и Q по отношениям $>, \geq, =$ в смысле определения 3, т. е. проверка наличия этих отношений между векторами, сводится к сравнению по соответствующим отношениям характеристик различия векторов $K(P>Q)$ и $K(Q>P)$. Эти характеристики являются числами, а два числа обязательно находятся между собой в одном из соотношений $>, \geq, =$. Таким образом, сравнение двух произвольных векторов P и Q с помощью теоремы 5 (эквивалентности (15)), с выделением большего (меньшего) из них, всегда возможно. При этом в качестве большего принимается тот вектор P, у которого характеристика $K(P>Q)$ больше, а в качестве меньшего – тот Q, у которого характеристика $K(Q>P)$ меньше. Если же обе характеристики равны, векторы P и Q считаются равными. Если сравниваемые векторы – это наборы оценок m параметров двух объектов, сделанные m независимыми экспертами (приборами), то указанное сравнение векторов позволяет всегда выделить лучший (более предпочтительный) и худший (менее предпочтительный) объекты или установить равноценность обоих объектов, что является решением поставленной в § 2 задачи.

Пример 1. Сравним три пары объектов (P,Q) с векторами оценки их параметров независимыми экспертами, указанными в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что только 1-я пара векторов (P,Q) находится в одном из простых отношений, даваемых определением 1. А именно, $Q>P$. Следовательно, объект Q лучше (предпочтительнее) объекта P. 2-я и 3-я пары векторов (P,Q) должны сравниваться по отношениям, даваемым определением 3, с использованием теоремы 5. Для 2-й пары векторов (P,Q) имеем $K(P>Q)=2$, $K(Q>P)=1$, так что $K(P>Q)>K(Q>P)$ и потому $P>Q$, т. е. объект P лучше (предпочтительнее) объекта Q. Для 3-й пары векторов (P,Q) имеем $K(P>Q)=K(Q>P)=1$, поэтому $P=Q$, т. е. объект P равноценен объекту Q.

5. ПРОБЛЕМА УПОРЯДОЧЕНИЯ ПО ПРЕДПОЧТЕНИЮ НЕСКОЛЬКИХ ОБЪЕКТОВ

До сих пор мы рассматривали задачу выбора лучшего (более предпочтительного) и худшего (менее предпочтительного) из двух объектов, путем агрегирования и последующего сравнения индивидуальных оценок каждого объекта, сделанных m независимыми экспертами или приборами. Результаты § 4 полностью решают эту задачу. Рассмотрим теперь общий случай данной задачи, когда имеется произвольное число объектов n, из которых необходимо выбрать лучший и худший. Такой выбор требует предварительного линейного упорядочения по предпочтению всех n объектов, путем сравнения их агрегированных оценок. Однако известно, что линейное упорядочение объектов по предпочтению в соответствии с некоторым отношением $\circ$ возможно, только если механизм упорядочения транзитивен, т. е. для любых трех объектов P,Q, R выполняется условие

$$(P \circ Q, Q \circ R) \to (P \circ R). \tag{16}$$

Будем считать (это вполне естественно), что все эксперты (приборы) дают оценки объектов, обладающие свойством транзитивности. Таких экспертов естественно назвать нормальными. К сожалению, как хорошо известно, агрегирование индивидуальных экспертных оценок, являющихся транзитивными, не гарантирует получения групповых транзитивных оценок [6]. Другими словами, коллектив, состоящий из нормальных экспертов, не всегда является нормальным, т. е. обладает свойством транзитивности получаемых агрегированных оценок. Выясним, является ли (и при каких условиях) нормальным коллектив из m нормальных экспертов, агрегирующий индивидуальные оценки экспертов в коллективные в соответствии с § 4.

Рассмотрим произвольное множество из 3 объектов $M=\{P,Q,R\}$. Пусть на M задано бинарное отношение $\circ$. Тогда множество M можно упорядочить 3! = 6 различными способами:

$$\begin{gathered}(P \circ Q \circ R, Q \circ R \circ P, R \circ P \circ Q),\\ (P \circ R \circ Q, R \circ Q \circ P, Q \circ P \circ R).\end{gathered} \tag{17}$$

Первые 3 порядка получаются один из другого циклической перестановкой одного крайнего объекта. То же верно для следующих 3 порядков. При этом если в первых 3 порядках некоторое отношение каких-то двух объектов встречается 2 раза, а противоположное ему – 1 раз, то в следующих 3 порядках ситуация противоположная. В связи с этим множества из первых 3 порядков и вторых 3 порядков в (17) можно обозначать отношениями 2 объектов, находящимися в этом множестве в большинстве. Таким образом, получаем следующие возможные обозначения

Множество первых 3 порядков (17):
$M(P \circ Q)$ или $M(Q \circ R)$ или $M(R \circ P)$;
множество вторых 3 порядков (17): (18)
$M(P \circ R)$ или $M(R \circ Q)$ или $M(Q \circ P)$.

Коллектив экспертов (приборов), упорядочивающий произвольное множество из 3 объектов $M=\{P,Q,R\}$ при $|M(P\circ Q)|\geq|M(Q\circ P)|$, называется коллективом типа $(P\circ Q)$; при $|M(P\circ R)|\geq$ $\geq|M(R\circ P)|$ – коллективом типа $(P\circ R)$ и т. д., а при $|M(P\circ R)|=|M(R\circ P)|$ – коллективом типа $P=R$. Здесь $|M|$ – мощность множества M. Следующее предложение описывает условия, при которых коллектив из m нормальных экспертов, агрегирующий индивидуальные оценки экспертов в коллективные в соответствии с § 4, сам является нормальным.

Т е о р е м а 6. Пусть имеется коллектив из m экспертов (приборов), каждый из которых – нормальный по отношению $>$ $\left[\text{отношению}\geq\right]$, т. е. упорядочивает объекты по указанному отношению с выполнением условия транзитивности (16) при $(\circ)=(>)$ $\left[\text{при } (\circ)=(\geq)\right]$. Пусть этот коллектив агрегирует индивидуальные оценки экспертами объектов в коллективные оценки, в соответствии с процедурой § 4, и является при упорядочении каждой тройки объектов $M=\{P,Q,R\}$ коллективом типа $P>R$ (типа $P\geq R$). Тогда он является нормальным по отношению $>$ $\left[\text{отношению }\geq\right]$, т. е. упорядочивает объекты по указанному отношению (по их агрегированным оценкам) с выполнением того же условия транзитивности (16) при $(\circ)=(>)$ $\left[\text{при } (\circ)=(\geq)\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть коллектив из m экспертов (приборов), нормальных по отношению $>$ $\left[\text{т. е. упорядочивающих объекты с выполнением условия транзитивности (16) при } (\circ)=(>)\right]$, агрегирует индивидуальные оценки экспертами объектов в коллективные оценки, в соответствии с процедурой § 4, и является при упорядочении каждой тройки объектов $M=\{P,Q,R\}$ коллективом типа $P>R$. Рассмотрим распределение всех возможных отношений между объектами произвольной тройки объектов $M=\{P,Q,R\}$ в соответствии с индивидуальными оценками экспертов (табл. 2). Согласно табл. 2, подмножество экспертов A_1 упорядочивает объекты указанной тройки в виде $P>Q>R$, подмножество A_2 – в виде $P>Q=R$ и т. д. Условие транзитивности упорядочения объектов (16) применительно к рассматриваемому отношению объектов $>$:

$$(P>Q,Q>R)\rightarrow(P>R)\,. \tag{19}$$

Соответствующее условие для рассматриваемого коллектива экспертов получим, заменив отношения объектов эквивалентными отношениями количеств экспертов, оценивающих эти отношения (формула (15)). Используя таблицу 2 и выделив в подмножествах A_3, A_7 те части, которые соответствуют отношению правой части (19) $P>R$ и противоположному ему $R>P$, получим

$$A_3':P>R>Q,\ A_3'':R>P>Q,$$
$$A_7':Q>P>R,\ A_7'':Q>R>P,$$

так что условие транзитивности для упорядочения объектов коллективом экспертов

$$L=\left\{\begin{array}{l}|A_1|+|A_2|+|A_3|>|A_7|+|A_8|+|A_9|,\\ |A_1|+|A_4|+|A_7|>|A_3|+|A_6|+|A_9|\end{array}\right\}\rightarrow$$
$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}|A_1|+|A_2|+|A_4|+|A_3'|+|A_7'|>\\ >|A_6|+|A_8|+|A_9|>|A_3''|+|A_7''|\end{array}\right\}=N. \tag{20}$$

Здесь $|A_i|$ означает мощность множества A_i. Сложив почленно левые и правые части обоих неравенств в L (20), получим после упрощений следствие

$$L=\{\bullet\}\rightarrow 2|A_1|+|A_2|+|A_4|>|A_6|+|A_8|+|A_9|$$

или после преобразований с учетом требуемого вида неравенства в N (20)

$$L=\{\bullet\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}|A_1|+|A_2|+|A_4|+|A_3'|+|A_7'|+\\ +\left(|A_1|-|A_3'|-|A_7'|\right)>\\ >|A_6|+|A_8|+|A_9|+|A_3''|+|A_7''|+\\ +\left(|A_9|-|A_3''|-|A_7''|\right)\end{array}\right\}=N'. \tag{21}$$

Следствие (21) отличается от следствия (20) тем, что 1) его справедливость уже установлена; 2) левая и правая части неравенства в N' содержат дополнительные скобки. Поэтому для проверки справедливости следствия (20) найдем соотношение между указанными скобками. Заданный коллектив экспертов имеет тип $P>R$. Это значит, что число экспертов, упорядочивающих множество объектов $M=\{P,Q,R\}$ в соответствии с первыми 3 последовательностями в (17), меньше или равно числу экспертов, упорядочивающих их согласно вторым 3 последовательностям в (17), или в обозначениях табл. 2

$$|A_1|+|A_3''|+|A_7''|\leq|A_9|+|A_3'|+|A_7'|$$

иначе $|A_1|-|A_3'|-|A_7'|\leq|A_9|-|A_3''|-|A_7''|$.

Последнее неравенство означает соотношение между скобками в (21) , при котором их можно опустить, без изменения знака неравенства. В результате из справедливости соотношения (21) получим справедливость соотношения (20). Последнее означает, что заданный

Таблица 2

<table>
<tr><td rowspan="6">ОБЪЕКТЫ</td><td></td><td colspan="9">ОТНОШЕНИЯ</td></tr>
<tr><td>P</td><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">$>$</td><td colspan="3">$=$</td><td colspan="3">$<$</td></tr>
<tr><td>Q</td><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td></td><td>$>$</td><td>$=$</td><td>$<$</td><td>$>$</td><td>$=$</td><td>$<$</td><td>$>$</td><td>$=$</td><td>$<$</td></tr>
<tr><td>R</td><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>A_3</td><td>A_4</td><td>A_5</td><td>A_6</td><td>A_7</td><td>A_8</td><td>A_9</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="9">Подмножества множества экспертов $A = \{1,2,\ldots,m\}$</td></tr>
</table>

коллектив экспертов упорядочивает объекты по их агрегированным, согласно § 4, оценкам с соблюдением условия транзитивности, т. е. коллектив является нормальным. Это доказывает теорему для случая упорядочения по отношению $>$. Доказательство для случая отношения $\geq$ проводится так же.

Теорема 6 дополняется следующим предложением.

Т е о р е м а 7. Пусть имеется коллектив из m экспертов (приборов), нормальных по отношению $=$, т. е. упорядочивающих объекты по этому отношению с выполнением условия транзитивности (16) при $(\circ) = (=)$. Пусть этот коллектив агрегирует индивидуальные оценки экспертами объектов в коллективные оценки, в соответствии с процедурой § 4, и является при упорядочении каждой тройки объектов $M = \{P,Q,R\}$ коллективом типа $P = R$. Тогда он является нормальным по отношению $=$, т. е. упорядочивает объекты по этому отношению (по их агрегированным оценкам) с выполнением того же условия транзитивности (16) при $(\circ) = (=)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7 практически не отличается от доказательства теоремы 6.

Теоремы 6, 7 определяют некоторые стандартные требования к коллективу экспертов, при которых он может упорядочить по предпочтению, в соответствии с заданным отношением, произвольное множество объектов. Смысл этих требований таков: при упорядочении любой тройки объектов P,Q,R по отношению $\circ$ большинство экспертов упорядочивает указанные объекты согласно одной скобке в (17), т. е. одному циклическому порядку объектов, а меньшинство экспертов – согласно другой скобке в (17), т. е. другому циклическому порядку объектов. Но такие требования заведомо всегда выполнены. Поэтому, в соответствии с теоремами 6 и 7, процедура коллективного упорядочения по предпочтению объектов, описанная в § 4, позволяет упорядочить любое множество объектов.

6. АЛГОРИТМ УПОРЯДОЧЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ПРЕДПОЧТЕНИЮ

Этот алгоритм состоит в следующем. 1) Каждому объекту P ставится во взаимно однозначное соответствие некоторая вершина орграфа. 2) Каждой паре объектов (P,Q), упорядоченных по предпочтению (отношению $\circ$) согласно процедуре § 4 в виде $P \circ Q$, ставится в соответствие дуга из вершины P в вершину Q. 3) В полученном орграфе предпочтения объектов Γ каждый объект, соответствующий началу дуги, предпочтительнее объекта, соответствующего ее концу. Таким образом, любой гамильтонов путь в графе Γ (т. е. путь вдоль дуг, включающий все вершины Γ ровно по одному разу) определяет некоторую упорядоченную по предпочтениям последовательность имеющихся объектов.

Для нахождения гамильтоновых путей в орграфах разработаны специальные методы [9, 10]. Приведенный алгоритм является универсальным. Он пригоден для упорядочения объектов по предпочтению как при общих оценках объектов экспертами, рассчитанных на сравнение любых пар объектов, так и при их частных оценках, предназначенных для сравнения определенных пар объектов. Этот алгоритм работает и при отсутствии оценок объектов экспертами, если эксперты указали явно предпочтения для некоторых пар объектов.

П р и м е р 2. Упорядочим по предпочтению 5 объектов: P,Q,R,S,T, числовые оценки которых 3 независимыми экспертами даны в табл. 3.

Сравнив различные пары объектов с помощью определения 1 или определения 3 и теоремы 5, как это делалось в примере 1, получим следующие отношения предпочтения объектов:

$$P > Q,\ P > R,\ P > S,\ P > T,\ R > Q,$$
$$S > Q,\ T > Q,\ S > R,\ T > R,\ T > S,$$

т. е. P предпочтительнее Q,R,S,T; R предпочтительнее Q и т. д. По полученным отношениям объектов строим орграф предпочтения объектов Γ (рис. 1).

Таблица 3

Объекты	Эксперты		
	1	2	3
P	8	9	10
Q	5	6	11
R	6	10	8
S	9	7	9
T	7	8	11

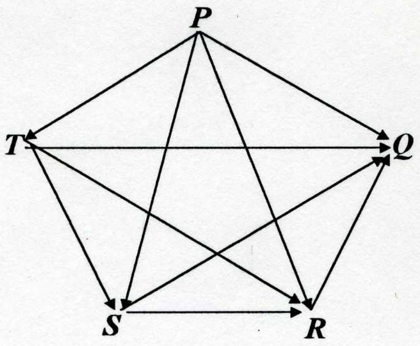

Рис. 1. Орграф предпочтения объектов Γ

Из графа Γ находим его единственный гамильтонов путь $P \to T \to S \to R \to Q$, который и определяет последовательность объектов по предпочтению. Таким образом, наиболее предпочтительный объект – P, а наименее предпочтительный – Q.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к упорядочению объектов по предпочтению путем агрегирования индивидуальных оценок объектов различными экспертами (приборами) и последующего сравнения полученных коллективных оценок объектов позволяет упорядочивать множества объектов с произвольными отношениями оценок. При этом, в отличие от традиционных подходов, в которых агрегирование осуществляется на основе эвристических соображений (например, путем усреднения индивидуальных оценок), в данном подходе эта процедура осуществляется строго математически, путем прямого теоретико-множественного обобщения числовых операций $\max$ и $\min$ на векторы и множества. Это и позволяет напрямую сравнивать векторы (множества) индивидуальных оценок, относящихся к различным объектам, выбирая «больший» вектор и тем самым – более предпочтительный объект и не используя предварительного усреднения индивидуальных оценок. Указанное обобщение достигнуто с применением аппарата непрерывной логики, с его операциями $\vee = \max$ (дизъюнкция) и $\wedge = \min$ (конъюнкция), видоизмененными в соответствии с дискретным характером изучаемых векторов и множеств. Изложенный подход дает возможность решать и некоторые нетрадиционные задачи принятия решений, например, задачи упорядочения по предпочтению объектов, оцененных различным числом экспертов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellman R.E., Zadeh L.A.* Decision Making in Fuzzy Environment // Management Science. 1970. V. 17. № 4. P. 141-164.
2. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. N. Y.: Academic Press, 1980. 280 P.
3. *Zimmermann H.J.* Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems. Klumer Academic Publishers. 1986. 350 P.
4. *Yager R.R.* Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1991. V. 40. P. 39-75.
5. *Левин В.И.* Новое обобщение операций над нечеткими множествами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 15-21.
6. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 280 с.
7. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000. 315 с.
8. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-107.
9. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 350 с.
10. *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М.: Наука, 1987. 304 с.

Поступила в редакцию 19 февраля 2002 г.