Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.98

Разложение функции Березина на пространстве Лобачевского по смешанным сферическим функциям [1]

© А. А. Артемов

Ключевые слова: канонические представления, гиперболоиды, сферические функции, формула Планшереля.

Дается разложение функции Березина на пространстве Лобачевского по смешанным сферическим функциям.

Мы изучаем канонические представления обобщенной группы Лоренца $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ в функциях на единичной сфере Ω в $\mathbb{R}^n$ с действием, порожденным надгруппой $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Сфера Ω имеет три открытые G-орбиты, они диффеоморфны однополостному гиперболоиду и двум полам двуполостного гиперболоида. Одна из задач состоит в том, чтобы разложить *форму Березина* на этих гиперболоидах. Это эквивалентно тому, чтобы разложить *функцию Березина* на этих гиперболоидах по сферическим функциям – обычным и смешанным. Один из способов сделать это – косвенный, он использует "собственные числа" преобразования Березина. Интересно сделать прямое вычисление. Для обычных сферических функций мы выполнили это ранее, для смешанных – при $n = 3$ в [1]. В настоящей работе мы даем разложение по смешанным сферическим функциям для произвольного n.

Группа G транзитивно действует на верхней поле $\mathcal{Y}^+$ двуполостного гиперболоида: $-y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = -1$, $y_1 \geqslant 1$, в $\mathbb{R}^n$ (пространстве Лобачевского размерности $n-1$).

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(\alpha, \tau; z) = \frac{2^{-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\, F\left(2\alpha+\tau+1,\ 2\alpha-\tau;\ 2\alpha+1;\ \frac{1-z}{2}\right),$$

[1] Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, α, τ – комплексные параметры. Функция $\mathcal{P}(z)$ аналитична в плоскости z с разрезом $(-\infty,-1]$. Функция $\mathcal{P}(z)$ тесно связана с функцией Лежандра первого рода $P_\tau^{-2\alpha}(z)$:

$$P_\tau^{-2\alpha}(z) = (z^2-1)^\alpha\,\mathcal{P}(z),$$

последняя является собственной функцией оператора Лежандра

$$D_\alpha = (z^2-1)\frac{d^2}{dz^2} + 2z\frac{d}{dz} - \frac{4\alpha^2}{z^2-1},$$

Смешанная сферическая функция $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$ на $\mathcal{Y}^+$ выражается через функцию $\mathcal{P}$ от мнимого аргумента:

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,\varepsilon}(y) &= (2\pi)^{(n-1)/2}(\mathrm{e}^{i\sigma\pi/2}+(-1)^\varepsilon\mathrm{e}^{-i\sigma\pi/2})^{-1}\times\\ &\times\ (y_n^2+1)^{(n-3)/4}\left[\mathcal{P}(iy_n)+(-1)^\varepsilon\mathcal{P}(-iy_n)\right],\end{aligned}$$

где $\alpha=(n-3)/4$ и $\tau=(n-3)/2$. Функция Березина сейчас есть обобщенная функция $y_n^{\lambda,\varepsilon}=|y_n|^\lambda\,\mathrm{sgn}^\varepsilon y_n$.

Теорема 1 *Для* $\mathrm{Re}\,\lambda < -1/2$ *обобщенная функция* $y_n^{\lambda,\varepsilon}$ *разлагается по смешанным сферическим функциям следующим образом:*

$$y_n^{\lambda,\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty}\mu(\lambda,\varepsilon,\sigma)\ \Phi_{2-n-\sigma,\varepsilon}\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho}\,d\rho,$$

где

$$\begin{aligned}\mu(\lambda,\varepsilon,\sigma) &= \omega(\sigma)\cdot 2^{-\lambda}\pi^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{-\lambda+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\lambda-n-\sigma+2}{2}\right)\times\\ &\times\ \left[\sin\frac{\lambda+\sigma+n}{2}\pi+(-1)^\varepsilon\sin\frac{\lambda-\sigma-n}{2}\pi\right],\\ \omega(\sigma) &= 2^{-n-2}\,\pi^{-n}\,(2\sigma+n-2)\,\sin\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)\pi\cdot\Gamma(-\sigma)\,\Gamma(\sigma+n-2).\end{aligned}$$

Здесь $\omega(\sigma)$ – множитель в мере Планшереля для $\mathcal{Y}^+$.

Доказательство. Для оператора Лежандра на мнимой оси имеет место следующее спектральное разложение. Пусть (f,h) – скалярное произведение из $L^2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$A(c)=H(c)\mathcal{P}(ic),\quad H(c)=(c^2+1)^\alpha.$$

Для функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ пишем $\widehat{f}(x)=f(-x)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\psi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}(2\tau+1)\big\{\Omega_1\ \left[(\psi,\overline{HA})\ (HA,\varphi)+(\psi,\overline{H\widehat{A}})\ (H\widehat{A},\varphi)\right]+\\ &+\ \Omega_2\left[(\psi,\overline{HA})\ (H\widehat{A},\varphi)+(\psi,\overline{H\widehat{A}})\ (HA,\varphi)\right]\big\}\Big|_{\tau=-1/2+i\rho}d\rho,\end{aligned}\qquad(1)$$

где

$$\Omega_1 = -\omega\,\sin 2\alpha\pi,\quad \Omega_2 = \omega\,\sin\tau\pi,$$
$$\omega = \frac{\Gamma(2\alpha+\tau+1)\ \Gamma(2\alpha-\tau)\cos\tau\pi}{8\pi\,\sin(\tau-2\alpha)\pi\ \sin(\tau+2\alpha)\pi}.$$

Положим в (1) $\psi(c) = c^{\lambda,\varepsilon}$. Функцию φ, принадлежащую $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, мы можем не писать. Мы получаем разложение функции $\psi(c) = c^{\lambda,\varepsilon}$ по $\mathcal{P}(\pm ic)$:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} (2\tau+1)\,(\psi,\overline{HA})\,(\Omega_1 + (-1)^{\varepsilon}\Omega_2)\,\times$$
$$\times\ H(c)\,\big(\mathcal{P}(ic) + (-1)^{\varepsilon}\mathcal{P}(-ic)\big)\Big|_{\tau=-1/2+i\rho}\,d\rho.$$

Остается вычислить интеграл

$$(\psi,\overline{HA}) = \int_{-\infty}^{\infty} c^{\lambda,\varepsilon}\,(c^2+1)^{2\alpha}\,\mathcal{P}(ic)\,dc$$
$$= \mathrm{e}^{-i\alpha\pi}\int_0^{\infty} c^{\lambda}\,(c^2+1)^{\alpha}\,P_{\tau}^{-2\alpha}(ic)\,dc\,+$$
$$+\ (-1)^{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{i\alpha\pi}\int_0^{\infty} c^{\lambda}\,(c^2+1)^{\alpha}\,P_{\tau}^{-2\alpha}(-ic)\,dc. \qquad (2)$$

Мы исходим из формулы [2] 7.133(2) для функций Лежандра второго рода:

$$\int_u^{\infty} (x-u)^{\lambda}\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}(x^2-1)^{\alpha}Q_{\tau}^{-2\alpha}(x)\,dx =$$
$$= \Gamma(\lambda+1)\,\mathrm{e}^{i(2\alpha+\lambda+1)\pi}\,(u^2-1)^{(2\alpha+\lambda+1)/2}\,Q_{\tau}^{-2\alpha-\lambda-1}(u),$$

Из этой формулы с помощью интегральной формулы Коши и с помощью формул поведения функций Лежандра на разрезе $[-1,1]$, см. [2] гл. 3, мы выводим интеграл по верхней половине мнимой оси:

$$\int_{+i0}^{+i\infty} z^{\lambda}\,\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\,(x^2-1)^{\alpha}\,Q_{\tau}^{-2\alpha}(z)\,dz = \mathrm{e}^{i(2\alpha+\lambda-\tau)\pi/2}\,B,$$

где

$$B = 2^{-\lambda-2-2\alpha}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{\tau-2\alpha-\lambda}{2}\right)\Big/\,\Gamma\Big(\frac{\mu+\sigma+2}{2}\Big).$$

Отсюда мы находим

$$\int_0^{\infty} c^{\lambda}\,\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\,(c^2+1)^{\alpha}\,Q_{\tau}^{-2\alpha}(\pm ic)\,dc = \mp i\mathrm{e}^{\mp i\tau\pi/2}\,B, \qquad (3)$$

где берутся либо верхние, либо нижние знаки. Далее мы используем формулу, см. [2] 3.3 (3), выражающую функцию Лежандра первого рода через функции Лежандра второго рода:

$$P_{\tau}^{-2\alpha}(z) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}}{\pi\cos\tau\pi}\left\{\sin(\tau-2\alpha)\pi\cdot Q_{\tau}^{-2\alpha}(z) - \sin(\tau-2\alpha)\pi\cdot Q_{-\tau-1}^{-2\alpha}(z)\right\}.$$

Она позволяет с помощью (3) вычислить (2). Затем мы делаем аналитическое продолжение по α в точку $\alpha = (n-3)/4$ и полагаем $\tau = (n-3)/2$. $\square$

Литература

1. А. А. Артемов. Разложение формы Березина на сфере. Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2008, том 13, вып. 1, 7–8.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

A. A. Artemov. Decomposition of a Berezin function on the Lobachevsky space on mixed spherical functions. An expansion of a Berezin function on the Lobachevsky space on mixed spherical functions is given.
Keywords: canonical representations, hyperboloids, spherical functions, Plancherel formula.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Комплексный гиперболоид: инвариантная дифференциально-геометрическая структура [1]

© О. В. Бетина

Ключевые слова: однородные пространства, метрики, операторы Лапласа–Бельтрами, скобки Пуассона.

Для комплексного гиперболоида найдены метрики, внешние формы, операторы Лапласа–Бельтрами, скобки Пуассона, инвариантные относительно группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Комплексный гиперболоид $\mathcal{X}$ в $\mathbb{C}^3$ задается уравнением $-x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. Он есть однородное пространство G/H, где $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, H – диагональная подгруппа. Они состоят соответственно из матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Гиперболоид $\mathcal{X}$ – простейший и ключевой пример пара-эрмитова пространства второй категории в смысле Канеюки. Такие пространства являются комплексификациями эрмитовых симметрических пространств. Для построения

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.