УДК 517.939

ОПЕРАТОР ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© Е.С. Жуковский

Zhukovsky E.S. Composition operator in the space of partly-continuous functions. Composition operator $(Sy)(t)=\begin{cases} q(t)y(g(t)), & \text{if } g(t)\in[a,b],\\ 0, & \text{if } g(t)\notin[a,b].\end{cases}$ is studied without acting in the space $L_{p[a,b]}$ of summable functions and the space $C_{[a,b]}$ of continuous functions. A Banach space of partly-continuous functions has been constructed, in which this operator is acting and bounded. The spectral radius estimates are obtained.

В теории функционально-дифференциальных уравнений особое место занимает уравнение нейтрального типа

$$\dot x(t) - p(t)x(h(t)) - q(t)\dot x(g(t)) = f(t),\ t\in[a,b],$$
$$x(\xi)=\varphi(\xi),\ \dot x(\xi)=\psi(\xi), \text{ если } \xi\notin[a,b], \tag{1}$$

которому посвящена обширная литература (см. обзор [1]). Центральная проблема таких уравнений – это свойства оператора внутренней суперпозиции

$$(Sy)(t)=\begin{cases} q(t)\,y(g(t)), & \text{если } \quad g(t)\in[a,b],\\ 0, & \text{если } \quad g(t)\notin[a,b].\end{cases} \tag{2}$$

Первой задачей, встающей перед исследователем, от решения которой зависят все последующие результаты, является выбор пространства. В «традиционном» пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных на $[a,b]$ функций оператор (2) не действует. Функция $(S\,y)(\cdot)$ терпит разрывы в тех точках, в которых $g(\cdot)-a$ меняет знак. Можно, конечно, предположить, что таких точек нет, или рассмотреть пространство $C^0_{[a,b]}$ непрерывных функций, равных нулю при $x=a$ и $x=b$. Однако тогда слишком ограничивается класс изучаемых уравнений [2]. Учитывая, что оператор S в уравнении (1) действует на производную, гораздо более естественным является рассмотрение этого оператора в пространстве $L_{p[a,b]}$ суммируемых с p-ой степенью, $1\le p<\infty$, функций. Такой выбор позволил [3–5] эффективно использовать аппарат линейных уравнений в банаховых пространствах [6], произвел революцию во взглядах на функционально-дифференциальные уравнения [7]. Но, для того чтобы оператор внутренней суперпозиции действовал в пространстве суммируемых функций, необходимо выполнение так называемого «условия независания» функции g

$$\forall e\subset[a,b] \quad mes\, e=0 \ \Rightarrow\ mes\, g^{-1}(e)=0, \tag{3}$$

уменьшающего область применения такой теории. Роль условия (3) в том, что оператор S должен отображать эквивалентные функции в эквивалентные. Отметим также, что если условие (3) не выполняется, то суперпозиция Sy может оказаться неизмеримой для измеримых функций g, y [8].

Будем предполагать, что функция g непрерывна и при всех $t\in[a,b]$ выполнено $g(t)\le t$.

Определим множество $\mathcal{N}=\{t\in[a,b]\,|\,g(t)<a\}$. Нас будет, естественно, интересовать только ситуация, когда $\mathcal{N}\ne\varnothing$, $\mathcal{N}\ne[a,b]$. Обозначим

$$T_0^R=\{t_0^R\,|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ |t-t_0^R|<\varepsilon\Rightarrow$$
$$(g(t)-a)(t-t_0^R)\ge0,\ \exists s\in(t_0^R-\varepsilon,\,t_0^R)\ \ g(s)-a<0\},$$

$$T_0^L=\{t_0^L\,|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ |t-t_0^L|<\varepsilon\Rightarrow$$
$$(g(t)-a)(t-t_0^L)\le0,\ \exists s\in(t_0^L,\,t_0^L+\varepsilon)\ \ g(s)-a<0\}.$$

Отметим, что множество $T_0^R\cup T_0^L$ не пусто. Зададим последовательности множеств $\{T_i^R\}$, $\{T_i^L\}$ рекуррентными формулами

$$T_{i+1}^R=\left(\begin{array}{l}\bigcup\limits_{\forall t_i^R\in T_i^R}\{t_{i+1}^R\,|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ |t-t_{i+1}^R|<\varepsilon\Rightarrow\\ (g(t)-t_i^R)(t-t_{i+1}^R)\ge0,\\ \exists s\in(t_{i+1}^R-\varepsilon,\,t_{i+1}^R)\ \ g(s)-t_i^R<0\}\end{array}\right)$$
$$\bigcup\left(\begin{array}{l}\bigcup\limits_{\forall t_i^L\in T_i^L}\{t_{i+1}^R\,|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ |t-t_{i+1}^R|<\varepsilon\Rightarrow\\ (g(t)-t_i^L)(t-t_{i+1}^R)\le0,\\ \exists s\in(t_{i+1}^R-\varepsilon,\,t_{i+1}^R)\ \ g(s)-t_i^L>0\}\end{array}\right),$$

$$T_{i+1}^{L}=\left(\begin{array}{l}\bigcup\limits_{\forall t_i^R\in T_i^R}\{t_{i+1}^{L}\,\big|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ \left|t-t_{i+1}^{L}\right|<\varepsilon\Rightarrow\\ (g(t)-t_i^R)(t-t_{i+1}^{L})\le 0,\\ \exists s\in(t_{i+1}^{L},\,t_{i+1}^{L}+\varepsilon)\ \ g(s)-t_i^R<0\}\end{array}\right)$$

$$\bigcup\left(\begin{array}{l}\bigcup\limits_{\forall t_i^L\in T_i^L}\{t_{i+1}^{L}\,\big|\,\exists\varepsilon>0\ \ \forall t\ \ \left|t-t_{i+1}^{L}\right|<\varepsilon\Rightarrow\\ (g(t)-t_i^L)(t-t_{i+1}^{L})\ge 0,\\ \exists s\in(t_{i+1}^{L},\,t_{i+1}^{R}+\varepsilon)\ \ g(s)-t_i^L>0\}\end{array}\right),$$

$T^L=\bigcup\limits_i T_i^L$, $T^R=\bigcup\limits_i T_i^R$, $T=T^L\bigcup T^R$. Заметим, что множество T не более чем счетно. Пусть это множество конечно, $|T|=n$, t_0 – его наименьший элемент. Обозначим через SP пространство кусочно постоянных функций $y_{SP}:[a,b]\to R$, возможно терпящих разрывы в точках множества T, равных нулю на $[a,t_0]$, непрерывных справа при $t\in T^R$ и непрерывных слева при $t\in T^L$. Пространство SP изоморфно пространству R^n, его элементы y_{SP} можно задать набором Y значений скачков в точках множества T. Обозначим через B_n пространство функций $y:[a,b]\to R$, представимых в виде $y=y_C+y_{SP}$, где $y_{SP}\in SP$, а функция y_C непрерывна. К непрерывным функциям мы также относим функции, имеющие устранимые разрывы. Норму элемента $y\in B_n$ зададим формулой $\|y\|_{B_n}=\max\{\|y_C\|_C,\|Y\|_{R^n}\}$.

Т е о р е м а 1. Пусть $q\in B_n$, $g\in C_{[a,b]}$ и $g(t)\le t$ при всех $t\in[a,b]$. Тогда оператор S действует в пространстве B_n, линеен, непрерывен и вольтерров.

Обозначим $\Omega=\{t\in[a,b]\ \big|\ g(t)=t\}$.

Т е о р е м а 2. Если $\Omega=\varnothing$, то оператор S является нильпотентным.

Пусть теперь $\Omega\ne\varnothing$. Вследствие предположения о конечности множества T выполнено неравенство $\omega<t\ \ \forall\omega\in\Omega,\ \forall t\in T$. Кроме того $\Omega\bigcap T=\varnothing$. Поэтому функция $q(s)$ непрерывна при $s\in\Omega$.

Т е о р е м а 3. Спектральный радиус ρ оператора S удовлетворяет неравенству $\rho(S)\le\max\limits_{\omega\in\Omega}|q(\omega)|$.

Проиллюстрируем полученные результаты. Рассмотрим оператор (2) где $t\in[0,5]$,

$$g(t)=\begin{cases}t-1, & при\ t\in[0,2],\\ 1, & при\ t\in(2,3],\\ t-2, & при\ t\in(3,5].\end{cases}$$

Заметим, что запаздывание $g(\cdot)$ «зависает» на $[2,3]$, и поэтому такой оператор внутренней суперпозиции не действует в пространствах суммируемых функций. Кроме того, для любого непрерывного $y(\cdot)$, такого, что $y(a)\ne 0$, функция $(Sy)(\cdot)$ терпит разрыв при $t=1$. Т. е. оператор S не действует и в пространстве $C_{[a,b]}$.

Опишем пространство, в котором мы будем изучать этот оператор.

В нашем случае $T_0^R=\{1\}$, $T_1^R=\{2\}$, $T_3^R=\{4\}$, $T^L=\varnothing$. SP – пространство функций $y_{SP}:[0,5]\to R$, постоянных на $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,4]$ и равных нулю на первом из этих интервалов. Нормой в SP считаем модуль вектора $Y=(y_1,y_2,y_3)$ значений скачков в точках множества T. Пространство SP изоморфно пространству R^3. Обозначим через B_3 пространство функций $y:[0,5]\to R$, представимых в виде $y=y_C+y_S$, где $y_S\in SP$, а функция y_C непрерывна на $[0,5]$. Норму элемента $y\in B_3$ зададим формулой $\|y\|_{B_3}=\|y_C\|_C+\|Y\|_{R^3}$. Так как $g(t)\le t-1$, то $\Omega=\varnothing$ и, согласно теореме 2, при любом $q\in B_3$ оператор S является нильпотентным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1981. Т. 19. С. 55-126.
2. *Азбелев Н.В.* О роли некоторых традиций в развитии учения о дифференциальных уравнениях // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1991. С. 3-10.
3. *Драхлин М.Е.* Оператор внутренней суперпозиции в пространстве суммируемых функций // Известия вузов. Математика. 1986. № 5. С. 18-23.
4. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Рахматуллина Л.Ф.* О линейном функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 1915-1925.
5. *Березанский Л.М.* О спектральном радиусе оператора внутренней суперпозиции // Краевые задачи. Пермь, 1977. С. 60-61.
6. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
7. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
8. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953. С. 194.

Поступила в редакцию 6 сентября 1999 г.