ЛИТЕРАТУРА

1. *Грошева Л.И.* Разложение канонических представлений на плоскости Лобачевского // Вестник Тамбовского ун-та, 2003, том 8, вып. 1, 142—144.

2. *Грошева Л.И.* Преобразования Пуассона и Фурье, связанные с каноническими представлениями на комплексном гиперболическом пространстве. (см. настоящий том)

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ НА ПЛОСКОСТИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ

© Э.Н. Деребизов

В настоящей заметке мы описываем все конечномерные подпространства функций $f(x,y)$ класса C^∞ на плоскости $\mathbb{R}^2$, инвариантные относительно группы G движений плоскости (параллельные переносы и вращения).

Сразу видно, что пространство S_k многочленов от x, y степени $\leqslant k$ является инвариантным относительно G. Однако, это не все такие пространства. Например, в пространстве S_2 размерности 6 содержится инвариантное подпространство размерности 4 с базисом $x^2+y^2, x, y, 1$.

Удобно от переменных x, y перейти к переменным $z = x+iy$, $\overline{z} = x - iy$.

Т е о р е м а. *Всякое неразложимое G-инвариантное конечномерное подпространство в $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ задается парой чисел $p, q \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ и состоит из многочленов $f(z,\overline{z})$ степени $\leqslant p$ по z и степени $\leqslant q$ по $\overline{z}$. Его размерность равна $(p+1)(q+1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G имеет своим базисом следующие три дифференциальных оператора:

$$\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}},\ \ L = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right).$$

Соотношения коммутации

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right] = 0,\ \left[\frac{\partial}{\partial z}, L\right] = i\frac{\partial}{\partial z},\ \left[\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, L\right] = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Пусть K – подгруппа в G, состоящая из вращений. Оператор L отвечает этой подгруппе.

Пусть V – конечномерное пространство в $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, инвариантное относительно G. В силу компактности группы K пространство V распадается в прямую сумму собственных относительно K подпространств. Возьмем какой-нибудь собственный вектор f из V: $Lf = imf$, $m \in \mathbb{Z}$. Из соотношений коммутации получаем, что векторы $(\partial/\partial z)f$ и $(\partial/\partial\overline{z})f$ являются собственными для L с собственными числами $i(m-1)$ и $i(m+1)$, соответственно. В силу конечномерности V существуют числа p и q из $\mathbb{N}$ такие, что $(\partial/\partial z)^{p+1}f = 0$, но $(\partial/\partial z)^p f \neq 0$, и $(\partial/\partial\overline{z})^{q+1}f = 0$, но $(\partial/\partial\overline{z})^q f \neq 0$. Следовательно, f есть многочлен от z и $\overline{z}$ степени p и q, соответственно. Так как f – собственный для K, то $f = Cz^p\overline{z}^q$, так что $m = p - q$. Действуя на f операторами $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$, мы получим все многочлены от z и $\overline{z}$ степеней не больше p и q, соответственно. Полученное подпространство в V неразложимо. □

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

© Э.Л. Казарян

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей S. Будем говорить, что функция $u(x)$ в области Ω удовлетворяет условию Гельдера (непрерывна по Гельдеру) с показателем $\alpha \in (0,1)$, если

$$\langle u\rangle^{(\alpha)} := \sup_{x,x'\in\Omega}\frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^{\alpha}} < +\infty. \tag{1}$$

Пусть $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, – банахово пространство, элементами которого являются непрерывные в Ω функции, имеющие непрерывные производные до порядка l включительно с нормой

$$|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)} = \sum_{|k|=0}^{l}\sup|D^k u(x)| + \sum_{|k|=l}^{l}\sup\langle D^k u(x)\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}, \tag{2}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $k_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $D^k = \partial^{k_1+\ldots+k_n}/\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}$.

В области Ω рассматривается задача:

$$L(u) \equiv \sum a_{ij}(x, u, u_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \tag{3}$$

$$M(u) \equiv \left[b(x, u, u_x) + \sum b_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x, u)\right]\Big|_S = 0, \tag{4}$$

в предположении, что уравнение (3) равномерно эллиптично, т.е.

$$\sum a_{ij}(x, u, u_x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2,\ \ \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{5}$$

и

$$\sum\left[b_{p_i}(x, u, p) + b_i(x, u)\right]\cos(n, x_i) \geqslant \nu_1\max\left(|u|, |p|\right), \nu_1 > 0 \tag{6}$$

Вопрос разрешимости краевой задачи (3)–(4) сводится к вопросу существования неподвижных точек у некоторых преобразований в банаховых пространствах [1], [2]. Для этого запишем граничное условие (4) в следующем виде:

$$\left\{\sum\left[\int_0^1 \frac{\partial b(x, u, p)}{\partial p_i}\Big|_{p=tu_x}dt + b_i(x, u)\right]u_{x_i} + u\right\}\Big|_S = \left\{-b(x, u, 0) - b_0(x, u) + u\right\}\Big|_S.$$

Пусть $v \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Обозначим:

$$\widehat{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x, v, v_x),\ \ \widehat{a}(x) = a(x, v, v_x),$$
$$\widehat{b}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial b(x, v, p)}{\partial p_i}\Big|_{p=tv_x}dt + b_i(x, v),$$
$$\widehat{\varphi}(x) = -b(x, v(x), 0) - b_0(x, v(x)) + v(x)$$

и рассмотрим следующую задачу:

$$\sum \widehat{a}_{ij}(x)ux_ix_j + \widehat{a}(x) = 0, \tag{7}$$

$$\left[\widehat{b}(x)ux_i + u\right]\Big|_S = \widehat{\varphi}(x), \tag{8}$$

Задача (7)–(8) является линейной задачей относительно функции $u(x)$ и при некоторых предположениях решение этой задачи единственно и принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Получаем, вообще говоря, нелинейное преобразование $u = \Phi(v)$. Неподвижные точки этого преобразования будут решениями задачи (3)–(4).

Пусть L_0 и M_0 – дифференциальные операторы того же вида, как L и M, соответственно, причем задача (3)–(4) для этих операторов однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Исследуемую задачу (3)–(4) включим в семейство задач, зависящих от параметра $\tau \in I = [0, 1]$:

$$L_\tau(u) \equiv \tau L(u) + (1-\tau)L_0(u) = 0,\ x \in \Omega, \tag{9}$$

$$M_\tau(u) \equiv \tau M(u) + (1-\tau)M_0(u) = 0,\ x \in S. \tag{10}$$

При $\tau = 1$ задача (9)–(10) переходит в задачу (3)–(4).

Определим преобразование A: элементу (u, v, τ), где $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $v \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\tau \in I$, ставим в соответствие пространство пар элементов $\{f, \varphi\}$, где $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{1+\alpha}(S)$, (оно определяется аналогично с помощью формулы (2) с нормой $|f|_{\Omega}^{(\alpha)} + |\varphi|_S^{(1+\alpha)}$).

Существование и единственность решения задачи (9)–(10) вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Пусть B_1 и B_2 – два банаховых пространства, u, v, τ – элементы из B_1, B_2 и I, соответственно. Предположим, что A – непрерывное отображение прямого произведения $B_1 \times B_2 \times I$ в банахово пространство B_1, имеющее при каждом v производную по Френе $A_u(u, v, \tau)$, непрерывную по (u, v, τ) и удовлетворяющее следующим условиям:*

1) для любого решения уравнения

$$A_u(u, v, \tau) = 0, \tag{11}$$

оператор $A_u(u, v, \tau)$ имеет ограниченный обратный;

2) множество всех решений уравнения (11), отвечающих всем $\tau \in I$, компактно в B_1;

3) при некотором фиксированном τ из I существует единственное решение и уравнения (11). Тогда при каждом $\tau \in [0, 1]$ уравнение $A_u(u, v, \tau) = 0$ однозначно разрешимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

2. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Наука, 1957.

О ДОПУСТИМЫХ КОМПЛЕКСАХ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

© С. В. Кольцова

Обозначим через $H_{n,2}$ многообразие двумерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Оно имеет размерность $3n - 6$. Почти всякую плоскость из $H_{n,2}$ можно задать уравнениями $x_i = \alpha_i x_{n-1} + \beta_i x_n + \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n-2$. *Комплексом* называется любое n-мерное подмногообразие в $H_{n,2}$. Если с каждой двумерной плоскостью в комплекс входит некоторое однопараметрическое семейство параллельных ей двумерных плоскостей, то такой комплекс назовем *комплексом общего положения.*

Пусть комплекс K общего положения допустим в смысле [1]. Тогда [2] его можно задать уравнениями:

$$x_i = \alpha_i x_{n-1} + \beta_i x_n + \gamma_i, \ i = 1, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\gamma_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_{n-2}} \cdot \gamma_{n-2} + \omega_i = 0, \ i = 1, \ldots, n-3, \tag{2}$$

$$\beta_i + \psi_i = 0, \ i = 1, \ldots, n-3, \tag{3}$$

где $\psi_i = \psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_{n-2})$, $\omega_i = \omega_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_{n-2})$ – достаточно хорошие функции от $n-1$ переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_{n-2}$. Таким образом, в качестве локальных координат на K мы берем n переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_{n-2}, \gamma_{n-2}$.

Теорема 1. *Для того чтобы комплекс K общего положения, заданный уравнениями (1), (2), (3) был допустим, необходимо и достаточно, чтобы функции ψ_i и ω_i удовлетворяли системе уравнений*

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_{n-2}} = \sum_{j=1}^{n-3} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta_{n-2}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_{n-2}} = \sum_{j=1}^{n-3} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta_{n-2}} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \omega_j}{\partial \beta_{n-2}} \right),$$