1

1

ISSN 1810-0198 Вестник ТГУ, т. 16, вып. 3, 2011

УДК 517.925

О ПРИМЕНЕНИИ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© **М. А. Кириченко, Н. А. Рубанов, Э. П. Агабекян**

Ключевые слова: метод последовательных приближений Пикара; построение нелокальных решений класса автономных дифференциальных уравнений; система и аттрактор Лоренца.

На основе метода последовательных приближений Пикара строится решение автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых представляет собой многомерный многочлен.

1. Введение. Рассмотрим автономную нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x); \tag{1}$$

здесь $x = (x^1, \dots, x^n)$ – векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1, \dots, f^n)$ – действительная векторная функция, каждый элемент которой f^i является многочленом переменных $x^1, \dots, x^n$.

Системы вида (1) давно представляют большой интерес для приложений, поскольку многие модели процессов различной физической, технической и экономической природы описываются подобными системами (см., например, [1] или [2, гл. 3]). Особый интерес системы вида (1) приобрели в последнее время, поскольку все известные системы, предполагаемо содержащие странные аттракторы, оказались именно такими системами [2, с. 109-185].

Стандартные методы численного анализа, используемые для получения решения системы (1), не учитывают конкретный вид ее правой части и, следовательно, не могут быть оптимальными. Целью настоящей работы является разработка метода построения решений системы (1), учитывающего то, что каждый элемент f^i функции f является многочленом переменных $x^1, \dots, x^n$.

2. Локальные решения системы. Для построения решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

прежде всего, заменим (1) интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x(\tau))\, d\tau. \tag{3}$$

Обозначим через α и q – некоторые положительное числа, а через Γ – компактную часть $(n+1)$-мерного евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемую неравенствами

$$|x - x_0| \le \alpha, \quad |t| \le q.$$

Пусть при этом $r \leq q$ – положительное число, которое будет определено ниже. Наряду с Γ введем в рассмотрение более "узкое" компактное множество $\Gamma_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задаваемое неравенствами

$$|x - x_0| \leq \alpha, \quad |t| \leq r. \tag{4}$$

Далее, обозначим через Π_r – множество непрерывных функций, графики, которых содержатся в Γ_r. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}\varphi = x_0 + \int\limits_0^t f(\varphi(\tau))\, d\tau. \tag{5}$$

Поскольку множество

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \alpha\} \tag{6}$$

компактно, найдется такое положительное число M, что для всех $x \in \Sigma$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq M. \tag{7}$$

Из условия

$$r \leq \frac{\alpha}{M} \tag{8}$$

следует, что оператор (5) отображает множество Π_r в себя (см., например, [3, с. 10]). Поэтому предположим, что число r в (4) выбрано так, что выполнено неравенство (8).

Заметим теперь, что система (1) имеет единственное решение $x(t)$ с начальным условием (2), определенное на некотором отрезке $[-T, T]$. Поэтому уравнение (3) также имеет единственное решение $x(t)$, определенное на отрезке $[-T, T]$. Для отыскания этого решения будем использовать метод последовательных приближений Пикара

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_N(\tau))\, d\tau, \tag{9}$$

где начальное приближение примем равным

$$x_1(t) \equiv x_0. \tag{10}$$

Несложно заметить, что существует некоторая итерация $\mathcal{A}_p\varphi = \underbrace{\mathcal{A}\ldots\mathcal{A}}_{p}\varphi$ оператора $\mathcal{A}$, являющаяся сжатием (см., например, [3, с. 11]). Следовательно, метод последовательных приближений (9),(10) на отрезке $[-r, r]$ равномерно сходится к решению $x(t)$. Остается построить последнее.

3. Нелокальные ограниченные решения Пусть теперь $x(t)$ – некоторое решение системы (1) с начальным условием (2), определенное для всех значений $t \geq 0$ и содержащееся при этих значениях t в множестве Σ, задаваемом равенством (6), в котором α – некоторое надлежащим образом подобранное положительное число. Тогда найдется такое достаточно большое положительное число M, что при $x \in \Sigma$ выполнено неравенство (7).

Для определенных выше чисел α и M зададим число $T = \dfrac{\alpha}{M}$. При всех значениях $t \geq 0$ положим

$$x_K(t) = x(t + (K-1)T), \quad K = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Легко видеть, что каждая из функций семейства (11) является решением системы (1), определенным для всех значений $t \geq 0$ и содержащимся при этих значениях t в множестве Σ.

С другой стороны, в силу ограниченности решения $x(t)$ число M изначально может быть подобрано так, чтобы при выполнении для всех значений $K = 1, 2, \ldots$ условий

$$|x - x_K(t)| \leq \alpha, \quad |t| \leq T$$

было также выполнено неравенство (7).

4. Приближенное построение решений. Вновь рассмотрим решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием (2), определенное для всех значений $t \geq 0$. Обозначим через

$$x(0), x(T), \ldots, x(KT), \ldots \tag{12}$$

– положения системы (1) в моменты времени

$$0, T, \ldots, KT, \ldots \tag{13}$$

Далее, введем в рассмотрение оператор g^t сдвига вдоль решений системы дифференциальных уравнений (1). Имеем $x(t) = g^t x_0$. В частности, $x(T) = g^T x_0$, и, следовательно,

$$x(KT) = \underbrace{g^T \ldots g^T}_{K} x_0, \quad K = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Таким образом, если оператор g^t построен, соотношение (14) однозначно задает положения (12) системы (1) в моменты времени (13).

5. Численный эксперимент. В качестве простейшего приложения приведенной схемы вычислений рассмотрим задачу приближенного построения решений системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = sx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{15}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, где σ, s и b – некоторые положительные числа, играющие роль параметров данной системы. Для простоты ограничимся рассмотрением следующего случая классических значений параметров [1]: $\sigma = 10, \quad s = 28, \quad b = 8/3$.

Положим

$$c = (x_0, y_0, z_0), \quad g_N^t c = (x_N^t, y_N^t, z_N^t), \quad N = 1, 2, \ldots$$

Для заданной точности ε признаком окончания итеративного процесса построения оператора g_N^t в силу критерия сходимости Коши служило выполнение неравенства

$$\max_{0 \leq t \leq r} |g_N^t c - g_{N+1}^t c| < \varepsilon,$$

а вычисления выполнялись с точностью до сорокового знака. Траектории системы (15) строились для широкого спектра начальных условий. Здесь, в частности, рассмотрим случай траектории $\mathcal{K}$, описываемой решением с начальным условием

$$x_0 = -15.720831,\ y_0 = -16.587193,\ z_0 = 36.091132, \tag{16}$$

взятым в непосредственной близости от аттрактора.

На рис. 1 приведена проекция этой траектории на плоскость xOy.

Таблица 1: Решение системы (15),(16), описывающее типическую траекторию $\mathcal{K}$.

№	t	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
1	0	-15.720831	-16.587193	36.091132
2	17.334	-15.659134	-16.566101	35.954224
3	45.017	-15.652555	-16.566140	35.938103
4	67.104	-15.689783	-16.635305	35.964610
5	86.686	-15.812414	-16.750982	36.164029

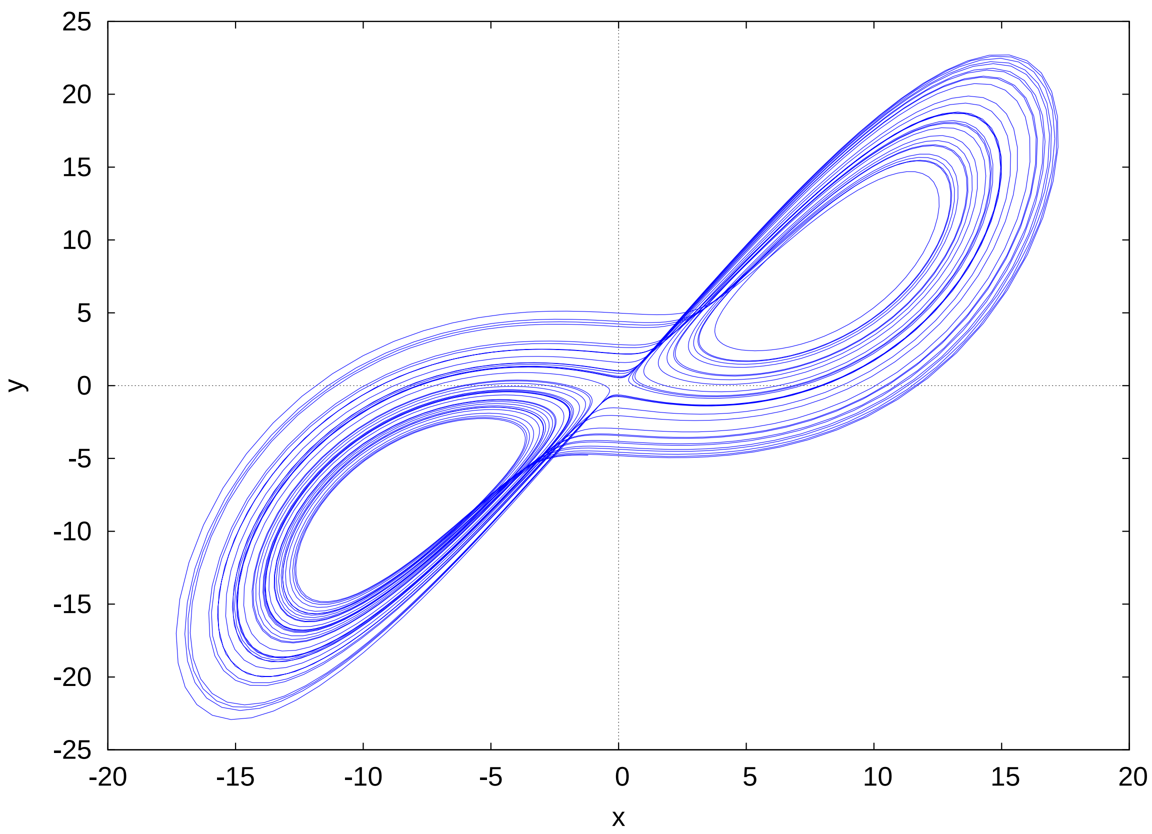

Рис. 1: Проекция на плоскость xOy дуги типической траектории $\mathcal{K}$, построенной по точкам (14) на отрезке времени $[0, 90]$.

6. Выводы. Не обнаружено каких-либо убедительных признаков существования циклов в системе Лоренца (см. табл. 1); чтобы полностью убедиться в этом достаточно, например, построить векторное поле системы (15) в приведенных здесь точках. Поэтому поскольку существенного снижения скорости движения точки не зафиксировано, скорее всего, можно считать, что $\mathcal{K}$ – компактное минимальное множество, состоящее из незамкнутых рекуррентных траекторий (см., например, [4, с. 402]). Эти траектории, возможно, не являются даже почти периодическими, так как некоторое локальное разбегание типических траекторий в ходе вычислений наблюдалось (см., например, [4, с. 415]).

ЛИТЕРАТУРА

1 . *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Athmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.

2 . *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004.

3 . *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.

4 . *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: URSS, 2004.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-07-00136, № 11-07-00098).

Поступила в редакцию 15 мая 2011 г.

Kirichenko M.A., Rubanov N.A., Agabekyan E.P. About application the method of successive approximations of picard for construction non-local solutions of autonomous systems of ordinary differential equations. Based on the method of successive approximations of Picard based solution of autonomous systems of ordinary differential equations, the right side which is a multivariate polynomial.

Key words: the method of successive approximations of Picard; the construction non-local solutions of a class of autonomous differential equations; the system and the Lorenz attractor.

Кириченко Михаил Александрович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», e-mail: kirimedia@gmail.com

Рубанов Никита Александрович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», e-mail: nikitarubanov@gmail.com

Агабекян Эмиль Паргевович, Тамбоский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры «Экономический анализ», e-mail: emill2007@yandex.ru