

позволяет посмотреть на изучаемые разделы в целом, определить его связи с уже изученным материалом, высвободить время для решения задач. Изучение материала и контроль ведутся на нескольких уровнях сложности, и ученик вправе сам выбрать соответствующий его потребностям уровень. Практика показывает, что, овладев определенным уровнем сложности, школьники стремятся попробовать свои силы на более высоком уровне.

Мониторинг дальнейшей учебной и научной деятельности выпускников лицея-интерната за 15 лет существования показывает, что более 60% выпускников оканчивает вуз с красным дипломом. 184 человека, получивших высшее образование, обучалось или обучается в очной или заочной аспирантуре (38 защитили кандидатскую диссертацию). На наш взгляд, приведенные данные на практике подтверждают жизнеспособность и необходимость системы непрерывного образования.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Petrova I.V., Isaeva O.V. Succession of teaching in the system school–high school. The paper presents aspects of succession-raising in the educational process in terms of interaction «school–university». The authors experience of working in the region is presented.

Key words: succession; the educational process; training; technique training and education.

Петрова Ирина Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, учитель высшей категории «Политехнического лицея-интерната при Тамбовском государственном техническом университете», ассистент кафедры высшей математики, e-mail: irina6362@yandex.ru.

Исаева Ольга Вячеславовна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат химических наук, учитель высшей категории «Политехнического лицея-интерната при Тамбовском государственном техническом университете», доцент кафедры физики, e-mail: olgavil@rambler.ru.

УДК 517.972.9

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

© А.Н. Печень

Ключевые слова: управление квантовыми системами.

В работе рассматриваются критические точки важного класса целевых функционалов для моделей управляемых квантовых систем. Для моделей замкнутых квантовых систем показано существование ловушек второго рода — критических точек, не являющихся глобальными максимумами, в которых гессиан целевого функционала отрицательно полуопределен. Для моделей открытых квантовых систем сформулированы условия отсутствия ловушек (максимумов, не являющихся глобальными).

Математическое исследование вопросов управления квантовыми системами имеет как фундаментальный, так и практический интерес в связи с приложениями в различных разделах физики и химии, включающих задачи создания заданных атомных и молекулярных

квантовых состояний, наносистем с заданными свойствами, оптимальное управление химическими реакциями с помощью лазеров.

Состояние n -уровневой квантовой системы в момент времени t описывается матрицей плотности ρ_t , являющейся положительной матрицей (в общем случае с комплексными элементами) с единичным следом. Обозначим $\mathcal{D}_n = \{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \rho \geq 0, \text{Tr} \rho = 1\}$ (где Tr обозначает след матрицы) — множество всех матриц плотности n -уровневой системы. Пусть $\rho_{u,T}$ — матрица плотности системы в заданный конечный момент времени T , эволюционирующая из некоторого начального состояния ρ_0 в момент времени $t = 0$. Широкий класс задач квантового управления описывается целевыми функционалами вида

$$J[u] = \text{Tr}[\rho_{u,T}O] \rightarrow \max, \quad (1)$$

где O — самосопряженный оператор (целевая наблюдаемая) системы.

Актуальным вопросом является изучение ландшафтов управления, определяемых зависимостью целевого функционала от управляющего воздействия [1–5]. В докладе рассматриваются ландшафты управления квантовыми системами, соответствующие целевым функционалам вида (1) для замкнутых и открытых квантовых систем. Пусть $J_{\max} = \max_u J[u]$ — глобальный максимум J . Ловушками называются управления u , являющиеся локальными максимумами J (со значениями $J[u] < J_{\max}$). Ловушками второго рода называются управления u , являющиеся критическими точками J со значениями $J[u] < J_{\max}$, в которых гессиан $H = \delta^2 J / \delta u^2$ отрицательно полуопределен ($H \leq 0$). Количество и структура ловушек, в т. ч. второго рода, в ландшафте управления влияет на сложность нахождения глобального максимума с использованием локальных алгоритмов, в связи с чем исследование ловушек является важной математической задачей.

Замкнутые квантовые системы. Если система не взаимодействует с окружением, т. е. является замкнутой, то эволюция ее матрицы плотности $\rho_{u,t} \in \mathcal{D}_n$ под действием управления $u(t)$ описывается уравнением

$$\frac{d\rho_{u,t}}{dt} = -i[H_0 + Vu(t), \rho_{u,t}], \quad \rho_{u,t}|_{t=0} = \rho_0. \quad (2)$$

Здесь H_0 и V — самосопряженные операторы, ρ_0 — начальная матрица плотности системы, $u(t)$ — вещественная функция. Уравнение (2) индуцирует унитарное преобразование $\rho_0 \rightarrow \rho_{u,T} = U_u \rho_0 U_u^\dagger$. Определим следующую функцию на унитарной группе:

$$J[U] = \text{Tr}[U \rho_0 U^\dagger O]. \quad (3)$$

$J[U]$ называется кинематическим представлением целевого функционала (1) для замкнутых квантовых систем; исходный функционал $J[u]$ называется динамическим. В [1] было показано отсутствие ловушек у $J[U]$, из чего было сделано предположение о том, что $J[u]$ вида (1) для замкнутых квантовых систем обладают свойствами, исключающими существование ловушек, в т. ч. второго рода. Это предположение неверно, что показывает доказанная в [5] теорема.

Т е о р е м а 1. *Целевые функционалы вида (1) для замкнутых квантовых систем имеют ловушки второго рода для широкого класса ρ_0, H_0, V , и O .*

Доказательство использует явные выражения для градиента и гессиана функционала $J[u]$, с помощью которых путем вычислений показывается, что специальные постоянные управления являются ловушками второго рода [5].

Открытые квантовые системы. Если система взаимодействует с окружением, то ее эволюция описывается различными, более общими, чем (2), мастер-уравнениями, индуцируемыми в общем случае неунитарными отображениями вида $\rho_0 \rightarrow \rho_{u,T} = \sum_{i=1}^{n^2} K_{u,i} \rho_0 K_{u,i}^\dagger$, где

матрицы $K_{u,i} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ зависят от управления и удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n^2} K_{u,i}^\dagger K_{u,i} = \mathbb{I}$. Данное условие означает, что множество $\{K_{u,i}\}_{i=1}^{n^2}$ можно отождествить с точкой комплексного многообразия Штифеля $V_n(\mathbb{C}^{n^2})$ (точнее, существуют различные физически эквивалентные множества $\{K_{u,i}\}_{i=1}^{n^2}$, так что требуется рассматривать фактор-многообразие $W_n = V_n(\mathbb{C}^{n^2}) / \sim$ по этому отношению эквивалентности; класс эквивалентности элемента $\{K_{u,i}\}_{i=1}^{n^2}$ обозначим w_u). Целевой функционал (1) в кинематическом представлении для открытых квантовых систем имеет вид:

$$J[\{K_i\}] = \text{Tr} \left[\sum_{i=1}^{n^2} K_i \rho_0 K_i^\dagger O \right]. \quad (4)$$

Т е о р е м а 2. *Целевая функция (4) не имеет ловушек для любых ρ_0 и O . Все ее критические точки — глобальные максимумы, минимумы и седловые точки, число и расположение которых зависят от степени вырождения матриц ρ_0 и O .*

Доказательство для $n = 2$ содержится в [3]. Случай общего n рассмотрен в [4]. Если отображение $u \rightarrow w_u \in W_n$ из пространства всех управлений в W_n сюръективно и невырожденно, то из теоремы 2 следует отсутствие ловушек у функционала $J[u]$ для открытых квантовых систем. Вопрос проверки этого условия для конкретных квантовых систем остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabitz H., Hsieh M., Rosenthal C. Quantum optimally controlled transition landscapes // Science. 2004. № 303. P. 1998–2001.
2. de Fouquieres P., Schirmer S.G. Quantum control landscapes: a closer look // Preprint arXiv:1004.3492.
3. Pechen A.N., Prokhorenko D., Wu R., Rabitz H. Control landscapes for two-level open quantum systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. № 41. C. 045205.
4. Wu R., Pechen A.N., Rabitz H., Hsieh M., Tsou B. Control landscapes for observable preparation with open quantum systems // J. Math. Phys. 2008. № 49. C. 022108.
5. Pechen A.N., Tannor D.J. Are there traps in quantum control landscapes? // Physical Review Letters. 2011. № 106. C. 120402.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00828-а, грантом НШ-7675.2010.1 и Marie Curie International Incoming Fellowship в рамках 7-й Рамочной программы ЕС.

Pechen A.N. Critical points of objective functions for quantum control problems. In this talk we consider critical points for a wide class of objective functionals for controlled quantum systems. For closed quantum control systems, we show the existence of second order traps — critical points which are not global maxima and where Hessian of the objective functional is negative semidefinite. For open quantum systems, the conditions for the absence of traps (maxima which are not global) are provided.

Key words: quantum control.

Печень Александр Николаевич, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела математической физики, e-mail: apechen@gmail.com.