УДК 519.1

Конечная интегральная геометрия [1]

© В. Ф. Молчанов, С. В. Кольцова, Е. В. Водолажская, М. С. Ильина

Ключевые слова: преобразование Радона; булеан; конечные поля; кольца классов вычетов.

Рассматриваются преобразования Радона на конечных множествах – для булеана, плоскости над конечным кольцом, конечных графов – и находятся формулы обращения.

В настоящей работе мы рассматриваем несколько случаев преобразования Радона на конечных множествах: на булеане (два преобразования), на плоскости над конечным кольцом, на конечных графах (в частности, находим функцию Мебиуса на корневых деревьях). Исследования в области конечной интегральной геометрии были начаты в [7], см. также [10]. Основное внимание там было уделено трём конечным аналогам классического преобразования Радона: в n-мерных аффинных и проективных пространствах над конечным полем и на булеане.

§ 1. Преобразования Радона на конечных множествах

Для конечного множества X обозначим через $|X|$ количество элементов в X и через $L(X)$ пространство функций $f(x)$ на X со значениями в $\mathbb{C}$. Его размерность равна $|X|$.

Пусть X и Y – два конечных множества, $x \prec y$ – некоторое отношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ (это отношение есть некоторое подмножество в $X \times Y$). Преобразование Радона – это линейный оператор $R : L(X) \to L(Y)$, задаваемый формулой

$$(Rf)(y) = \sum_{x \prec y} f(x). \tag{1.1}$$

Основные задачи – описать ядро и образ оператора R и, если он инъективен, написать формулу обращения, то есть найти R^{-1}.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.1.1.2.1474 и Темпланом 1.5.07.

Формулу (1.1) можно переписать так:

$$(Rf)(y) = \sum_{x \in X} R(y,x) f(x),$$

где матрица $R(y,x)$ имеет $|Y|$ строк и $|X|$ столбцов, она есть

$$R(y,x) = \begin{cases} 1, & x \prec y, \\ 0, & x \not\prec y. \end{cases}$$

Сопряженный оператор $R^* : L(Y) \to L(X)$ дается формулой

$$(R^* F)(x) = \sum_{x \prec y} F(y),$$

его матрица есть $R^*(x,y) = R(y,x)$. Оператор $T = R^* R$ действует в $L(X)$. Его матрица $T(x,u)$ есть матрица инциденций: число $T(x,u)$ равно количеству $y \in Y$ таких, что $x \prec y$ и $u \prec y$. Предположим, что T обратим. Тогда

$$R^{-1} = T^{-1} R^*, \tag{1.2}$$

или

$$E = T^{-1} R^* R. \tag{1.3}$$

Как и в [5], мы полагаем $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$, знак сравнения $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2, мы используем следующие обозначения для "обобщенных степеней": $a^{[m]} = a\,(a+1)\dots(a+m-1)$. Для таких степеней справедлива биномиальная формула, см. [6] гл. I, № 35:

$$(a+b)^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{[m-k]} b^{[k]}. \tag{1.4}$$

§ 2. Преобразования Радона на булеане

Пусть M – множество с n элементами, например, $M = \{1, 2, \dots, n\}$. *Булеан* B – это множество подмножеств множества M с частичным упорядочением – отношением включения. Он распадается в сумму

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n,$$

где B_k есть совокупность k-элементных подмножеств $z \subset M$, т. е. B_k состоит из $z \subset M$ таких, что $|z| = k$. Количество элементов в B_k равно

$$|B_k| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,$$

Для подмножества $w \subset M$ (то есть $w \in B$) обозначим $\overline{w} = M \setminus w$.

Мы рассмотрим два преобразования Радона на булеане B, см. пункты 2.2 и 2.3. Мы используем [4].

Фиксируем число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k \leqslant n/2$.

2.1. *Алгебра операторов в $L(B_k)$, зависящих от числа пересечений*

Алгебра всех операторов в $L(B_k)$ обозначается через $\mathrm{End}(L(B_k))$. Матрица оператора A есть функция $A(z,u)$ двух переменных $z,u \in B_k$. Умножению операторов $C = AB$ отвечает матричное умножение функций:

$$C(z,u) = \sum\nolimits_{v \in B_k} A(z,v)B(v,u). \tag{2.1}$$

Мы будем отождествлять оператор с функцией от двух переменных – его матрицей.

Обозначим через $\mathcal{A}(B_k)$ подпространство функций $A(z,u)$, зависящих только от количества элементов в пересечении $z \cap u$, то есть от $|z \cap u|$:

$$A(z,u) = a_p, \ p = |z \cap u|, \tag{2.2}$$

где a_p – некоторые числа. Размерность этого пространства равна $k+1$, базис образован следующими функциями $A_0, A_1, \ldots, A_k$:

$$A_i(z,u) = \delta_{k-i,p}, \ p = |z \cap u|, \tag{2.3}$$

$\delta_{i,j}$ – дельта Кронекера. В частности, A_0 есть единичная матрица (единичный оператор): $A_0(z,u) = \delta(z,u)$, где $\delta(z,z) = 1$ и $\delta(z,u) = 0$ при $z \neq u$. Эти матрицы образуют так называемую схему Джонсона [1].

Теорема 2.1 *Подпространство $\mathcal{A}(B_k)$ есть подалгебра в алгебре* $\mathrm{End}(L(B_k))$.

Доказательство. Пусть функции $A(z,u)$ и $B(z,u)$ задаются по (2.2) числами a_p и b_p, соответственно. Вычислим $C(z,u)$ из (2.1). Пусть $|z \cap u| = k - m$. Обозначим количество элементов множества $M = \{1,2,\ldots,n\}$ в пересечениях подмножества $v \in B_k$ с подмножествами $z \setminus u$, $u \setminus z$, $z \cap u$, $\overline{z \cup u}$ через p, q, r, s, соответственно $(p+q+r+s=k)$. Тогда

$$C(z,u) = \sum a_{p+r} b_{q+r} \binom{m}{p}\binom{m}{q}\binom{k-m}{r}\binom{n-k-m}{s}, \tag{2.4}$$

где суммирование происходит по целым $p,q,r \geqslant 0$ таким, что $p+q+r \leqslant k$ (поскольку $s = k-(p+q+r)$). Мы видим, что $C(z,u)$ зависит только от m, или от $k - m = |z \cap u|$. $\square$

Разложим произведение A_iA_j по базису $A_0, A_1, \ldots, A_k$:

$$A_iA_j = \sum_{m=0}^{k} c_{ij}^m A_m.$$

Формулы (2.4) и (2.3) дают выражения для структурных констант c_{ij}^m:

$$\begin{aligned} c_{ij}^m &= \sum \delta_{k-i,p+r}\delta_{k-j,q+r}\binom{m}{p}\binom{m}{q}\binom{k-m}{r}\binom{n-k-m}{k-p-q-r} \\ &= \sum_{r=0}^{k}\binom{m}{k-i-r}\binom{m}{k-j-r}\binom{k-m}{r}\binom{n-k-m}{i+j+r-k}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

фактически суммирование идет по таким r, для которых биномиальные коэффициенты не равны нулю: $r \leqslant k-i$, $r \leqslant k-j$, $r \leqslant k-m$ и т. д.

Пусть $T(A_i)$ обозначает оператор умножения на A_i в алгебре $\mathcal{A}(B_k)$. Матрица этого оператора в базисе $A_0, A_1, \ldots, A_k$ есть (c_{ij}^m), где m – номер строки, j – номер столбца. Ненулевые элементы в этой матрице располагаются на местах (m,j), для которых $-i \leqslant m-j \leqslant i$, $m+j \geqslant i$. В частности, для $T(A_0)$ – это единичная матрица, для $T(A_1)$ – тридиагональная матрица, для $T(A_k)$ – треугольная матрица с нулями выше побочной диагонали. Явные выражения матриц $T(A_i)$ для произвольного i достаточно громоздки. Наиболее прозрачные выражения имеются для $i=1$ и $i=k$. Как раз $T(A_k)$ нам потребуется дальше.

Для $i=1$ сумма в (2.5) состоит из двух слагаемых: $r=k-1$ и $r=k$, для $i=k$ – из одного: $r=0$. Именно, матрица $T(A_1)$ имеет следующие матричные элементы:

$$c_{1j}^m = \begin{cases} m^2, \ j=m-1, \\ m(n-2m), \ j=m, \\ (k-m)(n-k-m), \ j=m+1, \end{cases}$$

остальные c_{1j}^m равны нулю (эти формулы для $T(A_1)$ имеются в [1]), а матрица $T(A_k)$ имеет следующие матричные элементы:

$$c_{kj}^m = \binom{m}{k-j}\binom{n-k-m}{j},$$

так что $c_{kj}^m = 0$ для $m+j<k$. Следовательно,

$$A_k A_j = \sum_{m=k-j}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n-k-m}{j} A_m. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2 *В алгебре $\mathcal{A}(B_k)$ обратный элемент A_k^{-1} для A_k есть*

$$A_k^{-1} = \binom{n-k}{k}^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(n-2k)^{[k-j]}}{(-k)^{[k-j]}} A_j. \tag{2.7}$$

Доказательство. Разложим A_k^{-1} по базису $A_0, A_1, \ldots, A_k$:

$$A_k^{-1} = \sum_{j=0}^{k} x_j \, A_j. \tag{2.8}$$

Нам надо найти x_j. Умножим (2.8) на A_k, получим

$$\sum_{j=0}^{k} x_j \, A_k \, A_j = A_0 \ (=E).$$

Подставим сюда (2.6), получим для x_j следующую линейную систему уравнений:

$$\sum_{j=k-m}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n-k-m}{j} x_j = \delta_{m0}, \quad m=0,1,\ldots,k. \tag{2.9}$$

Первое уравнение ($m = 0$) есть

$$\binom{n-k}{k} x_k = 1,$$

откуда

$$x_k = \binom{n-k}{k}^{-1}. \tag{2.10}$$

В остальных уравнениях системы (2.9) (для них $m = 1, 2, \ldots, k$) сделаем замену $j = k - s$, получим систему

$$\sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \binom{n-k-m}{k-s} x_{k-s} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.11}$$

Обозначим $N = n-2k$ и представим второй биномиальный коффициент в (2.11) в следующем виде:

$$\binom{n-k-m}{k-s} = (-1)^m \frac{(N+1)^{[k-m]}}{k!} \cdot (-N)^{[m-s]}(-k)^{[s]}. \tag{2.12}$$

Тогда система (2.11) после сокращения на множитель, стоящий в правой части (2.12) до точки, превращается в следующую систему:

$$\sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} (-N)^{[m-s]}(-k)^{[s]} x_{k-s} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.13) с (1.4), видим, что в качестве решений системы (2.13) надо взять

$$x_{k-s} = \frac{N^{[s]}}{(-k)^{[s]}}\, x_k, \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Вместе с (2.10) это дает формулу (2.7). □

2.2. *Преобразование Радона – первый вариант*

Множества X и Y из § 1 – это B_k и B_{n-k}, соответственно, отношение $\prec$ – это отношение включения. Следовательно, преобразование Радона R_k действует из $L(B_k)$ в $L(B_{n-k})$ по формуле

$$(R_k f)(w) = \sum_{z \subset w} f(z), \quad z \in B_k, \quad w \in B_{n-k}. \tag{2.15}$$

так что матрица $R(w, z)$ есть

$$R(w,z) = \begin{cases} 1, & z \subset w, \\ 0, & z \not\subset w. \end{cases}$$

Множества B_k и B_{n-k} имеют одно и то же количество элементов, поэтому пространства $L(B_k)$ и $L(B_{n-k})$ изоморфны, так что матрица $R(w, z)$ квадратная.

Теорема 2.3 *Оператор R_k обратим, обратный оператор R_k^{-1} дается формулой*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(n-2k)^{[m]}}{(-k)^{[m]}} \sum\nolimits_{|w\cap z|=k-m} (R_k f)(w). \tag{2.16}$$

Доказательство. Отождествим множество B_{n-k} с множеством B_k: элементу $w \in B_{n-k}$ сопоставим элемент $\overline{w} \in B_k$. Тогда преобразование Радона R_k превратится в преобразование A пространства $L(B_k)$, которое задается формулой

$$(Af)(u) = \sum\nolimits_{|z\cap u|=0} f(z), \quad z, u \in B_k.$$

Это преобразование A есть не что иное, как оператор A_k из пункта 2.1. Обратное преобразование A_k^{-1} найдено в теореме 2.2, а именно,

$$(A_k^{-1}F)(z) = \sum_{s=0}^{k} x_{k-s}\, (A_{k-s}F)(z),$$

где x_{k-s} даются формулами (2.14) и (2.10). По (2.3) получаем

$$(A_k^{-1}F)(z) = \sum_{s=0}^{k} x_{k-s} \sum\nolimits_{|z\cap u|=s} F(u). \tag{2.17}$$

Вернемся к B_{n-k}. Функция $F(u)$ на B_k становится функцией $F(w)$, где $w = \overline{u}$, на B_{n-k}. Преобразование A_k^{-1} превращается в обратное преобразование Радона R_k^{-1}. Если $|z \cap \overline{w}| = s$, то $|z \cap w| = k - s$. Поэтому формула (2.17) превращается в формулу

$$(R_k^{-1}F)(z) = \sum_{s=0}^{k} x_{k-s} \sum\nolimits_{|z\cap w|=k-s} F(w), \ w \in B_{n-k}.$$

Возьмем здесь $F = R_k f$, тогда $(R_k^{-1}F)(z) = f(z)$, и мы получим (2.16). $\square$

2.3. *Преобразование Радона – второй вариант*

Сейчас множества X и Y из § 1 – это соответственно B_k и

$$C_k = B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \ldots \cup B_{n-1} \cup B_n.$$

Отношение $\prec$ есть снова отношение включения. Следовательно, преобразование Радона S_k действует из $L(B_k)$ в $L(C_k)$ точно по такой же формуле, что и (2.15):

$$(S_k f)(w) = \sum_{z\subset w} f(z), \quad z \in B_k, w \in C_k. \tag{2.18}$$

Теорема 2.4 *Оператор S_k обратим, обратный оператор S_k^{-1} дается формулой*

$$f(z) = \sum_{w \supset z} (-1)^{l-k-1} \, (S_k f)(w), \quad z \in B_k, \quad w \in B_l \subset C_k. \tag{2.19}$$

Доказательство. Подставим (2.18) в правую часть (2.19), получим ее в виде

$$\sum_u D(z,u) f(u), \quad z \in B_k, \tag{2.20}$$

где

$$D(z,u) = \sum_w (-1)^{l-k-1}, \tag{2.21}$$

суммирование в (2.20) идет по $u \in B_k$, а в (2.21) по $w \in B_l \subset C_k$ таким, что $w \supset (z \cup u)$. Надо доказать, что $D(z,u)$ есть дельта-функция $\delta(z,u)$. Обозначим $|z \cap u| = k-m$, $m = 0, 1, \ldots, k$. Пусть $l = k+1, k+2, \ldots, n$. Количество элементов $w \in B_l$, содержащих $z \cup u$, равно

$$\binom{n-k-m}{l-k-m}.$$

Поэтому

$$D(z,u) = \sum_{l=k+1}^{n} (-1)^{l-k-1} \binom{n-k-m}{l-k-m}.$$

Обозначим $n-k-m = s$, $l-k-m = r$, тогда

$$D(z,u) = \sum_{r=1-m}^{s} (-1)^{r+m-1} \binom{s}{r}. \tag{2.22}$$

Альтернированная сумма биномиальных коэффициентов равна нулю, поэтому сумма (2.22) при $m = 1, 2, \ldots, k$ равна 0, а при $m = 0$ она равна 1. Следовательно, $D(z,u) = \delta(z,u)$. $\square$

§ 3. Преобразование Радона на графах

В этом параграфе мы изучаем преобразование Радона R на *графах*. Оно сопоставляет функции f, определенной на вершинах графа G, функцию Rf, определенную на ребрах, значение которой на ребре x равно сумме значений функции f на концах этого ребра ("интеграл" функции f по ребру x). Мы описываем ядро и образ преобразования R и находим формулу обращения в случае, когда R инъективно. Кроме того, мы рассматриваем *комплексы* в графе G. Комплекс есть подграф в G с теми же вершинами, количество ребер в нем равно количеству вершин. Мы даем характеристику *допустимых* комплексов, то есть таких, что ограничение преобразования R на них инъективно. Мы опираемся на [11].

3.1. *Предварительные сведения*

В этом пункте мы напомним необходимый материал из теории графов (мы опираемся на [8]) и дадим некоторые конструкции.

Граф G состоит из конечного непустого множества V *вершин* и множества X двухточечных подмножеств множества V, называемых *ребрами*. Мы пишем $G = (V, X)$. Таким образом, ребро $x \in X$ есть неупорядоченная пара различных вершин $u, v \in V$. Мы говорим, что ребро x соединяет u и v, и в этом случае мы пишем $x = uv$. Следовательно, мы имеем дело с *простыми* графами: без петель и без кратных ребер.

Подграф графа $G = (V, X)$ – это граф $G' = (V', X')$, такой что $V' \subset V$, $X' \subset X$.

Пусть $G' = (V', X')$, $G'' = (V'', X'')$ – два подграфа графа G. Объединение $G' \cup G''$ есть подграф $(V' \cup V'', X' \cup X'')$, пересечение $G' \cap G''$ есть подграф $(V' \cap V'', X' \cap X'')$.

Маршрут A в графе G – это чередующаяся последовательность вершин и ребер:

$$u = v_0, x_1, v_1, x_2, \ldots, v_{m-1}, x_m, v_m = v, \tag{3.1}$$

такая что $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, \ldots, m$. Мы говорим, что маршрут A соединяет вершины u и v. Число m называется длиной маршрута, обозначается $\ell(A)$. Вершины v_0 и v_m называются началом и концом маршрута A, соответственно.

Пусть у нас есть два маршрута: маршрут A, идущий из u в v, и маршрут B, идущий из v в w. Назовем суммой маршрутов A и B маршрут $A + B$, идущий из u в w по вершинам и ребрам маршрутов A и B.

Для маршрута A, идущего из u в v, см. (3.1), мы называем обратным маршрутом и обозначаем через $(-A)$ маршрут, пробегающий вершины и ребра (3.1) в обратном порядке от v до u, то есть маршрут

$$v = v_m, x_m, v_{m-1}, \ldots, v_1, x_1, v_0 = u.$$

Если начало и конец маршрута совпадают, то маршрут называется *замкнутым маршрутом*. Если все вершины маршрута различны (за исключением, возможно, первой и последней), то этот маршрут называется *цепью*. Если начало и конец цепи совпадают, то эта цепь называется *замкнутой цепью*. Пусть C – замкнутая цепь (3.1). Мы определяем *простой цикл* (цикл для краткости) как подграф (не маршрут!) Z графа G, состоящий из вершин v_i и ребер x_i, участвующих в (3.1). Длина цикла – это количество ребер в нем.

Граф называется связным, если всякие его вершины можно соединить маршрутом. Произвольный граф есть дизъюнктное объединение его связных компонент – максимальных связных подграфов в нем.

Расстояние $d(u, v)$ между вершинами u, v есть длина кратчайшей цепи, соединяющей u с v. Расстояние есть метрика.

Для вершин u и v рассмотрим какую-нибудь кратчайшую цепь, соединяющую u с v, и обозначим через $[u, v]$ *подграф*, состоящий из вершин и ребер этой цепи. Назовем этот подграф *отрезком*, соединяющим u с v. Отрезок, соединяющий u с v, определен неоднозначно.

Пусть G – граф (V, X), пусть V и X состоят из n и r элементов, соответственно. Число

$$\chi(G) = n - r$$

называется *эйлеровой характеристикой* графа G.

Пусть граф G имеет s связных компонент. Тогда $\chi(G) \leqslant s$, так что для связного графа G мы имеем $\chi(G) \leqslant 1$.

Связный граф без циклов называется *деревом*. Связный граф G является деревом тогда и только тогда, когда $\chi(G) = 1$.

Пусть u, v, w – три различные вершины графа G. Назовем подграф $T = [u,v] \cup [v,u] \cup [u,w]$ *треугольником* с вершинами u, v, w. Треугольник определен неоднозначно. Но *периметр* этого треугольника,

$$p(T) = p(u,v,w) = d(u,v) + d(v,w) + d(u,w), \tag{3.2}$$

определен корректно.

Пусть M – конечное множество. Скалярное произведение функций f, g из $L(M)$ есть число

$$(f,g) = \sum_{x \in M} f(x)\overline{g(x)}.$$

Дельта-функция $\delta_a(x)$, сосредоточенная в точке $a \in M$, определяется следующим образом:

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a, \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Дельта-функции δ_a, $a \in M$, образуют базис в $L(M)$.

Для маршрута A в графе $G = (V, X)$, см. (3.1), введем следующую функцию из $L(X)$ ("знакопеременную дельта-функцию"):

$$\varepsilon_A(x) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \delta_{x_i}(x).$$

3.2. *Преобразование Радона на графах*

Пусть $G = (V, X)$ – граф с n вершинами и r ребрами. Сейчас множества X и Y из § 1 – это соответственно V и X, отношение $\prec$ есть снова отношение включения. Следовательно, *преобразование Радона* на графе G – это оператор $R : L(V) \to L(X)$, который каждой функции $f \in L(V)$ сопоставляет функцию $Rf \in L(X)$, значение которой на ребре $x = uv$ равно сумме значений функции f на его концах u и v ("интеграл" от функции f по ребру x):

$$(Rf)(x) = f(u) + f(v), \quad x = uv. \tag{3.3}$$

Преобразование Радона на графе G коммутирует с ограничением на подграфы. Именно, пусть $G' = (V', X')$ – подграф графа G, пусть R' – преобразование Радона на G'. Обозначим через f' и φ' ограничения функций $f \in L(V)$ и $\varphi \in L(V)$ на V' и X', соответственно. Тогда

$$R'f' = (Rf)'.$$

Следовательно, мы можем обозначать для краткости преобразования Радона на G и на его подграфах одной и той же буквой R.

Для исследования преобразования Радона достаточно рассматривать *связные графы*.

Пусть маршрут A длины $m = \ell(A)$ связывает вершину u с вершиной v, см. (3.1). Скалярное произведение функции Rf и функции ε_A равно

$$(Rf, \varepsilon_A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} (Rf)(x_i). \tag{3.4}$$

Лемма 3.1 *Мы имеем*

$$(Rf, \varepsilon_A) = f(u) - (-1)^{\ell(A)} f(v). \tag{3.5}$$

В частности, пусть A – замкнутый маршрут. Если его длина четна, то

$$(Rf, \varepsilon_A) = 0, \tag{3.6}$$

а если его длина нечетна, то

$$(Rf, \varepsilon_A) = 2f(u). \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу (3.3) значения функции f в вершинах между u и v в сумме (3.4) взаимно уничтожаются. □

Лемма 3.2 *Для связного графа G размерность ядра* Ker R *не больше единицы:*

$$\dim \operatorname{Ker} R \leqslant 1. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{Ker} R$. Фиксируем вершину $v \in G$. В соседних вершинах функция f должна иметь значение $(-f(v))$, так что $f(u) = -f(v)$ для $d(u, v) = 1$. Для произвольной $u \in G$ мы получаем:

$$f(u) = (-1)^{d(u,v)} f(v). \tag{3.9}$$

Следовательно, значения функции f в вершинах $u \in G$ полностью определяются ее значением в фиксированной вершине. □

Будем говорить, что связный граф G имеет *класс* $c = 0$ или $c = 1$, если $\dim \operatorname{Ker} R = c$. Если $c = 0$, то оператор R инъективен.

Теорема 3.3 *Связный граф G имеет класс 0 (то есть R инъективен) тогда и только тогда, когда в графе G существует треугольник с нечетным периметром. Связный граф G имеет класс 1 тогда и только тогда, когда в графе G всякий треугольник имеет четный периметр.*

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{Ker} R$. Фиксируем вершину v. Значения функции f в вершинах u даются формулой (3.9). Эти значения не должны зависеть от выбора начальной точки v. Возьмем какую-нибудь другую начальную точку w. Тогда, согласно (3.9), мы имеем

$$\begin{aligned} f(u) &= (-1)^{d(u,w)} f(w) \\ &= (-1)^{d(u,w)} (-1)^{d(v,w)} f(v). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Сравнивая (3.9) с (3.10), мы получаем, что f может быть не равной нулю в том и только том случае, если $d(u,v) \equiv d(u,w) + d(v,w)$. Следовательно, $d(u,v) + d(u,w) + d(v,w) \equiv 0$, что и означает, что периметр треугольника с вершинами u, v, w – четный. □

В частности, в *дереве* всякий треугольник имеет четный периметр, так что дерево имеет класс 1, а оператор R на нем не инъективен.

Теорема 3.4 *Связный граф G имеет класс 0 (то есть R инъективен) тогда и только тогда, когда в графе G существует цикл с нечетной длиной. Связный граф G имеет класс 1 тогда и только тогда, когда в графе G всякий цикл имеет четную длину.*

Доказательство. Пусть в связном графе G есть цикл Z нечетной длины с последовательными вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$. Рассмотрим $2k-1$ треугольников $T_1, T_2, \ldots, T_{2k-1}$: треугольник T_i имеет вершины v_1, v_{i+1}, v_{i+2}. Его периметр p_i есть

$$p_i = d(v_1, v_{i+1}) + 1 + d(v_1, v_{i+2}). \tag{3.11}$$

Просуммируем (3.11) по $i = 1, \ldots, 2k-1$. Мы получим

$$\begin{aligned} p_1 + \ldots + p_{2k-1} &= d(v_1, v_2) + 2\big[d(v_1, v_3) + \ldots + d(v_1, v_{2k})\big] + \\ &+ d(v_1, v_{2k+1}) + 2k - 1 \\ &= 2k + 1 + 2\big[d(v_1, v_3) + \ldots + d(v_1, v_{2k})\big]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$p_1 + \ldots + p_{2k-1} \equiv 1.$$

Следовательно, хотя бы один из треугольников T_i имеет нечетный периметр. По теореме 3.3 получаем $c = 0$.

Обратно, пусть связный граф G содержит треугольник T с вершинами u, v, w, имеющий нечетный периметр p, то есть

$$p \equiv 1. \tag{3.12}$$

Построим цикл Z с нечетной длиной.

Из условия (3.12) следует, что пересечение трех отрезков $[u,v]$, $[v,w]$, $[u,w]$ пусто. В самом деле, если бы это пересечение содержало вершину a, то

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(u,a) + d(a,v), \\ d(v,w) &= d(v,a) + d(a,w), \\ d(u,w) &= d(u,a) + d(a,w), \end{aligned}$$

так что, суммируя, получаем (см. (3.2)) $p = 2\big[d(u,a) + d(v,a) + d(w,a)\big]$ в противоречие с (3.12).

Пусть u' – вершина в пересечении $[u,v] \cap [u,w]$, самая удаленная от u (она может совпадать с u). Аналогично мы определяем вершины $v' \in [u,v] \cap [v,w]$ и $w' \in [u,w] \cap [v,w]$. Все вершины u', v', w' различны, поскольку пересечение $[u,v] \cap [v,w] \cap [u,w]$ пусто. Пусть отрезки $[u',v']$, $[v',w']$, $[u',w']$ являются частями отрезков $[u,v]$, $[v,w]$, $[u,w]$, соответственно. Объединение Z этих отрезков (это треугольник) есть цикл (поскольку $[u',v']$ и $[v',w']$ пересекаются только в одной вершине v' и т. д.). Длины этих отрезков таковы:

$$\begin{aligned} d(u',v') &= d(u,v) - d(u,u') - d(v,v'), \\ d(v',w') &= d(v,w) - d(v,v') - d(w,w'), \\ d(u',w') &= d(u,w) - d(u,u') - d(w,w'). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем, что периметр треугольника Z (длина цикла Z) есть

$$p' = p - 2\big[d(u,u') + d(v,v') + d(w,w')\big].$$

Стало быть, $p' \equiv p$, так что $p' \equiv 1$. $\square$

Напишем формулу обращения для преобразования Радона при $c = 0$. По теореме 3.4 в этом случае связный граф G содержит цикл Z нечетной длины. Возьмем в G произвольную вершину u. Рассмотрим следующий замкнутый маршрут A, начинающийся и кончающийся в u. Пусть P – маршрут, идущий из u в какую-нибудь вершину $v \in Z$ (такой маршрут мы можем не брать, если $u \in Z$). Пусть C – замкнутая цепь, идущая вдоль цикла Z от вершины v к ней самой. Ее длина $\ell(C)$ равна длине $\ell(Z)$, поэтому нечетна. Положим $A = P + C - P$. Длина этого маршрута равна

$$\ell(A) = \ell(P) + \ell(C) + \ell(P) = \ell(C) + 2\ell(P),$$

так что нечетна. По формуле (3.7) получаем

$$f(u) = \frac{1}{2}(Rf, \varepsilon_A).$$

Замечание. Формула (3.5) – это своего рода "формула Ньютона–Лейбница следовательно, преобразование Радона R есть "дифференцирование" (несмотря на то, что оно определяется как "интеграл"). Пусть $\varphi \in \operatorname{Im} R$, пусть f – ее "первообразная то есть такая функция, что $Rf = \varphi$. Фиксируем вершину $v \in G$. Тогда значение функции f в произвольной вершине u дается формулой (см. (3.5)):

$$f(u) = (Rf, \varepsilon_A) + (-1)^{\ell(A)} f(v),$$

где A – какой-нибудь маршрут, идущий из v в u. Для $c = 1$ значение $f(v)$ может быть взято произвольным, так что f определяется с точностью до функции из $\operatorname{Ker} R$ ("постоянной"), а для $c = 0$ значение $f(v)$ определено однозначно.

3.3. *Образ преобразования Радона*

Образ $\operatorname{Im} R$ оператора R есть ортогональное дополнение в $L(X)$ ядра $\operatorname{Ker} R^*$ сопряженного оператора R^*. Оператор R^* действует по формуле:

$$(R^*\varphi)(u) = \sum_{u \in x} \varphi(x).$$

Размерность его ядра равна

$$\dim \operatorname{Ker} R^* = -\chi(G) + c. \tag{3.13}$$

В самом деле, $\dim \operatorname{Im} R = n - c$, поэтому $\dim \operatorname{Ker} R^* = r - (n - c) = -(n - r) + c$.

Предъявим некоторые функции из $\operatorname{Ker} R^*$.

Всякий цикл Z четной длины дает функцию φ in $\operatorname{Ker} R^*$, а именно, пусть C – замкнутая цепь, идущая вдоль Z, тогда $\varphi = \varepsilon_C$. В самом деле, по (3.6) ε_C ортогональна $\operatorname{Im} R$.

Всякая пара различных циклов Z и W нечетной длины порождает функцию ψ из $\operatorname{Ker} R^*$ следующим образом. Пусть C – замкнутая цепь, идущая вдоль Z от вершины $u \in Z$ к ней самой, а D – замкнутая цепь, идущая вдоль W от вершины $v \in W$ к ней самой. Длины $\ell(C)$ и $\ell(D)$ нечетны. Пусть P – маршрут, идущий от вершины u к вершине v. Рассмотрим замкнутый маршрут $A = C + P + D - P$, идущий от u к u. Его длина $\ell(A)$ равна $\ell(C) + \ell(D) + 2\ell(P)$, это четное число. Мы полагаем $\psi = \varepsilon_A$.

Теперь укажем базис в $\operatorname{Ker} R^*$.

Сначала построим некоторую совокупность циклов в графе G.

Пусть Z_1 – какой-нибудь цикл в G. Удалим из G одно ребро цикла Z_1. Мы получим связный граф G_1 с n вершинами и $r - 1$ ребрами, так что его эйлерова характеристика равна $\chi(G) + 1$. Возьмем в G_1 цикл Z_2 и удалим из G_1 одно ребро цикла Z_2. Мы получим связный граф G_2 с эйлеровой характеристикой $\chi(G) + 2$ и т. д. После k шагов мы получим связный граф G_k с эйлеровой характеристикой $\chi(G) + k$, который не содержит циклов, то есть G_k – дерево. Эйлерова характеристика дерева равна 1, см. пункт 3.1, поэтому $\chi(G) + k = 1$, откуда

$$k = -\chi(G) + 1. \tag{3.14}$$

Назовем эти циклы $Z_1, \ldots, Z_k$ *базисными* циклами. Эта совокупность циклов состоит из p циклов четной длины и q циклов нечетной длины, $p + q = k$, $p, q \geqslant 0$.

Пусть $q = 0$. Тогда все базисные циклы имеют четную длину, каждый из них дает функцию из $\operatorname{Ker} R^*$, см. выше. Мы получаем функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ из $\operatorname{Ker} R^*$. Они линейно независимы, поэтому

$$k \leqslant \dim \operatorname{Ker} R^*. \tag{3.15}$$

С другой стороны, сравнивая (3.13) и (3.14), мы видим:

$$k - \dim \operatorname{Ker} R^* = 1 - c,$$

а по (3.15) и (3.8) мы получаем

$$0 \geqslant k - \dim \operatorname{Ker} R^* = 1 - c \geqslant 0,$$

откуда $c = 1$ и $k = \dim \operatorname{Ker} R^*$. Следовательно, функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ образуют базис в $\operatorname{Ker} R^*$.

Пусть $q \geqslant 1$. Тогда $c = 0$. Пусть $Z_1, \ldots, Z_q$ – циклы нечетной длины. Рассмотрим $q - 1$ пар циклов: $(Z_1, Z_2), \ldots, (Z_1, Z_q)$. Эти пары дают $q - 1$ функций $\psi_1, \ldots, \psi_{q-1}$ из $\operatorname{Ker} R^*$, как указано выше. Оставшиеся p циклов четной длины дают p функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ из $\operatorname{Ker} R^*$, см. выше. Всего мы получаем $q - 1 + p = k - 1$, то есть $-\chi(G)$, функций из $\operatorname{Ker} R^*$. Они линейно независимы. В силу (3.13) они образуют базис в $\operatorname{Ker} R^*$.

Построенные базисы в $\operatorname{Ker} R^*$ дают соотношения для функций из $\operatorname{Im} R$. Эти соотношения имеют вид

$$(Rf, \varepsilon_A) = 0,$$

где A – замкнутый маршрут, построенный, как было сказано выше, либо для цикла четной длины, либо для пары циклов нечетной длины.

3.4. *Допустимые комплексы*

По аналогии с [3] определим *комплекс* в графе G как подграф K графа G, который имеет n вершин и n ребер. Следовательно, $K = (V, Y)$, где $Y \subset X$, и $\chi(K) = 0$.

Снова по аналогии с [3] назовем комплекс K *допустимым*, если преобразование Радона $R : L(V) \to L(Y)$ на K инъективно, так что оно есть изоморфизм.

Заметим, что всякая связная компонента допустимого комплекса не может быть деревом.

Теорема 3.5 *Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда всякая связная компонента его обладает единственным циклом и этот цикл имеет нечетную длину.*

Доказательство. Пусть всякая связная компонента K_i комплекса K обладает циклом нечетной длины. Тогда по теореме 3.4 преобразование Радона R на K_i инъективно, так что преобразование Радона R на K тоже инъективно и K допустим.

Теперь пусть комплекс K в графе G допустим. Пусть $K_1, \ldots, K_s$ – его связные компоненты. Обозначим через n_i количество вершин в K_i. Для каждой K_i преобразование Радона R на K_i инъективно, поэтому K_i – не дерево, так что $\chi(K_i) \leqslant 0$. Поскольку $\chi(K) = 0$, мы имеем

$$\chi(K_1) + \ldots + \chi(K_s) = 0.$$

Отсюда $\chi(K_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, количество ребер в K_i равно тоже n_i. Пусть Z_i – какой-нибудь цикл в K_i. Удалим из K_i одно ребро цикла Z_i. Мы получим связный граф K_i' с n_i вершинами и $n_i - 1$ ребрами, откуда $\chi(K_i') = 1$, так что K_i' – дерево. Следовательно, Z_i – единственный цикл в K_i. По теореме 3.4 этот цикл имеет нечетную длину. $\square$

§ 4. Преобразование Радона на плоскости над конечным кольцом

Пусть K – конечное кольцо. *Прямой* на плоскости $K^2 = K \times K$ над кольцом K назовем множество ℓ всех точек $z = (x, y) \in K^2$, удовлетворяющих уравнению:

$$ax + by = c,$$

где $a, b, c \in K$, причём a и b не являются делителями нуля одновременно. Прямая ℓ определяется тройкой элементов $(a, b, c) \in K^3$ с точностью до общего множителя, не являющегося делителем нуля. Пусть H – множество всех прямых.

Сейчас множества X и Y из § 1 – это соответственно K^2 и H, отношение $\prec$ есть снова отношение включения. Следовательно, *преобразование Радона* на плоскости K^2 – это линейный оператор $L(K^2) \to L(H)$, который всякой функции $f \in L(K^2)$ сопоставляет ее "интегралы" по прямым, то есть

$$(Rf)(\ell) = \sum_{z \in \ell} f(z).$$

Мы рассматриваем два случая. Первый: K – конечное поле, второй, более сложный, K – кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. Получены формулы обращения для конечного поля и кольца $\mathbb{Z}_n$, $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$, а описание образа оператора R получено для конечного поля и для кольца $\mathbb{Z}_n$, $n = p^2$, см. [2]. В настоящей работе мы обсуждаем различные варианты формулы обращения.

Сопряженный оператор $R^* : L(H) \to L(K^2)$ дается формулой

$$(R^* F)(z) = \sum_{z \in \ell} F(\ell). \tag{4.1}$$

Матричный элемент $T(z,w)$ оператора $T = R^*R$ равен количеству прямых, проходящих через точки $z, w \in K^2$ (для $w = z$ это количество прямых, проходящих черех точку z).

Пусть K – поле с q элементами. В этом случае

$$T(z,w) = \begin{cases} q+1, & w = z, \\ 1, & w \neq z. \end{cases}$$

Следовательно, матрица T может быть записана в виде $T = qE + I$, где E – единичная матрица, I обозначает матрицу, у которой все элементы равны 1. Используя формулу (4.7), см. ниже, где $\alpha = q$, $\beta = 1$, $r = q^2$, находим обратную матрицу:

$$T^{-1} = \frac{1}{q^2(q+1)} \left\{ q(q+1)E - I \right\}. \tag{4.2}$$

Вместе с (1.3) это дает формулу обращения для поля с q элементами:

$$f(z) = \frac{1}{q}(R^*(Rf))(z) - \frac{1}{q^2(q+1)} \sum_{w \in K^2} (R^*(Rf))(w). \tag{4.3}$$

С другой стороны, мы можем найти левый обратный оператор R^{-1} по (1.2). Используя (4.2) и (4.1), получаем матрицу этого оператора $\widehat{R}(z,\ell)$:

$$\widehat{R}(z,\ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{q+1}, & z \in \ell, \\ -\dfrac{1}{q(q+1)}, & z \notin \ell. \end{cases}$$

Это дает другой вариант формулы обращения для поля с q элементами:

$$f(z) = \frac{1}{q+1}(Rf)(\ell) - \frac{1}{q(q+1)} \sum_{z \notin \ell} (Rf)(\ell). \tag{4.4}$$

Пусть теперь K – кольцо классов вычетов по модулю p^2, p – простое. Пусть D – множество делителей нуля: $0, p, 2p, \ldots, (p-1)p$. Обозначим $D^2 = D \times D$. Тогда

$$T(z,w) = \begin{cases} p^2 + p, & w = z, \\ p, & w \in z + D^2, \ w \neq z, \\ 1, & w \notin z + D^2. \end{cases}$$

Поэтому матрицу T можно записать как матрицу (4.8), где $m = r = p^2$, матрица C имеет вид (4.6) с $\alpha = p^2 + p - 1$, $\beta = p - 1$, так что в формуле (4.9) $a = p^3$. Используя (4.10), получаем формулу обращения для кольца классов вычетов по модулю p^2:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{p^2}(R^*(Rf))(z) - \frac{p^3 - p + 1}{p^6(p+1)} \sum_{w \in z + D^2} (R^*(Rf))(w) \\ &- \frac{1}{p^6(p+1)} \sum_{w \in K^2} (R^*(Rf))(w). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Доказательства формул обращения (4.3), (4.4), (4.5) основываются на вычислении нижеследующих обратных матриц.

Пусть C – следующая матрица порядка r:

$$C = \alpha E + \beta I. \tag{4.6}$$

Тогда, поскольку $I^2 = rI$, имеем

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha}E - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + r\beta)}I. \tag{4.7}$$

Пусть A – блочная $m \times m$ матрица с блоками порядка r:

$$\begin{pmatrix} C+I & I & \dots & I \\ I & C+I & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & I & \dots & C+I \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где C – обратимая матрица, удовлетворяющая условию

$$CI = IC = aI, \tag{4.9}$$

a – некоторое число. Тогда обратная матрица C^{-1} удовлетворяет условию $IC^{-1} = C^{-1}I = a^{-1}I$, а обратная матрица A^{-1} есть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1}+\mu I & \mu I & \dots & \mu I \\ \mu I & C^{-1}+\mu I & \dots & \mu I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu I & \mu I & \dots & C^{-1}+\mu I \end{pmatrix}, \quad \mu = -\frac{1}{a(a+mr)} . \tag{4.10}$$

§ 5. Функция Мёбиуса на корневых деревьях

Мы используем понятия из [9]. Пусть P – конечное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\geqslant$. Множество P можно изобразить в виде ориентированного графа, его вершины– это точки $x \in P$.

Дзета-функция $\zeta(x, y)$ двух переменных, заданная на P, определяется следующим образом: $\zeta(x, y) = 1$ при $x \geqslant y$, $\zeta(x, y) = 0$ в остальных случаях. Функцией Мёбиуса $\mu(x, y)$ называется функция, обратная к дзета-функции, то есть

$$\sum_{z \in P} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \delta(x, y),$$

где $\delta(x, y)$ – дельта-функция на P: она равна 1 при $x = y$ и равна 0 при $x \neq y$.

Предположим, что P – корневое дерево. Тогда в P существует единственный максимальный элемент x_0, и для каждого $x \neq x_0$ существует единственный элемент $x' \geqslant x$, $x' \neq x$, ближайший к x. Мы утверждаем, что в нашем случае функция Мёбиуса есть

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y', \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

В самом деле, пусть $f(x,y)$ – произведение этой функции $\mu(x,y)$ и дзета-функции:

$$f(x,y) = \sum_{x \geqslant z \geqslant y} \mu(x,z)\zeta(z,y).$$

Если $x = y$, то $x = z = y$ и потому $f(x,x) = 1$. Если $x \neq y$, то $x = y'$, так что либо $z = y$, либо $z = y'$, поэтому

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mu(y',y')\zeta(y',y) + \mu(y',y)\zeta(y,y) \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(x,x) = 1$ и $f(x,y) = 0$ при $x \neq y$, то есть $f(x,y) = \delta(x,y)$, что и требовалось.

Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М.: Мир, 1987.

2. Е. В. Водолажская. Преобразование Радона на плоскости над конечным кольцом. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки. 2008. Том 13. вып. 6. 473–485.

3. И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Комплексы прямых в пространстве $\mathbb{C}^n$. Функц. анализ и его прил.. 1968. Том 2. вып. 3. 39–52.

4. С. В. Кольцова, С. В. Поленкова. Элементы конечной интегральной геометрии. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Математика. 2004. № 1. 54–62.

5. В. Ф. Молчанов, А. А. Артемов, Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления (см. настоящий том).

6. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Часть I, М.: Гостехиздат. 1956.

7. В. В. Соломонов. Две задачи интегральной геометрии, связанные с векторным пространством над конечным полем. Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та. 1969. Том 262. 230–235.

8. Ф. Харари. Теория графов. М.: Москва. 1976.

9. М. Холл. Комбинаторика. М.: Мир. 1970.

10. E. D. Bolker. Finite Radon tranform. Contemp. Math.. 1987. Vol. 63. 27–49.

11. V. F. Molchanov, S. V. Koltsova. Radon transform on graphs and admissible complexes. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки. 2006. Том 11. Вып. 1. 41–48.

Поступила в редакцию 25 апреля 2009 г.

V. F. Molchanov, S. V. Koltsova, E. V. Vodolazhskaya, M. S. Ilina

Keywords: Radon transform; Boolean; finite fields; coset rings.

We consider Radon transforms on finite sets, namely, on the Boolean, the plane over finite rings, finite graphs, and determine inversion formulas.