

УДК 624.073:539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

© Г.М. Куликов, Ю.В. Кулешов

Kulikov G.M., Kuleshov Y.V. Non-linear vibrations of multi-layered plates. The article looks at free and forced non-linear vibrations of multi-layered rectangular plates made of transversely isotropic materials. The vibration damping is based on a linear hypothesis and the influence of elastic rods associated with plate edges is also included. A number of governing equations in terms of force function and the displacement function are solved by the Bubnov-Galerkin method. The amplitude-frequency equations are obtained by using the non-linear Timoshenko-type plate theory as well as the simplified non-linear plate theory based on the well-known Berger hypothesis. Simple and convenient formulas for characteristics of free and forced vibrations of plates are deduced.

В работах [1, 2] исследованы нелинейные колебания многослойных пластин по уравнениям, полученным на основе гипотезы Бергера [3, 4]. Здесь изучаются свободные и вынужденные нелинейные колебания многослойных прямоугольных пластин на основе полных уравнений многослойных пластин типа Тимошенко [5].

Рассмотрим многослойную прямоугольную пластину, составленную из N трансверсально изотропных слоев. Уравнения вынужденных поперечных колебаний получим из уравнений главы III монографии [5], полагая, что кривизны и кручение координатных линий равны нулю, и добавляя инерционную и линейную демпфирующую силы:

$$\Delta \Delta F = -\frac{1}{2} EhL(W, W); \quad (1)$$

$$D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta \Delta \chi + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi = L(W, F) + q(x, y) \cos \omega t; \quad (2)$$

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi. \quad (3)$$

Здесь и далее используемые обозначения соответствуют [5], в частности,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L(W, F) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Следуя [6], считаем, что кромки пластины связаны с упругими, неискривляющимися в плоскости пластины ребрами. Примем, что на единицу длины сторон b и a приходится площади сечений ребер F_x и F_y . Обозначим $h/F_x = \nu_x$, $h/F_y = \nu_y$. Выражение для прогиба шарнирно опертой пластины выберем в виде

$$W = f(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и решая полученное дифференциальное уравнение, находим силовую функцию в форме

$$F = \frac{Ehf^2}{32} \left[\left(\frac{an}{bm} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + \left(\frac{bm}{an} \right)^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} \right] + \frac{\bar{P}_x h y^2}{2} + \frac{\bar{P}_y h x^2}{2}, \quad (5)$$

где \bar{P}_x, \bar{P}_y – нормальные напряжения на площадках контакта пластины с ребрами. Из условий равновесия узлов, в которых ребра скреплены с пластиной, получаем

$$\bar{P}_x = \frac{\nu + \frac{b^2 m^2}{a^2 n^2} (1 + \nu_y)}{(1 + \nu_x)(1 + \nu_y) - \nu^2} \frac{\pi^2 n^2 E f^2}{8b^2}, \quad (6)$$

$$\bar{P}_y = \frac{\nu + \frac{a^2 n^2}{b^2 m^2} (1 + \nu_x)}{(1 + \nu_x)(1 + \nu_y) - \nu^2} \frac{\pi^2 m^2 E f^2}{8a^2}. \quad (7)$$

Выполним интегрирование уравнения (2) методом Бубнова – Галеркина в два этапа. На первом этапе фиксируем момент времени t и рассмотрим уравнение

$$\iint_S X\eta dx dy = 0, \quad (8)$$

где интегрирование ведется по всей площади пластины S , а η и X выбираем в виде:

$$\eta = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$X = D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta \Delta \chi + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi - L(W, F) - q(x, y) \cos \omega t. \quad (9)$$

Задавая функцию перемещений в форме

$$\chi = \chi_0(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

и учитывая (3), устанавливаем следующую зависимость между функциями $f(t)$ и $\chi_0(t)$:

$$f(t) = \left[1 + \delta(m^2 + \lambda^2 n^2) \right] \chi_0(t). \quad (11)$$

После интегрирования из формулы (8) с учетом (11) получаем уравнение Дуффинга относительно безразмерной функции $\zeta = f/h$:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\zeta}{dt} + \omega_{0,mn}^2 (1 + k\zeta^2) \zeta = \bar{q}_0 \cos \omega t, \quad (12)$$

где $\omega_{0,mn}$ – собственные частоты линейных колебаний пластины при малых прогибах [5]:

$$\omega_{0,mn}^2 = \frac{\pi^4 m^4 \left(1 + \frac{n^2}{m^2} \lambda^2 \right)^2 \left[1 + \theta \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right) \right] c^2 h^2 \eta_3}{12 \lambda^2 (1 - \nu^2) a^2 b^2 \left[1 + \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right) \right]}, \quad (13)$$

$$k = \frac{(1 - \nu^2) \lambda^4 \left[1 + \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right) \right]}{\eta_3 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right)^2 \left[1 + \theta \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right) \right] \left[(1 + \nu_x)(1 + \nu_y) - \nu^2 \right]} \times \left\{ \frac{3}{2m^2} \left[\left(\frac{\nu m^2}{\lambda^2} + (1 + \nu_x) n^2 \right) \frac{n^2}{m^2} + \left(n^2 \nu + \frac{1 + \nu_y}{\lambda^2} m^2 \right) \frac{1}{\lambda^2} \right] + \frac{3}{4} \left(\frac{n^4}{m^4} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \left[(1 + \nu_x)(1 + \nu_y) - \nu^2 \right] \right\}, \quad (14)$$

$$\bar{q}_0 = \frac{4}{ab\rho h^2} \iint_S q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (15)$$

При $\delta = 0, \eta_3 = 1, m = n = 1$ из соотношений (13) и (14) получаем известные формулы для частоты и коэффициента k фундаментальной моды однородной пластины [6].

На втором этапе решения задачи представим прогиб в виде [7]:

$$\zeta = c_1 \cos(\omega t - \psi) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad (16)$$

где $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ – максимальная безразмерная амплитуда прогиба пластины и

$$\operatorname{tg} \psi = b_1 / a_1. \quad (17)$$

Проведем интегрирование по периоду колебаний $2\pi/\omega$. В результате имеем

$$\int_0^{2\pi/\omega} Y(t) \cos \omega t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega} Y(t) \sin \omega t dt = 0. \quad (18)$$

В качестве $Y(t)$ возьмем выражение

$$Y(t) = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\zeta}{dt} + \omega_{0,mn}^2 (1 + k\zeta^2) \zeta - \bar{q}_0 \cos \omega t. \quad (19)$$

В результате интегрирования из (18) получаем

$$-a_1 \omega^2 + 2\varepsilon \omega b_1 + \omega_{0,mn}^2 a_1 + \frac{3\omega_{0,mn}^2 k a_1 c_1^2}{4} - \bar{q}_0 = 0 \quad (20)$$

$$-b_1 \omega^2 - 2\varepsilon \omega a_1 + \omega_{0,mn}^2 b_1 + \frac{3\omega_{0,mn}^2 k b_1 c_1^2}{4} = 0.$$

После преобразований системы (20) с учетом формулы (17) приходим к следующим амплитудно-частотному и амплитудно-фазочастотному уравнениям:

$$\left(-\omega^2 + \omega_{0,mn}^2 + \frac{3}{4} \omega_{0,mn}^2 k c_1^2 \right)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2 = \frac{\bar{q}_0^2}{c_1^2} \quad (21)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon \omega}{-\omega^2 + \omega_{0,mn}^2 + \frac{3}{4} \omega_{0,mn}^2 k c_1^2}. \quad (22)$$

Из формулы (21) при $\varepsilon = \bar{q}_0 = 0$ получаем амплитудно-частотное уравнение свободных колебаний пластины

$$\mu^2 = 1 + \frac{3}{4} k c_1^2, \quad (23)$$

где $\mu = \omega / \omega_{0,mn}$ – безразмерная частота свободных колебаний.

Представим далее коэффициент k в виде произведения $k = k_{\text{одн}} k_1$, где $k_{\text{одн}}$ – коэффициент однородной пластины, а k_1 определяется так:

$$k_1 = \frac{1 + \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right)}{\left[1 + \theta \delta m^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right) \right] \eta_3}. \quad (24)$$

Для однородной пластины $\delta = 0$, $\eta_3 = 1$, $k_1 = 1$ и из формулы (14) следует формула для $k_{\text{одн}}$. Причем для пластины со свободно смещающимися шарнирно опертыми краями при $v_x = v_y = \infty$ имеем:

$$k_{\text{одн}} = \frac{3(1 - v^2) \left(1 + \lambda^4 \frac{n^4}{m^4} \right)}{4 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right)^2}, \quad (25)$$

а для пластины с несмещающимися краями при $v_x = v_y = 0$ получаем

$$k_{\text{одн}} = \frac{3(1 - v^2) \left(1 + \lambda^4 \frac{n^4}{m^4} \right) + 6 \left(1 + 2v\lambda^2 \frac{n^2}{m^2} + \lambda^4 \frac{n^4}{m^4} \right)}{4 \left(1 + \lambda^2 \frac{n^2}{m^2} \right)^2}. \quad (26)$$

На рис. 1 представлен общий вид скелетных кривых при различных значениях коэффициента k_1 . Из рисунка 1 видно, что при $k_1 > 1$ нелинейный характер колебаний многослойной пластины выражен более сильно, чем у однородной, а при $k_1 < 1$ менее сильно.

Были выполнены расчеты амплитуд по уравнению (23), а также по амплитудно-частотному уравнению, полученному интегрированием методом Бубнова – Галеркина уравнения Дуффинга из работы [1]. Расчеты показали, что при значениях параметров

$$\begin{aligned} m = n = 1, \quad v = 0,25, \quad \lambda = 1, \\ \theta = 0,01, \quad \delta = 0,5, \quad \eta_3 = 1,25 \end{aligned} \quad (27)$$

для пластины с несмещающимися краями относительная разность значений амплитуд свободных колебаний, найденных по точной и приближенной теориям, составляет 7,87 %.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания многослойной пластины. Пусть поперечная нагрузка распределена по поверхности пластины по следующему закону:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (28)$$

Вводя функцию (28) в формулу (15), находим

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0}{\rho h^2}. \quad (29)$$

Амплитудно-частотное уравнение (21) при $\varepsilon = 0$ может быть приведено к кубическому уравнению:

$$c_1^3 + p_1 c_1 + q_1 = 0 \quad (30)$$

с безразмерными коэффициентами

$$p_1 = \frac{4(1 - \mu^2)}{3k}, \quad q_1 = -\frac{4q_*}{3k}, \quad (31)$$

где $q_* = \bar{q}_0 / \omega_{0,mn}^2$ – безразмерный параметр нагрузки. На рис. 2 приведены амплитудно-частотные кривые свободных и вынужденных недемпфированных колебаний пластины для данных (27) при $q_* = 1,532$.

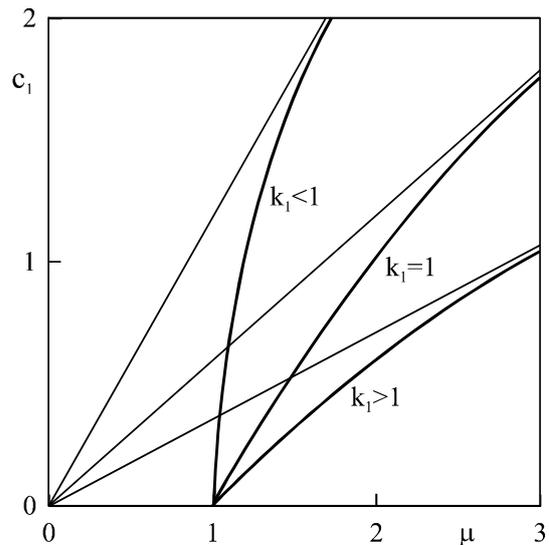


Рис. 1. Общий вид скелетных кривых многослойных пластин

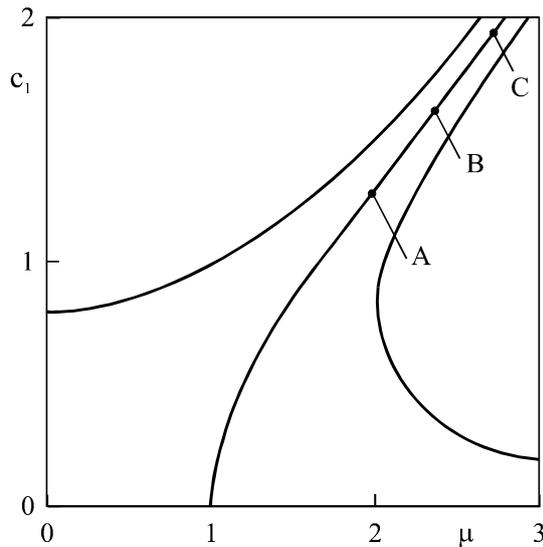


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые и резонансные точки многослойных пластин

Приближенные значения резонансных амплитуд и резонансных частот колебаний многослойной пластины при учете демпфирования определим как координаты точек пересечения амплитудно-частотной и скелетной кривых [2, 7]. Используя далее уравнения (21) и (23), получим

$$c_{1\text{рез}} = \sqrt{\frac{2}{3k} \left(\sqrt{1 + \frac{3kq_*^2}{4\varepsilon_*^2}} - 1 \right)}, \quad (32)$$

$$\mu_{\text{рез}} = \frac{q_*}{2\varepsilon_* c_{1\text{рез}}}, \quad (33)$$

где $\varepsilon_* = \varepsilon / \omega_{0,mn}$ – безразмерный параметр демпфирования. На рис. 2 показаны резонансные точки, опре-

деленные на основе зависимостей (32), (33) для следующих значений параметра демпфирования: $A(\varepsilon_* = 0,3)$, $B(\varepsilon_* = 0,2)$, $C(\varepsilon_* = 0,15)$. Из рис. 2 видно, что расположение резонансных точек согласуется с классическими представлениями о влиянии демпфирования на резонансные амплитуды колебаний упругих систем [7].

Таким образом, разработанный метод исследования нелинейных свободных и вынужденных колебаний

многослойных пластин на основе уравнений уточненной теории пластин типа Тимошенко [5] позволил получить обозримые формулы для выполнения расчетов основных характеристик колебаний без использования приближенных уравнений на основе гипотезы Бергера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных трансверсально изотропных пластин // Вестн. ТГТУ. 2000. Т. 6. № 2. С. 258-263.
2. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Вынужденные нелинейные колебания многослойных пластин // Вестн. ТГТУ. 2002. Т. 8. № 3. С. 483-489.
3. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 94-121.
4. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Приближенный анализ нелинейных трансверсально изотропных трехслойных пластин // Механика композитных материалов. 1980. № 2. С. 272-276.
5. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

Поступила в редакцию 15 апреля 2004 г.