УДК 621.181.125.253

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАЗОГРЕВА ВОДЫ ЭЛЕКТРОВОДОНАГРЕВАТЕЛЕМ С ПАССИВНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

© В.И. Ляшков, В.Ф. Калинин, А.М. Шувалов, О.В. Терентьев

Lyashkov V.I., Kalinin V.F., Shuvalov A.M., Terentyev O.V. A mathematical model of the dynamics of water heating by an electric water heater with a passive electrode. The article proposes a mathematical model of the dynamics of water heating by an electric water heater with a passive electrode. It also discusses the calculations of the device and adequacy of its test.

Электроводонагреватели и парогенераторы электродного типа получают все большее распространение во многих отраслях производства, особенно в сельском хозяйстве. Использование пассивного электрода в составе электродной группы позволяет получить определенные преимущества [1] и является одним из перспективных конструктивных решений. На рис. 1 приведена схема такого водонагревателя с указанием всех его основных размеров, а на рис. 2 – эквивалентная электрическая схема включения электродов.

Методика инженерных расчетов, основанная на анализе установившихся режимов работы аппарата [2], зачастую не обеспечивает необходимой точности и достоверности получаемых результатов и не дает представлений о динамике процессов, протекающих в аппарате.

Рабочий процесс нагревателя разобьем на два этапа. На первом этапе происходит разогрев воды по обе стороны пассивного электрода: проточной зоне между корпусом водонагревателя и пассивным электродом, и непроточной – между фазным и пассивным электродами. Нагрев на данном этапе длится до тех пор, пока в непроточной зоне вода не нагреется до температуры кипения $t_н$, значение которой определяется абсолютным давлением воды в верхней точке непроточной зоны

$$P = B + H, \tag{1}$$

где B – барометрическое давление; H – высота столба воды в расширительном баке.

Электрическое сопротивление проточной зоны при этом будет [2]:

$$R_п = \rho_t \frac{1}{2\pi l_п} \ln \frac{3a^2(d_к^2 - a^2)^3}{d_п^2(d_к^6 - a^6)}, \tag{2}$$

где $\rho_t = \dfrac{40\rho_{20}}{t+20}$ – удельное электрическое сопротивление воды при температуре t; ρ_{20} – удельное электрическое сопротивление воды при температуре t = 20 °С (ρ_{20} = 10–20 Ом·м [2]); $l_п$, a, $d_п$, $d_к$ – геометрические размеры, приведенные на рис. 1. Для непроточной зоны на первом этапе величина электрического сопротивления будет определяться [2]:

$$R_н = \rho_t \frac{1}{2\pi l_э} \ln \frac{d_п}{d_э}. \tag{3}$$

Тогда рабочий фазный ток в аппарате будет

$$i = \frac{U}{R_п + 2R_н}, \tag{4}$$

а мощность, выделяемая по зонам, соответственно

$$N_п = \sqrt{3} \cdot i^2 \cdot R_п \quad \text{и} \quad N_н = 2\sqrt{3} \cdot i^2 \cdot R_н, \tag{5}$$

где U – линейное напряжение питающей сети.

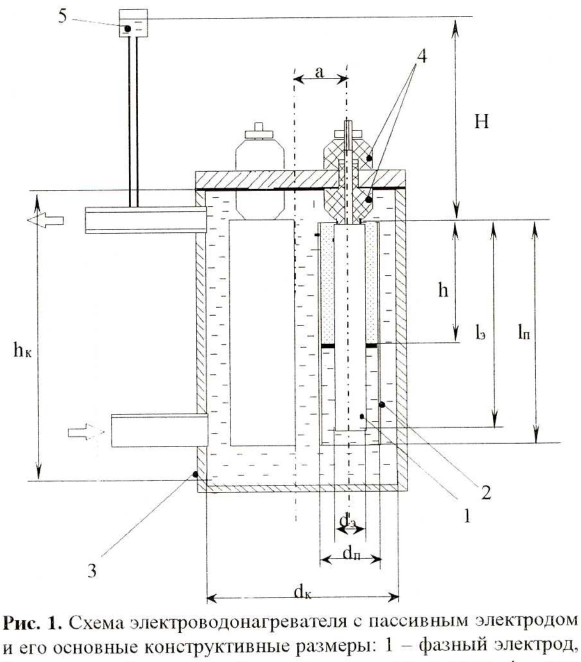

Рис. 1. Схема электроводонагревателя с пассивным электродом и его основные конструктивные размеры: 1 – фазный электрод, 2 – пассивный электрод, 3 – корпус водонагревателя, 4 – разборный изолятор, 5 – компенсационная емкость

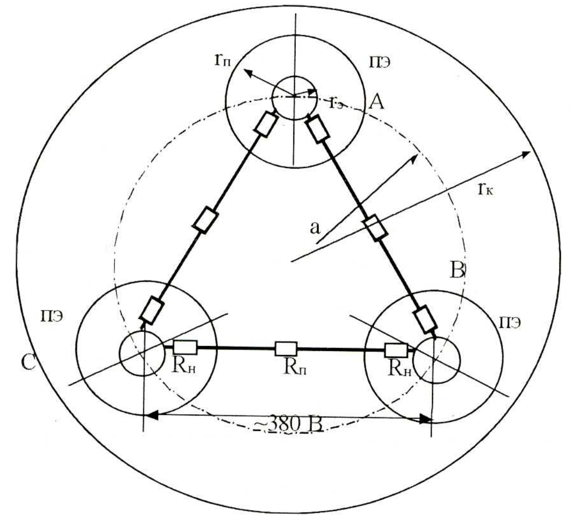

Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема электроводонагревателя: А, В, С – фазные электроды, пэ – пассивные электроды, К – корпус, $R_н$ и $R_п$ – сопротивление в непроточной и в проточной зонах, а, $r_п$, $r_э$ – радиусы центров электродов, пассивных и фазных электродов

Полагая, что в любой момент времени τ за элементарно малый промежуток $d\tau$ температуры в проточной и непроточной зонах изменятся соответственно на $dt_п$ и $dt_н$, запишем уравнения теплового баланса для каждой из зон. Для непроточной зоны, если считать, что вместе с водой здесь прогреваются и оба электрода, такой баланс будет выглядеть так:

$$N_н\cdot\eta_э\cdot d\tau = c_в\cdot m_н\cdot dt_н + c_с\cdot m_э\cdot dt_н + 3\cdot k_1(t_н - \bar{t}_п)\cdot F_т\cdot d\tau. \quad (6)$$

Здесь левая часть отражает количество выделяемого тепла, а слагаемые правой части – количества тепла, израсходованные на нагрев воды, нагрев электродов и передачу тепла в проточную зону. В формуле (6) приняты следующие обозначения: $\eta_э$ – электрический кпд аппарата; $c_в$ и $c_с$ – удельная теплоемкость воды и стали, соответственно; $m_в$ и $m_э$ – масса воды в непроточной зоне и масса электродов; k_1 – коэффициент теплопередачи через пассивный электрод:

$$k_1 = \frac{1}{1/\alpha_п + \delta/\lambda + 1/\alpha_н}; \quad (7)$$

$\alpha_п$ – коэффициент теплоотдачи от пассивного электрода к воде; $\alpha_н$ – коэффициент теплоотдачи от воды из непроточной зоны к пассивному электроду; δ – толщина электрода; λ – теплопроводность стали. $F_т = \pi d_п l_э$ – поверхность теплопередачи; $t_н$ и $\bar{t}_п$ – температуры в непроточной зоне и средняя температура в проточной зоне. Величины $\alpha_н$ и $\alpha_п$ можно рассчитать, привлекая соответствующие критериальные уравнения из [3], величину $\bar{t}_п$ – как среднюю температуру воды на входе и выходе проточной зоны.

При этом в непроточной зоне на рассматриваемом этапе теплоотдача осуществляется свободной конвекцией. В проточной зоне осуществляется вынужденное движение, но скорость его настолько мала, что и здесь можно рассматривать α как при свободной конвекции.

Для проточной зоны следует учитывать, что здесь не только выделяется тепло за счет электрического тока, но и передается еще от трех непроточных зон через поверхности пассивных электродов. Расход же тепла идет на разогрев воды, находящейся в этой зоне, разогрев корпуса водонагревателя и на компенсацию тепловых потерь с наружных поверхностей аппарата. Таким образом, уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$\begin{aligned}&\left(N_п\eta_э + 3\cdot k_1(t_н - \bar{t}_п)F_m\right)d\tau = \\ &= C_в m_п dt_п + C_в M\left(t_{п_2} - t_{п_1}\right)d\tau + C_с m_к dt_п + Q d\tau\end{aligned}, \quad (8)$$

где $m_п = V_п\rho_п + M d\tau$ – масса воды в проточной зоне, нагреваемая на $dt_п$; M – массовый расход нагреваемой воды; $t_{п_1}$, $t_{п_2}$ – температура на входе и выходе из аппарата, соответственно; $m_к$ – масса корпуса; Q – тепловые потери в окружающую среду, которые, если пренебречь термическим сопротивлением стальной стенки, определяются известным выражением:

$$Q = \frac{\pi h\ (t_п - t_о)\cdot d_к}{\dfrac{1}{\alpha_п d_к} + \dfrac{1}{2\lambda_{из}}\ln\dfrac{(d_к + 2\delta)}{d_к} + \dfrac{1}{\alpha_о(d_к + 2\delta)}}, \quad (9)$$

где $d_к$ – диаметр корпуса; h – высота корпуса; $\lambda_{из}$ – теплопроводность материала изоляции; δ – толщина слоя изоляции; $t_О$ – температура окружающей среды; $\alpha_О$ – коэффициент теплоотдачи от поверхности изоляции в окружающую среду.

Уравнения (6) и (8) приведем к канонической форме и отметим, что они составляют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которых может быть выполнено одним из известных численных методов:

$$\frac{dt_н}{d\tau} = \frac{2\sqrt{3}\cdot i^2 R_н\eta_э - 3\cdot\kappa_1\left(t_н - \bar{t}_п\right)F_m}{C_в m_н + C_с m_э} \quad (10)$$

$$\frac{dt_п}{d\tau} = \frac{\sqrt{3}\cdot i^2 R_п\eta_э + 3\cdot\kappa_1\left(t_н - \bar{t}_п\right)F_m - C_в M\left(t_{п_2} - t_{п_1}\right) - Q}{C_в m_п + C_с m_к}. \quad (11)$$

Рассмотрим второй этап работы аппарата, когда в непроточной зоне вода нагрелась до температуры кипения и выделяемое за счет протекания электрического тока тепло вызывает кипение воды, а образующийся пар, частично конденсируясь на стенках, вытесняет часть воды из рабочего пространства. В результате пространство высотой h заполняется паром, давление и температура которого определяется теперь суммой:

$$P = B + H + h. \quad (12)$$

Тепловой баланс теперь помимо приходной части (тепло, выделяемое при протекании электрического тока) имеет следующие расходные составляющие:

– теплоту, необходимую для образования такого количества пара dm_1, которое полностью сконденсируется на стенках пассивных электродов в непроточной зоне;

– теплоту, необходимую для образования количества пара dm_2, которое не сконденсируется, а приведет к увеличению объема паровой зоны в пространстве между фазным и пассивным электродами (увеличению высоты h);

– теплоту, которая будет передаваться от кипящей жидкости через стенки пассивных электродов к воде проточной зоны;

– теплоту, которая будет передаваться воде проточной зоны от сконденсировавшегося пара;

– теплоту, которая потребуется, чтобы нагреть воду из проточной зоны массой dm_2 до температуры кипения (идет на компенсацию потерь пара);

– теплоту, чтобы нагреть конденсат массой dm_1 снова до температуры кипения;

– теплоту, необходимую для нагрева воды в непроточной зоне на изменение температуры насыщения, вызванное увеличением давления. Впрочем, этим количеством тепла можно пренебречь, поскольку при изменении h от 0 до h_{max} ($h_{max} = l_э$) температура насыщения меняется на 1,34 °С (при $H = 3$ м).

Распишем подробно составляющие этого баланса, как и прежде рассматривая его за элементарно малый промежуток времени $d\tau$:

$$2\sqrt{3}\cdot i^2 R_{н_2}\eta_{эл}d\tau = \\ = dm_1 r + dm_2 r + 3\cdot\kappa_2 F_п(t_{нас} - \bar{t}_п)d\tau + \\ + 3\cdot\kappa_3 F_в(t_{нас} - \bar{t}_п)d\tau + dm_2 C_в(t_{нас} - \bar{t}_п) + \\ + C_{m_1} C_в\left(t_{нас} - \frac{t_{нас} + t_{ст}}{2}\right) + m_н C_в dt_{нас}, \qquad (13)$$

где

$$R_{н_2} = \rho_t \frac{K_к}{2\pi(l_э - h)} \ln\frac{d_п}{d_э}. \qquad (14)$$

$K_к$ – коэффициент, учитывающий увеличение электрического сопротивления воды при ее кипении за счет образующихся пузырьков пара. По литературным источникам, $K_к \approx 1{,}2 \div 1{,}3$ [4]; r – теплота парообразования при температуре насыщения $t_{нас}$, κ_2, κ_3 – коэффициенты теплопередачи в зоне конденсации и в зоне кипения, соответственно:

$$\kappa_2 = \frac{1}{1/\alpha_п + \frac{\delta}{\lambda} + 1/\alpha_{конд}}; \qquad (15)$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{1/\alpha_п + \frac{\delta}{\lambda} + 1/\alpha_{кип}}, \qquad (16)$$

$\alpha_п$ – коэффициент теплоотдачи от поверхности пассивного электрода воде проточной зоны; $\alpha_{конд}$ – коэффициент теплоотдачи при конденсации; $\alpha_{кип}$ – коэффициент теплоотдачи при кипении.

Расчет этих величин производится по известным формулам [3]:

$$\alpha_{конд} = 0{,}941\cdot\sqrt[4]{\frac{gr\rho^2\lambda 3}{\mu(t_н - t_с)h}};$$

$$\alpha_{кип} = 3P^{0{,}15}q^{0{,}7}, \qquad (17)$$

где P – давление в барах, $F_п$, $F_в$ – соответствующие поверхности теплообмена (одна высотой h, другая – $(l_э - h)$); $\bar{t}_п$ – средняя температура в проточной зоне; $t_с$ – температура стенки пассивного электрода; $m_н = \frac{\pi}{4}(d_п^2 - d_э^2)\rho_в(l_э - h)$ – масса воды в непроточной зоне; $dt_{нас}$ – изменение температуры насыщения при изменении высоты паровой зоны h на величину dh; q – плотность теплового потока при кипении, определяется соотношением:

$$q = \frac{i^2 R_н \eta_э}{\frac{\pi}{4}(d_п^2 - d_э^2)}, \qquad (18)$$

где числитель представляет собой мощность, выделяемую в непроточной зоне, а знаменатель – площадь поверхности кипения (площадь кольца между фазным и пассивным электродом).

Третье слагаемое правой части уравнения (13) описывает количество тепла, отдаваемого паром воде проточной зоны. Разделив это тепло на теплоту парообразования, получим массу dm_1:

$$dm_1 = \frac{\kappa_2 F_п(t_н - \bar{t}_п)}{r}d\tau. \qquad (19)$$

С учетом этого уравнение (13) можно представить как уравнение, описывающее изменение массы пара m_2 по времени $d\tau$:

$$\frac{dm_2}{d\tau} = \frac{2\sqrt{3}\cdot i^2 R_{н_2}\eta_э - 2\kappa_2 F_п(t_{нас} - \bar{t}_п) - \kappa_3 F_в(t_{нас} - \bar{t}_п) - \frac{\kappa_2 F_п(t_{нас} - \bar{t}_п)}{r}\cdot C_в(t_{нас} - \bar{t}_п) - m_н C_в\frac{dt_{нас}}{d\tau}}{r + C_в(t_{нас} - \bar{t}_п)} \qquad (20)$$

Если массу dm_2 умножить на удельный объем насыщенного пара υ'', то получим увеличение объема паровой зоны dV, а разделив это на площадь сечения, найдем величину dh:

$$dh = \frac{4dV}{\pi(d_П^2 - d_э^2)} = \frac{4dm\cdot\upsilon''}{\pi(d_П^2 - d_э^2)}, \qquad (21)$$

откуда

$$dm = dh\,\frac{\pi\left(d_{\text{п}}^{2} - d_{\text{э}}^{2}\right)}{4\upsilon''}. \tag{22}$$

С учетом этого уравнение (20) можно записать в канонической форме следующим образом:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{4\upsilon''}{\pi(d_{\text{п}}^{2} - d_{\text{э}}^{2})}\cdot\frac{2i^{2}R_{\text{н}_2}\eta_{\text{эл}} - (t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}})\cdot\left(2\kappa_2 F_{\text{п}} - \kappa_3 F_{\text{в}}\right) - \frac{\kappa_2 F_{\text{п}}}{r}\left(\frac{t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}}}{4}\right) - \frac{m_{\text{н}} C_{\text{в}}\, dt_{\text{нас}}}{d\tau}}{r + C_{\text{в}}(t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}})}. \tag{23}$$

Интегрирование этого уравнения позволит получить зависимость $h = f(\tau)$. Изменение температуры в непроточной зоне будет определяться только изменением давления в ней:

$$\frac{dt_{\text{н}}}{d\tau} = \frac{dt_{\text{нас}}}{dP}, \tag{24}$$

где P определяется выражением:

$$P = B + H + h + dh. \tag{25}$$

Анализируя процессы в проточной зоне на втором этапе, отмечаем, что теперь количество получаемого от непроточной зоны тепла определяется так же двумя слагаемыми (от зоны кипения и от зоны конденсации), а расходные составляющие теплового баланса останутся прежними:

$$\left[\sqrt{3}\,i^{2}R_{\text{п}}\eta_{\text{эл}} + 3(t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}})\left(\kappa_2 F_{\text{п}} + \kappa_3 F_{\text{в}}\right)\right]d\tau = C_{\text{в}} m_{\text{п}}\, dt_{\text{п}_2} + C_{\text{в}} M\,(t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}})\,d\tau + C_{\text{с}} m_{\text{с}}\, dt_{\text{п}_2} + Q\,d\tau \tag{26}$$

Приведем это выражение к канонической форме, чтобы убедиться, что и здесь численное интегрирование позволяет рассчитать зависимость $t_{\text{П}} = f(\tau)$:

$$\frac{dt_{\text{п}_2}}{d\tau} = \frac{\left[\sqrt{3}\cdot i^{2}R_{\text{п}}\eta_{\text{эл}} + 3\cdot(t_{\text{нас}} - \bar{t}_{\text{п}})\left(\kappa_2 F_{\text{п}} + \kappa_3 F_{\text{в}}\right)\right] - C_{\text{в}} M\left(t_{\text{п}_2} - \bar{t}_{n}\right) + Q}{C_{\text{в}} m_{\text{в}} + C_{\text{с}} m_{\text{к}}} \tag{27}$$

Интегрирование приведенных дифференциальных уравнений (23), (24) и (27) было проведено на ПК с помощью пакета прикладных программ, выполненных на языке Паскаль (ВР-7). Использовался метод Рунге – Кутта 4-го порядка с автоматическим шагом, обеспечивающим заданную точность [5]. Реализован структурно-модульный принцип: и метод Рунге – Кутта, и другие вычислительные алгоритмы (расчет коэффициентов теплоотдачи, коэффициентов теплопередачи, электрического сопротивления зон и др.) были выполнены в виде отдельных процедур и модулей с обращением к ним из вызывающей программы. При этом термодинамические характеристики воды и пара рассчитывались с использованием соответствующих модулей из [6].

Результаты расчетов для одного из реальных аппаратов с параметрами $d_{\text{к}}$ = 0,23 м, $d_{\text{п}}$ = 0,082 м, $d_{\text{э}}$ = = 0,057 м, $l_{\text{э}}$ = 0,6 м, $l_{\text{п}}$ = 0,62 м, H = 3 м, G = 15 л/мин, $m_{\text{п}}$ = 0,84 кг, $m_{\text{ф}}$ = 1,4 кг, $m_{\text{к}}$ = 18,4 кг при ρ_{20} = = 12 Ом·м приведены на рис. 3, где также представлены результаты экспериментальных исследований линейного тока в период выхода водонагревателя на установившийся режим нагрева. Из рисунка 3 видно, что максимальное отклонение расчетных результатов от экспериментальных составляет менее 5 % и это можно считать за доказательство адекватности полученной математической модели.

На рис. 4 приведены кривые изменения $t_{\text{п}_2}$ и i по времени при расходах G, равных 5, 10, 15 и 20 л/мин. Рисунок 4 наглядно отображает, насколько затягивается процесс разогрева с увеличением расхода воды, и как расход влияет на величину температуры воды на выходе водонагревателя.

Таким образом, на основе тепловых балансов была получена математическая модель, адекватно описывающая процессы, протекающие в водонагревателе

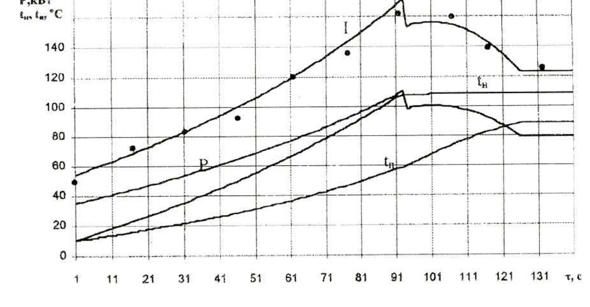

Рис. 3. Результаты расчета и экспериментальные данные динамических процессов водонагревателя в проточном режиме нагрева при расходе воды 15 л/мин

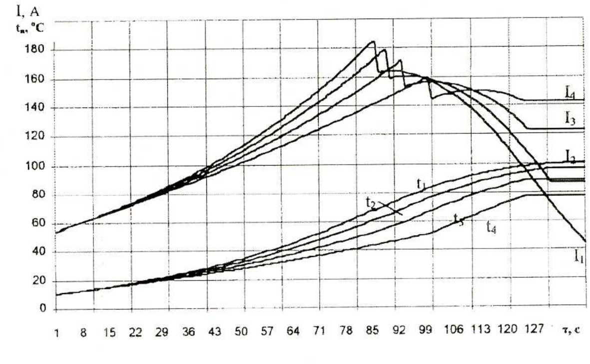

Рис. 4. Кривые изменения температуры воды на выходе водонагревателя ($t_{\text{п}}$) и потребляемого тока (I) по времени при различных расходах: 1 – при расходе 5 л/мин, 2 – при расходе 10 л/мин, 3 – при расходе 15 л/мин, 4 – при расходе 20 л/мин

с пассивным электродом, позволяющая досконально исследовать неустановившейся и переходные процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калинин В.Ф., Шувалов А.М., Гудухин В.Ф., Терентьев О.В.* Электродный саморегулируемый водонагреватель // Механизация и электрификация сельского хозяйства. 2000. № 11. С. 15-16.
2. *Гайдук В.И., Шмигель В.Н.* Практикум по электротехнологии. М.: Агропромиздат, 1989. С. 175.
3. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия, 1975. С. 486.
4. Электротермическое оборудование для сельскохозяйственного производства / Н.Б. Каган и др. М.: Энергия, 1975. 192 с.
5. *Агеев М.И., Алик В.П., Галиев Р.М., Макаров Ю.И.* Библиотека алгоритмов. М.: Сов. радио, 1975.
6. *Ляшков В.И.* Компьютерные расчеты в термодинамике. Тамбов: ТГТУ, 1997. С. 163.

Поступила в редакцию 14 марта 2002 г.