

Пр и м е р. Положим $h(t) = \begin{cases} 2t + 2, & t \in [1, 2), \\ 2t + 4, & t \in [2, 3]. \end{cases}$ При $\lambda \in [0, \infty)$ рассмотрим линейное уравнение

$$y(t) = y(h(t)) + \lambda, \quad t \in [1, 3], \quad y(s) = 0, \text{ если } s \notin [1, 3], \quad (2)$$

относительно неизвестной функции $y \in L_\infty([1, 3], \mu, \mathbb{R}^n)$.

Если $\lambda = 0$, то уравнение (2) имеет глобальное решение $y(t) \equiv 0$, для остальных значений λ существует предельно продолженное решение

$$y(t) = m\lambda, \quad t \in \left[\sum_{i=0}^{m-1} 2^i, \sum_{i=0}^m 2^i \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1-25.
2. Жуковский Е.С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сб. Москва, 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.
3. Бурлаков Е.О. О разрешимости операторных уравнений Volterra // Вестник тамб. ун-та. Тамбов, 2010. Т. 15. № 6. С. 1654-1656.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97503, № 11-01-00626).

Burlakov E.O. On solvability of operator Volterra equations and continuous dependence of solutions on parameters. The conditions of existence and continuous dependence on parameters of a unique global or maximally-prolonged solution to the Volterra equation in a functional space are obtained.

Key words: Volterra operators; continuous dependence of solutions on parameters; locally Lipschitz operators.

Бурлаков Евгений Олегович, ОГУЗ ТПБ, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер-программист, e-mail: eb_@bk.ru.

УДК 517.977

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© Д.С. Быков

Ключевые слова: оптимальная стабилизация; квадратичный критерий качества; система с последствием; сплайны высшего порядка.

При приближенном построении оптимальных стабилизирующих управлений для автономной системы с последствием применяется ее аппроксимация системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Переход к аппроксимирующей системы в функциональном пространстве состояний использует методы приближений функций сплайнами. В работах Н.Н. Красовского, К. Ito и К. Kappel при построении аппроксимирующих систем для уравнения с последствием частного вида выбирались сплайны нулевого и первого порядка.

Исследуется задача оптимальной стабилизации для системы с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta) x(t+\vartheta) + Bu, \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) C_1 x(t) + u^T(t) C_2 u(t)] dt. \quad (2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющее воздействие, η — матричнозначная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\tau, 0]$, B — матрица размерности $n \times r$, C_1 и C_2 — положительно определенные матрицы соответствующей размерности.

Для решения поставленных задач удобно перейти к постановке в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. Система (1) и критерий качества (2) примут вид

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad (3)$$

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}_t^T(0) C_1 \mathbf{x}_t(0) + u^T(t) C_2 u(t)] dt. \quad (4)$$

Здесь замкнутый неограниченный оператор $\mathbf{A}$ и ограниченный оператор $\mathbf{B}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) &= \mathbf{x}'(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int_{-\tau}^0 d\eta(s) \mathbf{x}(s), \\ (\mathbf{B}u)(\vartheta) &= 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad (\mathbf{B}u)(0) = Bu, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x} \in D(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^r$.

Для нахождения аппроксимирующих стабилизирующих управлений в работах [1–3] систему (3) заменяют конечномерной системой дифференциальных уравнений, используя сплайны нулевого порядка. В работе [4] были использованы сплайны первого порядка. В настоящей работе предлагается схема аппроксимации, основанная на сплайнах высшего порядка.

Зададим на отрезке $[-\tau, 0]$ равномерную сеть, состоящую из $N \in \mathbb{N}$ узлов. Пусть $\mathbb{B}_N^m$ — линейное пространство, порожденное B -сплайнами порядка m дефекта 1 с узлами из этой сети, а $\mathbf{P}_N^m$ — оператор, проектирующий пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}_N^{m-1} \times \mathbb{R}^n$. Будем аппроксимировать решение задачи оптимальной стабилизации (3), (4) в бесконечномерном пространстве решением задачи оптимальной стабилизации системы в конечномерном пространстве $\mathbb{B}_N^m$

$$\mathbf{P}_N^m \dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{A}\mathbf{x}_N + \mathbf{B}u \quad (5)$$

с критерием качества (4).

Для эффективного применения численных методов при решении задачи (5), (4) заменим ее эквивалентной. Сужение оператора $\mathbf{P}_N^m$ на пространство $\mathbb{B}_N^m$ является биекцией $\mathbb{B}_N^m \rightarrow \mathbb{B}_N^{m-1} \times \mathbb{R}^n$, обозначим его матричное представление через Q_N^m . Сужение оператора $\mathbf{A}$ на $\mathbb{B}_N^m$ является отображением из $\mathbb{B}_N^m$ в $\mathbb{B}_N^{m-1} \times \mathbb{R}^n$. Обозначим его матричное представление через H_N^m . Тогда задача оптимальной стабилизации (5), (4) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_{N+m}}{dt} = (Q_N^m)^{-1} H_N^m X_{N+m} + (Q_N^m)^{-1} B_N u, \quad X_{N+m} \in \mathbb{R}^{n(N+m)},$$

с критерием качества

$$J_N^m = \int_0^{\infty} \left([X_{N+m}(t)]_0^T C_1 [X_{N+m}(t)]_0 + u^T(t) C_2 u(t) \right) dt,$$

где $[X_{N+m}]_0$ — первая компонента вектора X_{N+m} .

Предложенный алгоритм нахождения аппроксимирующих стабилизирующих оптимальных управлений имеет численную реализацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 716–724.
2. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control and Optimization. 1983. V. 21. №. 1. P. 95–139.
3. Lasiecka L., Manitius A. Differentiability and Convergence Rates of Approximating Semigroups for Retarded Functional Differential Equations // SIAM J. Numerical anal. 1988. V. 25. № 4. P. 883–907.
4. Ito K., Kappel F. A Uniformly Differentiable Approximation Scheme for Delay Systems Using Splines // Appl. Math. and Optim. 1991. V. 23. № 1. P. 217–262.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Bykov D.S. Approximative method of finding optimal stabilization control for autonomous system with aftereffect. Differential autonomous system with aftereffect is approximate by system of ordinary differential equations to find approximative optimal stabilization control. Transition to approximation system in functional space uses methods of theory of splines. In works of Krasovskii, Ito and Kappel splines of zero- and first-order are used for construction of approximative systems for equation with aftereffect.

Key words: optimal stabilization; quadratic cost functional; system with aftereffect; high-order spline.

Быков Данил Сергеевич, Уральский государственный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, e-mail: bykovdanila@gmail.com.

УДК 5177.330.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА ФРАКТАЛЬНОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

© В.В. Васильев

Ключевые слова: временной ряд; индекс фрактальности; персистентность; антиперсистентность; тренд; флэт.

В работе рассмотрено вычисление индекса фрактальности временного ряда, который может быть использован при работе с инструментами на финансовом и фондовом рынках.

В работе [1] введено понятие индекса фрактальности временного ряда, задаваемого функцией $f(t)$, где t — дискретное время. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n = b$ на m равных частей длинами $\delta = \frac{b-a}{m}$. Построим покрытие функции $f(t)$ с помощью прямоугольников с основанием δ , высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$