УДК 517.988, 517.965

# О КОРРЕКТНОСТИ АБСТРАКТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© Е.О. Бурлаков, Е.С. Жуковский, А.П. Ходаев

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; краевые задачи; непрерввная зависимость решения от параметров уравнения.
Сформулированы условия корректной разрешимости краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Для исследования различных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), то есть уравнений, содержащих неизвестную векторную функцию одного переменного и ее обыкновенную производную, Н.В. Азбелевым была предложена идея унификации методов исследования, основанная на представлении ФДУ в виде операторного уравнения в соответствующем функциональном пространстве. Это операторное уравнение получило название абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ). В виде АФДУ записываются, например, дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения нейтрального типа и др., подверженные и не испытывающие импульсных воздействий, имеющие и не имеющие сингулярные особенности. Благодаря работам Н.В. Азбелева и его учеников были подробно изучены линейные АФДУ. Оказалось, что при наличии «обычных» свойств у рассматриваемых пространств и выполнении достаточно естественных требований к операторам, входящим в уравнение, для линейного АФДУ имеют место основные результаты теории линейного обыкновенного дифференциального уравнения [1]. Теория нелинейных АФДУ пока менее изучена. Полученные к настоящему времени результаты в основном относятся к так называемым «приводимым уравнениям» [1], которые эквивалентны уравнениям с вполне непрерывным отображением в правой части.

Здесь мы рассмотрим проблему корректности нелинейной краевой задачи для АФДУ. Отметим, что В.П. Максимовым эта проблема для «классических» ФДУ в пространствах абсолютно непрерывных функций подробно исследована иными методами [2].

Для произвольных банахова пространства $E$, элемента $e_0 \in E$, множества $A \subset E$ и числа $r > 0$ обозначим $B_E(e_0, r) = \{e \in E \mid \|e - e_0\|_E < r\}$ – открытый шар в $E$ с центром в $e_0$ радиуса $r$, $\overline{A}$ – замыкание множества $A$ в пространстве $E$.

Пусть $R^n$ – пространство векторов, имеющих $n$ действительных компонент; $D$, $M$, – банаховы пространства, причем $D$ изоморфно и изометрично прямому произведению $M \times R^n$ и изоморфизм задан операторами $\binom{d}{\eta} : D \to M \times R^n$, $(\Xi, Y) = \binom{d}{\eta}^{-1} : M \times R^n \to D$. Далее, предполагаем, что пространство $D$ компактно вложено в некоторое банахово пространство $C$, то есть $D \subset C$, существует такое число $c_1$, что для произвольного $x \in D$ выполнено $\|x\|_C \leqslant c_1 \|x\|_D$, и любой шар $B_D(0, r)$ является относительно компактным множеством в $C$.

Пусть $\Lambda$ – некоторое банахово пространство. Рассмотрим краевую задачу с параметром $\lambda \in \Lambda$ для АФДУ

$$\begin{cases} \Phi(x, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, \lambda) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi : D \times \Lambda \to M$, $\varphi : D \times \Lambda \to R^m$ – заданные отображения. Предположим, что при $\lambda = \lambda_0 \in \Lambda$ задача (1) имеет решение $x = x_0 \in D$. Применительно к краевой задаче (1) теорема о неявной функции [3, с.415] имеет вид:

Т е о р е м а 1. *Пусть*
1) *существуют такие* $\delta_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, *что операторы* $\Phi, \varphi$ *непрерывны и имеют непрерывные производные Фреше* $\Phi'_x, \varphi'_x$ *при всех* $(x, \lambda) \in B_D(x_0, \sigma_0) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$;
2) *определяемый равенством* $\mathcal{L}z = \Phi'_x(x_0, \lambda_0)z$ *линейный оператор* $\mathcal{L} : D \to M$ *сюръективен и* $\dim \ker \mathcal{L} = m$;
3) *задача* $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}z = 0, \\ lz = 0; \end{array} \right.$ *где* $l = \varphi'_x(x_0, \lambda_0)$, $l : D \to R^m$, *имеет только тривиальное решение* $z \equiv 0$.

*Тогда найдутся такие* $\delta > 0$, $\sigma > 0$, *что для любого* $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ *в шаре* $B_D(x_0, \sigma)$ *существует единственное решение* $x = x(\lambda)$ *задачи* (1), *причем отображение* $x(\cdot) : B_\Lambda(\lambda_0, \delta) \to D$ *непрерывно.*

Далее предполагаем, что исходное АФДУ приводимо к нормальному виду, то есть имеет место представление $\Phi(x, \lambda) = dx - F(x, \lambda)$, где отображение $F : D \times \Lambda \to M$ дифференцируемо по первому аргументу. Тогда производная $\Phi'_x(x, \lambda)z = dz - F'_x(x, \lambda)z$.

З а м е ч а н и е. В случае $m = n$, выполнение условия 2) теоремы 1 следует, например, из фредгольмовости «главной части» $Q : M \to M$, $Q\xi = \xi - F'_x(x_0, \lambda_0)\,\Xi\,\xi$, оператора $\mathcal{L}$ (см. [1]). В связи с приложениями доказанного утверждения к конкретным краевым задачам, отметим, что фредгольмовость оператора $Q : M \to M$ имеет место в случае, когда оператор $F'_x(x_0, \lambda_0) : D \to M$ допускает продолжение до оператора, действующего из пространства $C$ в пространство $M$.

Теорема 1 сформулирована без предположения единственности решения краевой задачи (1) при $\lambda = \lambda_0$. Теперь будем предполагать, что при $\lambda = \lambda_0$ в некотором открытом множестве $\Omega \subset C$ существует решение $x_0 = x(\lambda_0)$ задачи (1) и это решение единственно в $\overline{\Omega}$. Таким образом, считаем решение $x_0$ изолированным. Обозначим $X_\lambda$ – множество решений задачи (1), отвечающих значению параметра $\lambda$ и принадлежащих множеству $\overline{\Omega}$. Рассмотрим свойства множеств $X_\lambda$ при значениях $\lambda$, близких к $\lambda_0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть*
1) *выполнены требования теоремы 1;*
2) *существует такое* $\delta_0 > 0$, *что при всех* $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ *оператор* $F(\cdot, \lambda)$ *допускает расширение до оператора* $\widetilde{F}(\cdot, \lambda) : C \to M$, *причем оператор* $\widetilde{F} : C \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0) \to M$ *ограничен и непрерывен на* $\overline{\Omega} \times \{\lambda_0\}$;
3) *для некоторой последовательности* $\{\lambda_i\} \subset \Lambda$, $\|\lambda_i - \lambda_0\|_\Lambda \to 0$, *множества* $X_{\lambda_i}$ *содержат по крайней мере два элемента.*

*Тогда множество* $\Omega$ *неограничено, и при каждом* $i$ *можно так выбрать* $\bar{x}_i \in X_{\lambda_i}$, *что* $\|\bar{x}_i - x_0\|_D \to 0$, *а если выбирать* $x_i \in X_{\lambda_i}$ *так, что начиная с некоторого номера* $x_i \neq \bar{x}_i$, *то* $\|x_i\|_C \to \infty$.

Приведенные утверждения аналогичны результатам Е.Л. Тонкова [4, 5] о непрерывной зависимости от управления периодических решений обыкновенного дифференциального уравнения (эти результаты можно трактовать как условия корректности периодической краевой задачи).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды. Пермь: Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.

3.Интегральные уравнения. СМБ / Забрейко П.П. [и др.]. М., 1968. 448 с.

4. *Тонков Е.Л.* Оптимальные периодические движения управляемой системы // Мат. физика. 1977. № 21. С. 45–59.

5. *Тонков Е.Л.* Оптимальное управление периодическими движениями // Мат. физика. 1977. № 22. С. 54–64.


БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 07-01-00305, 09-01-97503), Научной Программой "Развитие Научного Потенциала

Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S, Hodaev A.P. On a correctness of an abstract boundary value problem. Conditions for correct solvability of a boundary value problems for nonlinear functional-differential equations.

Key words: functional-differential equations; boundary value problem; continuous dependence of solutions on equation's parameters.

УДК 517.965, 517.911

# ВЕРХНЕЕ И НИЖНЕЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© **Т. В. Жуковская**

Ключевые слова: монотонный оператор; конус в банаховом пространстве; нижнее и верхнее решения; оценки решений; операторные неравенства; уравнение с авторегулируемым запаздыванием.

Рассмотрены утверждения об операторных неравенствах, найдены условия существования верхнего и нижнего решений уравнений с монотонными операторами. Полученные результаты применяются для исследования уравнения с авторегулируемым запаздыванием.

Одной из основных задач исследования уравнений является описание свойства множеств решений. Для решения этой проблемы бывают чрезвычайно полезными утверждения о неравенствах, позволяющие построить оценки решений, доказать существование верхнего и нижнего решения. Здесь рассматриваются подобные утверждения для уравнений с монотонными операторами, действующими в полуупорядоченных банаховых пространствах.

Обозначим $L([a,b],R)$ – пространство измеримых суммируемых функций $y:[a,b]\to R$ с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^b |y(s)|\,ds$; $AC([a,b],R)$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R$, производная которых $\dot{x}\in L([a,b],R)$, с нормой $\|x\|_{AC} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_L$.

Приведем некоторые понятия теории конусов в банаховых пространствах [1], играющие важную роль в нашем исследовании.

Пусть $B$ – банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $B_+ \subset B$ называют *конусом*, если из $x\in B_+$, $x\neq 0$ вытекает, что $\lambda x\in B_+$ при $\lambda>0$ и $\lambda x\notin B_+$ при $\lambda<0$. Для $x,\ y\in B$ будем писать $x\rhd y$ или $y\lhd x$, если $x-y\in B_+$.

Элемент $\overline{z}\in B$ называют точной верхней границей множества $U\subset B$ и пишут $\overline{z}=\sup U$, если для всех $u\in U$ выполнено $\overline{z}\rhd u$ и для любого $y\in B$ из $y\rhd u$, $\forall u\in U$ следует $y\rhd \overline{z}$. Аналогично определяется точная нижняя граница. Если у множества из двух элементов есть точная