1

1

УДК 519.216, 519.866

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

© **О.М.Гусельникова**

Ключевые слова: потенциалы типа Бесселя, потенциалы типа Рисса, пространства Лоренца, перестановочно-инвариантные пространства, оптимальные вложения, убывающие перестановки.

Исследовано пространство потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$, построенное с помощью сверток для ядер $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и функций f из перестановочно инвариантного пространства $E(\mathbb{R}^n)$. Доказана теорема о вложении множества функций с ограниченным спектром в пространство потенциалов. При дополнительных условиях на гладкость преобразования Фурье ядер доказано аналогичное утверждение без использования алгебры Винера преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}^n)$. Получено необходимое условие вложения пространства потенциалов в перестановочно инвариантное пространство $X(\mathbb{R}^n)$. С использованием необходимого условия найдено перестановочно инвариантное пространство оптимальное по вложению ядер G из пространства $L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$.

Хорошо известна роль, которую играют классические потенциалы типа Бесселя в теории функциональных пространств и в ее приложениях к теории дифференциальных уравнений с частными производными. В данной работе строится обобщение классической теории потенциалов.

Вместо классических ядер Бесселя-Макдональда мы будем рассматривать ядра $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Вместо базового пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ берем более общее банахово перестановочно инвариантное пространство (ПИП) $E(\mathbb{R}^n)$ (при работе с ПИП мы будем пользоваться аксиоматикой, введенной К. Беннеттом и Р. Шарпли в книге [1]).

На основе ПИП $E(\mathbb{R}^n)$ и ядер указанного вида построим пространство потенциалов:

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) = \Big\{U = G * f, \quad f \in E(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

Будем исследовать задачу о вложении $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ в ПИП $X(\mathbb{R}^n)$. При рассмотрении этой задачи возникают следующие ключевые вопросы:
1) найти необходимые и достаточные условия вложения;
2) для данных E и G найти перестановочно инвариантную оболочку (самое узкое ПИП, в которое вложено пространство потенциалов).

О п р е д е л е н и е. *Множеством функций с ограниченным спектром* называется:

$$\mathbf{M}_{\nu,\mathbf{E}}(\mathbb{R}^n) = \Big\{g \in E(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}\ Fg \subset B_\nu\Big\},$$

где $B_\nu = [-\upsilon, \upsilon]^n$, Fg – преобразование Фурье:

$$Fg(\xi) = \Big(2\pi\Big)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} g(x) dx.$$

Предлагается следующая теорема о вложении множества функций с ограниченным спектром в пространство потенциалов.

Т е о р е м а 1. *Если* $G(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *и* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x)dx \neq 0$, *то существует такое* $\nu > 0$, *что*

$$\mathbf{M}_{\nu,\mathbf{E}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n).$$

При доказательстве данной теоремы возник вопрос об обратимости преобразований Фурье абсолютно интегрируемых функций, который был решен двумя способами, первый из которых дает следующее

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\lambda \in A$, $\lambda(\xi) \neq 0$, $\xi \in B_R$, $\mu \in A$, $supp\ \mu \subset B_R$, *где* $B_R = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R, R > 0\}$; A *– алгебра Винера преобразований Фурье интегрируемых функций (с поточечным сложением и умножением):*

$$A = \Big\{\lambda(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} g(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n : g \in L_1(\mathbb{R}^n)\Big\}, \quad \|\lambda\|_A = \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда

$$\frac{\mu}{\lambda} \in A.$$

В случае, когда преобразования Фурье обладают достаточной гладкостью, вопрос об обратимости преобразований Фурье удалось решить прямыми рассуждениями и вычислениями.

Схема доказательства теоремы 1.

Для элемента U из пространства функций с ограниченным спектром $\mathbf{M}_{\nu,\mathbf{E}}(\mathbb{R}^n)$ используем его представление в виде свертки:

$$U(x) = \Big(\varphi_\mu * U\Big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x-y)U(y)dy,$$

где $\varphi_\mu(x) = F^{-1}(\mu) \in S(\mathbb{R}^n), \mu(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{B}_{2\nu}), \mu(\xi) \equiv 1, \xi \in \mathbf{B}_{3\nu/2}$. Учитывая результат предложения 1, получаем, что U может быть представлена в виде свертки функции f из перестановочно инвариантного пространства с ядром G: $U(x) = G * f$. Для доказательства принадлежности U пространству потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ используем неравенство Миньковского и тот факт, что любой линейный оператор, ограниченный из $L_1(\mathbb{R}^n)$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$ и из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, является ограниченным из перестановочно инвариантного пространства $E(\mathbb{R}^n)$ в $E(\mathbb{R}^n)$. При помощи этих утверждений получаем оценку нормы функции U в пространстве потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ через нормы U в $E(\mathbb{R}^n)$ и свертки функции $f * G$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Эта оценка эквивалентна вложению множества функций с ограниченным спектром в перестановочно инвариантное пространство.

Для получения условий вложения пространства потенциалов в перестановочно инвариантное пространство воспользуемся следующим утверждением, полученным Берколайко М.З. и Овчинниковым В.И. [2].

Т е о р е м а 2. *Пусть* $X(\mathbb{R}^n), E(\mathbb{R}^n)$ *– перестановочно инвариантные пространства. Тогда*

$$\mathbf{M}_{\nu,\mathbf{E}}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow L_\infty \cap E(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

Теперь сформулируем необходимое условие вложения пространства потенциалов в перестановочно инвариантное пространство.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $X(\mathbb{R}^n), E(\mathbb{R}^n)$ *– перестановочно инвариантные пространства. Тогда для вложения пространства потенциалов* $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ *в ПИП* $X(\mathbb{R}^n)$ *необходимо, чтобы*

$$L_\infty \cap E(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

Действительно, если пространство потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ вложено в перестановочно инвариантное пространство $X(\mathbb{R}^n)$, то по теореме 1:

$$\exists\nu > 0: \quad \mathbf{M}_{\nu,\mathbf{E}}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n),$$

и, используя теорему 2, получим обоснование вложения в теореме 3.

Рассмотрим ядра $G \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$, где $E'(\mathbb{R}^n)-$ ассоциированное пространство. Если p функциональная норма, тогда ассоциированная норма p' определяется следующим образом:

$$p'(g) = \sup\Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} fgd\mu : f \in \mathbf{M}^+, \rho(f) \leq 1 \Big\},$$

где $g \in \mathbf{M}^+$, $\mathbf{M}^+$ – множество измеримых функций $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$. В данном случае удалось решить задачу об оптимальном вложении, т.е найдена перестановочно инвариантная оболочка (самое "узкое" перестановочно инвариантное пространство, в которое вложено пространство потенциалов).

Т е о р е м а 4. $X_0(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap E(\mathbb{R}^n)$ *является оптимальным ПИП для вложения*

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

Это означает, что:
1. *При* $X(\mathbb{R}^n) = X_0(\mathbb{R}^n)$ *выполнено* $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$,
2. *Если* $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ *для некоторого ПИП* $X(\mathbb{R}^n)$, *то* $X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью обобщенного неравенства Миньковского

$$\|G * f\|_{E(\mathbb{R}^n)} \leq \|G\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)},$$

неравенства Гёльдера

$$\|G * f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|G\|_{E'(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)}$$

и, учитывая, что $G \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap E(\mathbb{R}^n),$$

т.е. $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n)$.

Если оптимальное вложение выполнено для некоторого $X(\mathbb{R}^n)$, тогда по необходимому условию (теорема 3) получим:

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \Rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap E(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bennett C. and Sharpley R.* Interpolation of operators // Pure and Applied Mathematics 129. Academic Press, Boston, MA, 1988.

2. *Берколайко М.З., Овчинников В.И.* Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 9. Сборник статей. Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 3–17.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00093), Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/2775).

Поступила в редакцию 14 апреля 2011 г.

Guselnikova O.M. Necessary condition for the embedding of the space of potentials into rearrangement invariant space. We study space of potentials $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ constructed on the basis of functions f from rearrangement invariant spaces $E(\mathbb{R}^n)$ by means of convolutions with kernels $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$. We prove theorem about embedding of set of functions with bounded spectrum into space of potentials. Considering additional conditions on smoothness of Fourier transformation for kernels we get analogical statement without applying Wiener algebra for Fourier transformation for functions of $L_1(\mathbb{R}^n)$ space. We establish necessary condition for embedding of space of potentials into rearrangement invariant space $X(\mathbb{R}^n)$. Considering necessary condition we find rearrangement invariant space which is optimal for embedding of kernels G from space $L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$.

Key words: Bessel potentials, Riesz potentials, Lorentz spaces, rearrangement invariant spaces, optimal embeddings, decreasing rearrangement.

Гусельникова Ольга Михайловна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: erridan@yandex.ru