УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ МАРШРУТНОЙ ЗАДАЧЕ НА УЗКИЕ МЕСТА С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ

© Я. В. Салий, А. Г. Ченцов

Ключевые слова: маршрутизация; условия предшествования; внутренние работы; динамическое программирование; слои функции Беллмана.

Рассматривается экономичный вариант метода динамического программирования для решения задачи на узкие места, связанной с осуществлением маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования и работами, выполняемыми в пунктах посещения. Алгоритм построения оптимального решения реализован на ПЭВМ.

1 Введение

В статье рассматривается одна задача маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования (результаты работы докладывались на конференции «Статистика. Моделирование. Оптимизация» Челябинск, 2011 г., и были анонсированы в [1]).

Исследуется задача последовательного обхода мегаполисов с выполнением на каждом из них тех или иных работ. Рассматриваемый процесс распадается в конечную систему этапов, каждый из которых включает перемещение к соответствующему мегаполису и проведение в его пределах соответствующих работ; осуществление этапов сопровождается затратами, которые агрегируются неаддитивно. В статье исследуется вариант агрегирования, соответствующий задаче на узкие места (в то же время в пределах каждого этапа агрегирование затрат на внешнее перемещение и внутренние работы предполагается аддитивным). Имеющиеся условия предшествования выделяют множество допустимых маршрутов, с каждым из которых связываются трассы посещения мегаполисов; узлы этих трасс целесообразно объединять в упорядоченные пары, элементы которых соответствуют прибытию в мегаполис и отправлению из него.

В работе построен нестандартный вариант метода динамического программирования и на его основе — оптимальный алгоритм, реализованные на ПЭВМ. В ближайшей перспективе планируется разработать параллельную реализацию алгоритма для использования на МВС; алгоритм и используемые в процессе его работы структуры данных допускают параллельную реализацию с общей памятью. При построении процедуры на основе МДП не предусматривается вычисления всего массива значений функции Беллмана, а имеющиеся условия предшествования используются «в положительном направлении» — для снижения сложности вычислений.

Рассматриваемая задача маршрутизации имеет своим прототипом известную (труднорешаемую) задачу коммивояжера (см. [2–4] и др.), которая является одной из классических NP-полных задач (см. [5]). В [2] рассмотрен целый ряд задач маршрутизации, подобных задаче коммивояжера, но обладающих особенностями, возникающими в приложениях (морские и авиационные перевозки, технологические процессы). Среди таких особенностей [2] целесообразно отметить задачу коммивояжера с выбором (использование кластеров, составленных из городов) и конструкции, связанные с т. н. задачей курьера (использование условий предшествования, возникающих в различных приложениях). Наряду с широко используемым методом ветвей и границ [6], при решении вышеупомянутых задач используется МДП; см. [7,8]. Данный метод, применяемый для решения экстремальных задач различной природы (см. [9]), в задачах маршрутизации приводит к существенным трудностям в процессе вычислений и, по этой причине, используется обычно в теоретических исследованиях и при решении маршрутных задач малой размерности. Полезно отметить, что [9] конструкции на основе МДП могут использоваться при решении задач с неаддитивными функциями агрегирования затрат; в частности, это относится к задачам на узкие места (отметим в этой связи работу [10]).

Настоящая работа продолжает исследования [11–14], посвященные изучению задач маршрутизации на узкие места; см. в этой связи также работы [15, 16], посвященные вопросам маршрутизации с абстрактной функцией агрегирования затрат. В данной работе широко используются также конструкции аналогичных работ, связанных с решением «аддитивной» задачи маршрутизации (см., в частности, [17–20]). Основой данных построений являются методы, разработанные в [3], которые были использованы, в частности, при решении некоторых задач, возникающих в атомной энергетике, а именно задачи минимизации дозовой нагрузки персонала АЭС при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации (см. [22]) и задачи о демонтаже оборудования энергоблока, выведенного из эксплуатации (см. [23]).

2 Основные определения и обозначения

Обозначения общего характера

В дальнейшем $\triangleq$ обозначает равенство по определению, def заменяет фразу «по определению», $\varnothing$ обозначает пустое множество. Для двух произвольных объектов x, y обозначим через $\{x; y\}$ (двухэлементное) множество, содержащее x и y и не содержащее никаких других объектов. Если z — объект, то $z \triangleq \{z; z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Для произвольных объектов u и v, следуя [24, с. 67], определим упорядоченную пару с первым элементом u и вторым элементов v как $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$. Для произвольной упорядоченной пары z (как целого), через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначим соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. В случае $z \in A \times B$, где A и B — множества, $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. *Используем обычное правило экономии скобок при записи значений функции двух переменных.* Введем обозначения для нужных нам числовых множеств

- $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant \xi\}$;
- $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$;
- $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \bigcup \mathbb{N}$;
- $\overline{k, l} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0 | (k \leqslant j) \& (j \leqslant l)\}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall l \in \mathbb{N}_0$

и для некоторых теоретико-множественных понятий: $\mathrm{Fin}(S)$ обозначает семейство всех непустых конечных подмножеств произвольного множества S; мощность конечного множества $K \in \mathrm{Fin}(S)$ обозначается $|K|$, очевидно, $|K| \in \mathbb{N}$; множество всех биекций [25, с. 86] «отрезка» $\overline{1, |K|}$ на K обозначаем через $(\mathrm{bi})[K]$. Полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$.

Специальные обозначения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X и число $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$, определяющее количество целевых множеств (мегаполисов), составляющих кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \to \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

а также точку $x^0 \in X$ — начальный пункт (базу). В дальнейшем полагаем, что

$$(x^0 \notin M_j \ \forall j \in \overline{1,N}) \& (M_k \bigcap M_l = \varnothing \ \forall k \in \overline{1,N} \ \forall l \in \overline{1,N} \setminus \{k\}). \tag{2.2}$$

Полагая $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, получаем множество всех перестановок [25, с. 87] в $\overline{1,N}$, называемых далее (полными) *маршрутами.* Произвольной $\alpha \in \mathbb{P}$ сопоставим $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$ — перестановку в $\overline{1,N}$, обратную к α :

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \ \forall k \in \overline{1,N}.$$

Чтобы ввести условия предшествования, фиксируем множество $\mathbb{K}, \mathbb{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$, его элементы — упорядоченные пары — назовем *адресными парами.* Для произвольного $z \in \mathbb{K}$, элемент $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ назовем *отправителем,* а элемент $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$ — *получателем.* Смысл условий предшествования состоит в ограничении выбора маршрута теми маршрутами, где для всякой адресной пары посещение отправителя предшествует посещению получателя. С учетом этого, множество допустимых (по предшествованию) маршрутов имеет вид (см. [21, часть 2])

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \forall z \in \mathbb{K}\}. \tag{2.3}$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие:

Условие 1. *Для всякого непустого множества* $\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$, *непременно*

$$\exists z_0 \in \mathbb{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \forall z \in \mathbb{K}.$$

Тогда $\mathbb{A} \neq \varnothing$ [21, Часть 2]. Итак, мы располагаем допустимыми маршрутами (случай $\mathbb{K} = \varnothing$ не исключается и отвечает случаю отсутствия условий предшествования). Обозначим через $\mathbb{X}$ множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X \times X.$$

Кортежи такого типа играют роль трасс при «движении» вдоль маршрута: если $\alpha \in \mathbb{P}$, то

$$\mathfrak{X}_\alpha \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbb{X} | (z_0 = (x^0, x^0)) \& (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1,N})\} \tag{2.4}$$

есть множество всех трасс, согласованных с маршрутом α. Легко видеть, что $\mathfrak{X}_\alpha$ есть непустое конечное множество, т. е. $\mathfrak{X}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X})$. Разумеется, в (2.4) нам достаточно использовать маршруты из (2.3), т. е. ограничиться случаем $\alpha \in \mathbb{A}$. В этом случае каждая пара $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}})$, где $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$, может использоваться в качестве решения нашей маршрутной задачи. Фиксируем функции

$$c : X \times X \to [0, \infty[, \ c_1 : X \times X \to [0, \infty[, \ldots, c_N : X \times X \to [0, \infty[.$$

Введем обозначение для цены трассы $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$, согласованной с маршрутом $\alpha \in \mathbb{P}$:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \triangleq \max_{i \in \overline{0,N-1}} [c(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + c_{\alpha(i+1)}(z_{i+1})]. \tag{2.5}$$

В конструкциях, связанных с основной задачей маршрутизации (ОЗМ), в соотношениях, подобных (2.5) подразумевается что $\alpha \in \mathbb{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$. Таким образом, получаем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \to \min, \ \alpha \in \mathbb{A}, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha \tag{2.6}$$

о минимизации цены трассы, согласованной с маршрутом. С задачей (2.6) — *основной задачей маршрутизации* (ОЗМ) связываем экстремум

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{2.7}$$

и непустое множество (оптимальных) решений.

3 Расширение основной задачи маршрутизации

Для построения нужной версии МДП в духе [19, 20] потребуется ввести некоторое расширение ОЗМ. В свою очередь, для построения последнего требуется провести редукцию системы ограничений [21, Часть 2], сводящуюся к замене допустимости по предшествованию на допустимость в смысле некоторой процедуры вычеркивания, далее называемой допустимостью по вычеркиванию. С учетом этого, введем ряд дополнительных обозначений. Через $\mathbf{N}$ (через $\mathfrak{N}$) обозначим семейство всех (всех непустых) подмножеств индексного множества $\overline{1,N}$; множества из $\mathfrak{N}$ будем называть *списками заданий* или просто *списками*, если ясно, о чем идет речь. Для списка $K \in \mathfrak{N}$ введем

$$\Sigma[K] \triangleq \{z \in \mathbb{K} | (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\},$$

множество всех адресных пар, «полностью» укладывающихся в список K. С учетом этого, введем вычеркивание в виде отображения

$$\mathbb{I} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N},$$

полагая, как и в [21, Часть 2],

$$\mathbb{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \Sigma[K]\}. \tag{3.1}$$

В терминах этого отображения можно определить допустимость по вычеркиванию не только полных, но и частичных маршрутов. Поскольку $\mathfrak{N} = \mathrm{Fin}(\overline{1,N})$, для $K \in \mathfrak{N}$ определено число $|K| \in \overline{1,N}$ и множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций $\overline{1,|K|}$ на K (при этом $\mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$). Теперь можно ввести множество *частичных маршрутов*

$$(\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] | \alpha(s) \in \mathbb{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{s,|K|}\}) \ \forall s \in \overline{1,|K|}\}, \tag{3.2}$$

элементы которого будут использоваться для нумерации заданий из списка K. При этом, согласно [21, Часть 2], справедливо равенство

$$\mathbb{A} = (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}]. \tag{3.3}$$

Кроме того, отметим, что [21, Предложение 2.2.2]

$$(\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.4}$$

Из (2.3),(3.4) вытекает (при условии 1), что $\mathbb{A} \neq \varnothing$. Данное свойство уже отмечалось в разделе 2. Для расширения основной задачи потребуются также «частичные» (неполные) трассы посещения мегаполисов. С этой целью введем следующее определение: если $x \in X, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]$, то $\mathfrak{z}(x, K, \alpha)$ есть def множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to X \times X, \tag{3.5}$$

для каждого из которых $z_0 = (x, x)$ и

$$z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1,|K|}; \tag{3.6}$$

разумеется, $\mathfrak{z}(x, K, \alpha)$ есть непустое конечное множество. Теперь можно в обобщенной форме ввести критерий для каждой «укороченной» (частичной) задачи: если $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}$ есть кортеж (3.5), то

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}) \triangleq \max_{i \in \overline{0,|K|-1}} [c(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + c_{\alpha(i+1)}(z_{i+1})] \in [0, \infty[. \tag{3.7}$$

В терминах (3.7) определим сами «укороченные задачи»: для заданных $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$ требуется

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}) \to \min, \alpha \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K], (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{z}(x, K, \alpha). \tag{3.8}$$

Данная задача совместна, она характеризуется значением (экстремумом)

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]} \; \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,K}} \in \mathfrak{z}(x, K, \alpha)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0,K}}) \in [0, \infty[. \tag{3.9}$$

Кроме того, положим

$$v(x, \varnothing) \triangleq 0 \;\forall x \in X. \tag{3.10}$$

Мы получили функцию

$$v : X \times \mathbf{N} \to [0, \infty[, \tag{3.11}$$

которая в существенной части определяется (3.9); нужное в дальнейшем краевое условие определяется (3.10). Заметим, что (3.9) можно, в частности, определить и при $x = x^0$ и $K = \overline{1, N}$. В этом случае следует учитывать (3.3) и очевидное (см. (2.4)) обстоятельство:

$$\mathfrak{z}(x^0, \overline{1, N}, \alpha) = \mathfrak{X}_\alpha \;\forall \alpha \in \mathbb{A}. \tag{3.12}$$

Из (2.7),(3.3) и (3.9) вытекает равенство

$$V = v(x^0, \overline{1, N}). \tag{3.13}$$

Теорема 3.1. *Если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, то*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \; \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}). \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть $n \triangleq |K|$, тогда $n \in \overline{1, N}$. Имеет смысл отдельно рассмотреть следующие два случая: 1)$n = 1$; 2)$n \in \overline{2, N}$.

1. Пусть $n = 1$. Тогда K — одноэлементное множество: $K = \{\mathbb{j}\}$, где $\mathbb{j} \in \overline{1, N}$. Поэтому $(\mathrm{bi})[K]$ — также одноэлементное множество, содержащее тривиальное отображение $\alpha_0 : \{1\} \to K$, для которого $\alpha_0(1) = \mathbb{j}$. Согласно (3.4), $(\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] \subset (\mathrm{bi})[K]$, а потому $(\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K] = \{\alpha_0\}$. В этом случае $\mathfrak{z}(x, K, \alpha_0)$ есть множество всех (тривиальных) кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,1}} : \overline{0, 1} \to X \times X$$

таких что $z_0 = (x, x)$, а $z_1 \in M_{\alpha_0(1)} \times M_{\alpha_0(1)}$, т. е.

$$z_1 \in M_{\mathbb{j}} \times M_{\mathbb{j}}.$$

Наконец, из (3.7) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_K^{(\alpha_0)}((z_i)_{i \in \overline{0,1}}) &= c(\mathrm{pr}_2(z_0), \mathrm{pr}_1(z_1)) + c_{\alpha_0(1)}(z_1) = \\ &= c(x, \mathrm{pr}_1(z_1)) + c_{\mathbb{j}}(z_1) \;\forall (z_i)_{i \in \overline{0,1}} \in \mathfrak{z}(x, K, \alpha_0). \end{aligned}$$

Поэтому из (3.9) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} v(x, K) &= \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,1}} \in \mathfrak{z}(x, K, \alpha_0)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha_0)}((z_i)_{i \in \overline{0,1}}) = \\ &= \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,1}} \in \mathfrak{z}(x, K, \alpha_0)} [c(x, \mathrm{pr}_1(z_1)) + c_{\mathbb{j}}(z_1)] = \min_{z \in M_{\mathbb{j}} \times M_{\mathbb{j}}} [c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_{\mathbb{j}}(z)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Теперь рассмотрим множество $\mathbb{I}(K) = \mathbb{I}(\{\mathbb{j}\})$. Поскольку $K \in \mathfrak{N}$, то $\mathbb{I}(K) \in \mathfrak{N}$ и, в частности,

$$\mathbb{I}(K) \neq \varnothing.$$

С другой стороны, $\mathbb{I}(K) \subset K = \{\mathbb{j}\}$. Следовательно, $\mathbb{I}(K) = \{\mathbb{j}\}$. С учетом (3.15) получаем равенство

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z)] \tag{3.16}$$

в рассматриваемом случае $n = 1$. Поскольку $c, c_1, \ldots, c_N$ — неотрицательные функции,

$$c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) \in [0, \infty[\ \ \forall j \in \mathbb{I}(K)\ \forall z \in M_j \times M_j.$$

С другой стороны, при $j \in \mathbb{I}(K)$ и $z \in M_j \times M_j$ имеем

$$v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) = v(\mathrm{pr}_2(z), \varnothing) = 0,$$

а потому справедливо равенство

$$\sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) = c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z),$$

позволяющее преобразовать (3.16) к виду

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}), \tag{3.17}$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь $n \in \overline{2, N}$. С учетом (3.9) подберем $\mathbb{a} \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(y_i)_{i \in \overline{0,n}} \in \mathfrak{z}(x, K, \mathbb{a})$ так, чтобы

$$v(x, K) = \mathfrak{C}_K^{(\mathbb{a})}((y_i)_{i \in \overline{0,n}}). \tag{3.18}$$

Тогда, в частности, $(y_i)_{i \in \overline{0,n}} : \overline{0,n} \to X \times X$; при этом $y_0 = (x, x)$ и

$$y_j \in M_{\mathbb{a}(j)} \times M_{\mathbb{a}(j)}\ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{3.19}$$

В частности, из (3.19) следует, что

$$y_1 \in M_{\mathbb{a}(1)} \times M_{\mathbb{a}(1)}. \tag{3.20}$$

Напомним, что $\mathbb{a} \in (\mathrm{bi})[K]$; значит, $\mathbb{a} : \overline{1,n} \to K$ и, согласно (3.2),

$$\mathbb{a}(s) \in \mathbb{I}(\{\mathbb{a}(i) : i \in \overline{s,n}\})\ \forall s \in \overline{1,n}. \tag{3.21}$$

В частности, $\mathbb{a}(1) \in \mathbb{I}(\{\mathbb{a}(i) : i \in \overline{1,n}\})$, где в силу биективности $\mathbb{a}$ справедливо равенство $K = \{\mathbb{a}(i) : i \in \overline{1,n}\}$, а потому $\mathbb{a}(1) \in \mathbb{I}(K)$. Учитывая теперь (3.20), мы получаем неравенство

$$\begin{gathered}\min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \leqslant \\ \leqslant \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathbb{a}(1)}(y_1); v(\mathrm{pr}_2(y_1), K \setminus \{\mathbb{a}(1)\})\}).\end{gathered} \tag{3.22}$$

Для краткости, положим $T \triangleq K \setminus \{\mathbb{a}(1)\}$. Тогда $T \neq \varnothing$ и, следовательно, $T \in \mathfrak{N}$, причем

$$|T| = n - 1 \tag{3.23}$$

(поскольку, в частности, $\mathbb{a}(1) \in K$). Возвращаясь к (3.22), получаем оценку

$$\begin{aligned}&\min_{j\in\mathbb{I}(K)}\ \min_{z\in M_j\times M_j}\ \sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(z))+c_j(z);v(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\})\})\leqslant\\&\leqslant\sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(y_1))+c_{\mathbb{a}(1)}(y_1);v(\mathrm{pr}_2(y_1),T)\}).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Вместе с тем, $\mathrm{pr}_2(y_1)\in X, T\in\mathfrak{N}$ и поэтому, согласно (3.24) и (3.9), получаем равенство

$$v(\mathrm{pr}_2(y_1),T)=\min_{\alpha\in(\mathbb{I}-\mathrm{bi})[T]}\ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,n-1}}\in\mathfrak{z}(\mathrm{pr}_2(y_1),T,\alpha)}\mathfrak{C}_T^{(\alpha)}((z_i)_{i\in\overline{0,n-1}})\in[0,\infty[.\tag{3.25}$$

В силу инъективности $\mathbb{a}$, $\mathbb{a}(j+1)\neq\mathbb{a}(1)\ \forall j\in\overline{1,n-1}$. Поэтому,

$$\mathbb{a}(j+1)\in T\ \forall j\in\overline{1,n-1}.$$

С учетом этого, введем отображение $\bar{a}:\overline{1,n-1}\to T$ по правилу

$$\bar{a}\triangleq(\mathbb{a}(j+1))_{j\in\overline{1,n-1}}.$$

Естественно,

$$\bar{a}(j)=\mathbb{a}(j+1)\ \forall j\in\overline{1,n-1}.\tag{3.26}$$

Покажем, что $\bar{a}\in(\mathrm{bi})[T]$. Если $t\in T$, то $t\in K$; при этом, $t\neq\mathbb{a}(1)$. В этом случае из определения $\mathbb{a}$ следует, что $t=\mathbb{a}(\mathbb{j})$, где $\mathbb{j}\in\overline{2,n}$ и, следовательно, $\mathbb{j}-1\in\overline{1,n-1}$. Поэтому,

$$\bar{a}(\mathbb{j}-1)=\mathbb{a}(\mathbb{j})=t.$$

Поскольку t выбиралось произвольно, установлено вложение $T\subset\{\bar{a}(s):\ s\in\overline{1,n-1}\}$. Поскольку $\bar{a}$ принимает значения в T, данное вложение означает равенство

$$T=\{\bar{a}(s):\ s\in\overline{1,n-1}\}.\tag{3.27}$$

Из (3.26) видно, что $\bar{a}$ «наследует» инъективность $\mathbb{a}$, что с учетом (3.27) дает биективность $\bar{a}$, а потому (см. (3.23)) $\bar{a}\in(\mathrm{bi})[T]$. Более того,

$$\bar{a}\in(\mathbb{I}-\mathrm{bi})[T].\tag{3.28}$$

В самом деле, пусть $\nu\in\overline{1,n-1}$. Рассмотрим множество $A\triangleq\{\bar{a}(i):\ i\in\overline{\nu,n-1}\}\in\mathfrak{N}$ и его образ $\mathbb{I}(A)$. Из определения $\bar{a}$ вытекает, что

$$A=\{\bar{a}(i):\ i\in\overline{\nu,n-1}\}=\{\mathbb{a}(j):j\in\overline{\nu+1,n}\},$$

где $\nu+1\in\overline{2,n}$. В этом случае, согласно (3.21), $\mathbb{a}(\nu+1)\in\mathbb{I}(A)$, где по выбору ν получаем из (3.26) равенство $\bar{a}(\nu)=\mathbb{a}(\nu+1)$ и, стало быть, $\bar{a}(\nu)\in\mathbb{I}(A)$. С учетом определения A получаем, что

$$\bar{a}(\nu)\in\mathbb{I}(\{\bar{a}(i):i\in\overline{\nu,n-1}\}).$$

Поскольку выбор ν был произвольным, установлено, что

$$\bar{a}(j)\in\mathbb{I}(\{\bar{a}(i):i\in\overline{j,n-1}\})\ \forall j\in\overline{1,n-1}.$$

С учетом (3.2), (3.23) и ранее установленной биективности $\bar{a}$ получаем желаемое свойство (3.28). По выбору $(y_i)_{i\in\overline{0,n}}$ имеем, что $y_{j+1}\in X\times X\ \forall j\in\overline{0,n-1}$. Введем $(\widetilde{y}_i)_{i\in\overline{0,n-1}}$ по правилу $\widetilde{y}_j\triangleq y_{j+1}\forall j\in\overline{0,n-1}$. Тогда $\widetilde{y}_j\in M_{\mathbb{a}(j+1)}\times M_{\mathbb{a}(j+1)}\ \forall j\in\overline{1,n-1}$. С учетом определения $\bar{a}$ последнее свойство преобразуется к виду

$$\widetilde{y}_j\in M_{\bar{a}(j)}\times M_{\bar{a}(j)}\forall j\in\overline{1,n-1}.\tag{3.29}$$

При этом, по (3.20), $\widetilde{y}_0 = y_1 \in M_{\mathrm{a}(1)} \times M_{\mathrm{a}(1)}$. Тогда $(\mathrm{pr}_1(\widetilde{y}_0) \in M_{\mathrm{a}(1)}) \& (\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_0) \in M_{\mathrm{a}(1)})$. Отсюда, $\widehat{y}_0 \triangleq (\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_0), \mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_0)) \in M_{\mathrm{a}(1)} \times M_{\mathrm{a}(1)}$; тогда, как следствие, $\widehat{y}_0 \in X \times X$. Положим $\widehat{y}_j \triangleq \widetilde{y}_j \ \forall j \in \overline{1, n-1}$. Мы получили кортеж

$$(\widehat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-1}} : \overline{0, n-1} \to X \times X.$$

Согласно определениям $\widetilde{y}_0$ и $\widehat{y}_0$,

$$\widehat{y}_0 = (\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_2(y_1)). \tag{3.30}$$

Из (3.29) вытекает, что $\widehat{y}_j \in M_{\bar{a}(j)} \times M_{\bar{a}(j)} \ \forall j \in \overline{1, n-1}$. Поэтому (см. (3.23),(3.30))

$$(\widehat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{z}(\mathrm{pr}_2(y_1), T, \bar{a}). \tag{3.31}$$

Из (3.24),(3.25),(3.28) и (3.31) получаем очевидную оценку

$$v(\mathrm{pr}_2(y_1), T) \leqslant \mathfrak{C}_T^{(\bar{a})}((\widehat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-1}}). \tag{3.32}$$

Вернемся к (3.18). С учетом (3.7) получаем

$$\begin{aligned} v(x, K) = {} & \max_{i \in \overline{0, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(y_{i+1})) + c_{\mathrm{a}(i+1)}(y_{i+1})] = \\ = {} & \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(y_0), \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{1, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(y_{i+1})) + \\ & + c_{\mathrm{a}(i+1)}(y_{i+1})]\}). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Отсюда по определению $(y_i)_{i \in \overline{0, n}}$ следует

$$v(x, K) = \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1)); \max_{i \in \overline{1, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(y_{i+1})) + c_{\mathrm{a}(i+1)}(y_{i+1})]\}).$$

С учетом (3.25) последнее выражение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} v(x, K) &= \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{1, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(y_{i+1})) + c_{\bar{a}(i)}(y_{i+1})]\}) = \\ &= \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{1, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(y_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{y}_i)) + c_{\bar{a}(i)}(\widetilde{y}_i)]\}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Если $i \in \overline{1, n-1}$, то $i - 1 \in \overline{0, n-2}$, а тогда $\mathrm{pr}_2(y_i) = \mathrm{pr}_2(y_{(i-1)+1}) = \mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_{i-1})$. Поэтому, согласно (3.34),

$$\begin{aligned} v(x, K) &= \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{1, n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_{i-1}), \mathrm{pr}_1(\widetilde{y}_i)) + c_{\bar{a}(i)}(\widetilde{y}_i)]\}) = \\ &= \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{y}_{i+1})) + c_{\bar{a}(i+1)}(\widetilde{y}_{i+1})]\}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Заметим, что, согласно (3.30), имеем цепочку равенств

$$\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_0) = \mathrm{pr}_2(y_1) = \mathrm{pr}_2(\widehat{y}_0). \tag{3.36}$$

Если же $j \in \overline{1, n-2}$, то $\widehat{y}_j = \widetilde{y}_j$ и, следовательно, $\mathrm{pr}_2(\widehat{y}_j) = \mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_j)$. С учетом (3.36) получаем систему равенств

$$\mathrm{pr}_2(\widetilde{y}_j) = \mathrm{pr}_2(\widehat{y}_j) \ \forall j \in \overline{0, n-2}. \tag{3.37}$$

Из (3.35) и (3.37) вытекает равенство

$$v(x, K) = \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1); \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(\widehat{y}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{y}_{i+1})) + c_{\bar{a}(i+1)}(\widetilde{y}_{i+1})]\}). \tag{3.38}$$

При $j \in \overline{0, n-2}$ выполняется $j+1 \in \overline{1, n-1}$, а тогда $\widehat{y}_{j+1} = \widetilde{y}_{j+1}$. Подставляя это равенство в (3.38), получаем

$$v(x, K) = \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1);\ \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(\widehat{y}_i), \mathrm{pr}_1(\widehat{y}_{i+1})) + c_{\bar{a}(i+1)}(\widehat{y}_{i+1})]\}). \qquad (3.39)$$

Напомним, что $T \in \mathfrak{N}$ и справедливо (3.25); учитывая также (3.28) и (3.31), согласно (3.7), получаем

$$\mathfrak{C}_T^{(\bar{a})}((\widehat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-1}}) = \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(\widehat{y}_i), \mathrm{pr}_1(\widehat{y}_{i+1})) + c_{\bar{a}(i+1)}(\widehat{y}_{i+1})]. \qquad (3.40)$$

Подставив это выражение в (3.39), получаем равенство

$$v(x, K) = \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1);\ \mathfrak{C}_T^{(\bar{a})}((\widehat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-1}})\}).$$

Применив неравенство (3.32), получаем

$$\sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(y_1)) + c_{\mathrm{a}(1)}(y_1);\ v(\mathrm{pr}_2(y_1), T)\}) \leqslant v(x, K).$$

Учитывая (3.24), получаем из последнего соотношения оценку

$$\min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z);\ v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \leqslant v(x, K). \qquad (3.41)$$

Выберем $q \in \mathbb{I}(K)$ и $\mathbb{z} \in M_q \times M_q$ так, чтобы

$$\begin{aligned} &\sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z})) + c_q(\mathbb{z});\ v(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q)\}) = \\ &= \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z);\ v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}), \end{aligned} \qquad (3.42)$$

где

$$Q \triangleq K \setminus \{q\}. \qquad (3.43)$$

Отметим, что $q \in K$ (см. (3.1)). Поскольку $|K| = n$, из (3.43) следует $|Q| = n-1$. Рассмотрим позицию $(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q) \in X \times \mathfrak{N}$. По определению (3.9), ее стоимость имеет вид

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q) = \min_{\alpha \in (\mathbb{I}-\mathrm{bi})[Q]} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{z}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q, \alpha)} \mathfrak{C}_Q^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, n-1}}) \in [0, \infty[. \qquad (3.44)$$

Выберем и зафиксируем маршрут

$$\beta \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[Q] \qquad (3.45)$$

и трассу

$$(h_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{z}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q, \beta) \qquad (3.46)$$

так, чтобы выполнялось равенство

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q) = \mathfrak{C}_Q^{(\beta)}((h_i)_{i \in \overline{0, n-1}}).$$

Применяя (3.7), получаем отсюда

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), Q) = \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(h_i), \mathrm{pr}_1(h_{i+1})) + c_{\beta(i+1)}(h_{i+1})]. \qquad (3.47)$$

Из (3.42) и (3.47) получаем равенство

$$\begin{aligned} &\min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z);\ v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) = \\ &= \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z})) + c_q(\mathbb{z});\ \max_{i \in \overline{0, n-2}} [c(\mathrm{pr}_2(h_i), \mathrm{pr}_1(h_{i+1})) + c_{\beta(i+1)}(h_{i+1})]\}). \end{aligned} \qquad (3.48)$$

Согласно (3.46), кортеж $(h_i)_{i\in\overline{0,n-1}} : \overline{0,n-1} \to X \times X$ начинается с

$$h_0 = (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), \mathrm{pr}_2(\mathbb{z}))$$

и продолжается следующим образом:

$$h_j \in M_{\beta(j)} \times M_{\beta(j)} \ \forall j \in \overline{1,n-1}. \tag{3.49}$$

Заметим, что при $j \in \overline{1,n}$ непременно $j-1 \in \overline{0,n-1}$, а потому определена упорядоченная пара

$$h_{j-1} \in X \times X.$$

При $j=1$, $h_{j-1}=h_0$, $\mathrm{pr}_1(h_0)=\mathrm{pr}_2(h_0)=\mathrm{pr}_2(\mathbb{z})$, а в случае $j \in \overline{2,n}$,

$$h_{j-1} \in M_{\beta(j-1)} \times M_{\beta(j-1)}. \tag{3.50}$$

Кроме того, при $j \in \overline{2,n}$ непременно $j-1 \in \overline{1,n-1}$, а тогда определен индекс $\beta(j-1) \in Q$. Напомним, что $\beta : \overline{1,n-1} \to Q$, $\beta \in (\mathrm{bi})[Q]$. Определим $\widetilde{\beta} : \overline{1,n} \to K$ правилом

$$(\widetilde{\beta}(1) \triangleq q)\&(\widetilde{\beta}(j) \triangleq \beta(j-1) \ \forall j \in \overline{2,n}). \tag{3.51}$$

Поскольку при $j \in K$ $(j=q) \vee (j \in Q)$ (см. (3.43)), в силу (3.51) и сюръективности β имеем

$$\forall k \in K \ \exists j \in \overline{1,n} : \widetilde{\beta}(j) = k.$$

Заметим, что при $j \in Q$ непременно найдется $l \in \overline{1,n-1}$ со свойством $j=\beta(l)$, а тогда $l+1 \in \overline{2,n}$ и $\widetilde{\beta}(l+1)=\beta(l)=j$. Следовательно, $\widetilde{\beta}$ — сюръекция $\overline{1,n}$ на K. Чтобы проверить инъективность $\widetilde{\beta}$, зафиксируем индексы $t_1 \in \overline{1,n}$ и $t_2 \in \overline{1,n}$ со свойством

$$\widetilde{\beta}(t_1) = \widetilde{\beta}(t_2). \tag{3.52}$$

В связи с «устройством» $\widetilde{\beta}$ имеет смысл различать случаи $t_i = 1$ и $t_i \in \overline{2,n}$, где $i \in \overline{1,2}$. Запишем это в виде $(t_1=1) \vee (t_1 \in \overline{2,n})$ и $(t_2=1) \vee (t_2 \in \overline{2,n})$, т. е.

$$((t_1=1) \vee (t_1 \in \overline{2,n}))\&((t_2=1) \vee (t_2 \in \overline{2,n})),$$

откуда по дистрибутивности получаем четыре случая:

$$\begin{aligned}
&((t_1=1)\&(t_2=1));\\
&\vee\ ((t_1=1)\&(t_2 \in \overline{2,n}));\\
&\vee\ ((t_1 \in \overline{2,n})\&(t_2=1));\\
&\vee\ ((t_1 \in \overline{2,n})\&(t_2 \in \overline{2,n})).
\end{aligned}$$

Очевидно, в первом случае инъективность не нарушается:

$$((t_1=1)\&(t_2=1)) \Rightarrow (t_1=t_2). \tag{3.53}$$

В четвертом случае $t_1 \in \overline{2,n}$ и $t_2 \in \overline{2,n}$, следовательно, $t_1-1 \in \overline{1,n-1}$ и $t_2-1 \in \overline{1,n-1}$, а тогда (3.52) можно переписать следующим образом:

$$\beta(t_1-1) = \widetilde{\beta}(t_1) = \widetilde{\beta}(t_2) = \beta(t_2-1).$$

Таким образом, в четвертом случае инъективность тоже не нарушается: $t_1=t_2$. Второй и третий случаи тождественны с точностью до замены переменной, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Рассмотрим второй случай: $(t_1 = 1)\&(t_2 \in \overline{2,n})$. Очевидно, здесь $t_2 - 1 \in \overline{1, n-1}$, а тогда $\widetilde{\beta}(t_1) = q$ и $\widetilde{\beta}(t_2) = \beta(t_2 - 1) \in Q$, что позволяет провести следующие рассуждения:

$$\widetilde{\beta}(t_1) = \widetilde{\beta}(t_2) \Leftrightarrow \widetilde{\beta}(1) = \beta(t_2 - 1) \Leftrightarrow q = \beta(t_2 - 1).$$

Согласно (3.43) и (3.52), подобное невозможно. Таким образом,

$$\widetilde{\beta}(t_1) \neq \widetilde{\beta}(t_2),$$

что позволяет исключить второй и третий случаи из рассмотрения. Итак, $t_1 = t_2$. Отсюда следует инъективность $\widetilde{\beta}$, что в сочетании с сюръективностью означает:

$$\widetilde{\beta} \in (\mathrm{bi})[K]. \tag{3.54}$$

Покажем теперь, что на самом деле $\widetilde{\beta} \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]$. Прежде всего заметим, что из (3.54) следует, что $K = \{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{1, |K|}\}$, а потому, по выбору q справедливо включение $q \in \mathbb{I}(\{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{1, |K|})$, т. е. (см. (3.51))

$$\widetilde{\beta}(1) \in \mathbb{I}(\{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{1, |K|}\}). \tag{3.55}$$

Пусть теперь $r \in \overline{2, |K|}$, где $|K| = n \geqslant 2$. Тогда $r \in \overline{2,n}$ и, согласно (3.51), $\widetilde{\beta}(r) = \beta(r-1)$, где $r - 1 \in \overline{1, n-1}$. Вместе с тем из (3.3) и (3.45) следует, что

$$\beta(r-1) \in \mathbb{I}(\{\beta(i) : i \in \overline{r-1, n-1}\}), \tag{3.56}$$

где, как уже отмечалось, $n - 1 = |Q|$. При этом множество $B \triangleq \{\beta(i) : i \in \overline{r-1, n-1}\}$ совпадает с $\widetilde{B} \triangleq \{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{r,n}\}$. В самом деле, пусть $\mu \in B$, т. е. $\mu = \beta(i_*)$, где $i_* \in \overline{r-1, n-1}$. Рассмотрим $i^* \triangleq i_* + 1 \in \overline{r,n}$. Ясно, что $\widetilde{\beta}(i^*) \in \widetilde{B}$. Поскольку, в частности, $i^* \in \overline{2,n}$, из (3.51) следует равенство $\widetilde{\beta}(i^*) = \beta(i^* - 1) = \beta(i_*)$, что означает справедливость включения $\mu \in \widetilde{B}$, чем завершается проверка вложения $B \subset \widetilde{B}$. Выберем произвольно $\nu \in \widetilde{B}$. Тогда $\nu = \widetilde{\beta}(j_*)$, где $j_* \in \overline{r,n}$. Тогда $j_* - 1 \in \overline{r-1, n-1}$ и, следовательно, $\beta(j_* - 1) \in B$. Поскольку $r \geqslant 2$, в частности, $j_* \in \overline{2,n}$, а тогда (см. (3.51)) $\widetilde{\beta}(j_*) = \beta(j_* - 1) \in B$. Тогда $\nu \in B$, чем завершается проверка вложения $\widetilde{B} \subset B$. Стало быть, $\widetilde{B} = B$, где (см. (3.56)) $\beta(r-1) \in \mathbb{I}(B)$. Как следствие, $\beta(r-1) \in \mathbb{I}(\widetilde{B})$. Поскольку $r \in \overline{2,n}$, из (3.51) вытекает равенство $\widetilde{\beta}(r) = \beta(r-1)$; стало быть, $\widetilde{\beta}(r) \in \mathbb{I}(\widetilde{B})$, т. е.

$$\widetilde{\beta}(r) \in \mathbb{I}(\{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{r,n}\}).$$

Поскольку выбор r был произвольным, мы установили, что $\widetilde{\beta}(s) \in \mathbb{I}(\{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{s,n}\})$ $\forall s \in \overline{2,n}$. С учетом (3.55) получаем теперь систему включений

$$\widetilde{\beta}(s) \in \mathbb{I}(\{\widetilde{\beta}(i) : i \in \overline{s,n}\}) \ \forall s \in \overline{1,n}. \tag{3.57}$$

Из (3.3),(3.54) и (3.57) вытекает, с учетом равенства $|K| = n$, требуемое свойство

$$\widetilde{\beta} \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[K]. \tag{3.58}$$

Заметим, что при $j \in \overline{2,n}$ справедливо $j - 1 \in \overline{1, n-1}$ и, согласно (3.50),

$$h_{j-1} \in M_{\beta(j-1)} \times M_{\beta(j-1)},$$

откуда, с учетом (3.51), вытекает включение $h_{j-1} \in M_{\widetilde{\beta}(j)} \times M_{\widetilde{\beta}(j)}$. Кроме того, по выбору $\mathbb{z}$ имеем из (3.51) включение $\mathbb{z} \in M_{\widetilde{\beta}(1)} \times M_{\widetilde{\beta}(1)}$. Поэтому,

$$(\mathbb{z} \in M_{\widetilde{\beta}(1)} \times M_{\widetilde{\beta}(1)})\&(h_{j-1} \in M_{\widetilde{\beta}(j)} \times M_{\widetilde{\beta}(j)} \ \forall j \in \overline{2,n}). \tag{3.59}$$

Полагаем теперь с учетом этого выражения, что кортеж

$$(\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}} : \overline{0,n} \to X \times X$$

определяется условием

$$(\widetilde{h}_0 \triangleq (x,x))\&(\widetilde{h}_1 \triangleq \mathbb{z})\&(\widetilde{h}_j \triangleq h_{j-1}\ \forall j \in \overline{2,n}). \tag{3.60}$$

Из (3.59) и (3.60), в частности, следует, что $\widetilde{h}_j \in M_{\widetilde{\beta}(j)} \times M_{\widetilde{\beta}(j)}\ \forall j \in \overline{1,n}$. С учетом (3.60) и равенства $n = |K|$ мы получаем (см. (3.5),(3.6)), что

$$(\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathfrak{z}(x, K, \widetilde{\beta}). \tag{3.61}$$

Из (3.7) вытекает следующее равенство:

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}) = \max_{i\in\overline{0,n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1})) + c_{\widetilde{\beta}(i+1)}(\widetilde{h}_{i+1})]. \tag{3.62}$$

Конечно, отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}) = \\ = \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_0), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_1)) + c_{\widetilde{\beta}(1)}(\widetilde{h}_1);\ \max_{i\in\overline{1,n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1})) + c_{\widetilde{\beta}(i+1)}(\widetilde{h}_{i+1})]\}).\end{gathered} \tag{3.63}$$

С другой стороны, из (3.9),(3.58) и (3.61) вытекает, что

$$v(x, K) \leqslant \mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}). \tag{3.64}$$

Учитывая (3.51) и (3.60), мы получаем из (3.63) следующее равенство:

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}) = \\ = \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z})) + c_q(\mathbb{z});\ \max_{i\in\overline{1,n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1})) + c_{\widetilde{\beta}(i+1)}(\widetilde{h}_{i+1})]\}).\end{gathered} \tag{3.65}$$

Отметим теперь, что

$$\begin{gathered}c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_1), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_2)) + c_{\widetilde{\beta}(2)}(\widetilde{h}_2) = \\ = c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}), \mathrm{pr}_1(h_1)) + c_{\beta(1)}(h_1) = \\ = c(\mathrm{pr}_2(h_0), \mathrm{pr}_1(h_1)) + c_{\beta(1)}(h_1).\end{gathered} \tag{3.66}$$

С другой стороны, при $i \in \overline{2,n-1}$, согласно (3.60), $\widetilde{h}_i = h_{i-1}$ и $\widetilde{h}_{i+1} = h_i$; кроме того, $\widetilde{\beta}(i+1) = \beta(i)$. Как следствие,

$$\begin{gathered}c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1})) + c_{\widetilde{\beta}(i+1)}(\widetilde{h}_{i+1}) = \\ = c(\mathrm{pr}_2(h_{i-1}), \mathrm{pr}_1(h_i)) + c_{\beta(i)}(h_i)\ \forall i \in \overline{2,n-1}.\end{gathered}$$

С учетом (3.66) мы имеем теперь «полную» систему равенств

$$\begin{gathered}c(\mathrm{pr}_2(\widetilde{h}_i), \mathrm{pr}_1(\widetilde{h}_{i+1})) + c_{\widetilde{\beta}(i+1)}(\widetilde{h}_{i+1}) = \\ = c(\mathrm{pr}_2(h_{i-1}), \mathrm{pr}_1(h_i)) + c_{\beta(i)}(h_i)\ \forall i \in \overline{1,n-1}.\end{gathered}$$

Тогда из (3.65) вытекает равенство

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}) = \sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(\mathbb{z})) + c_q(\mathbb{z}); \max_{i\in\overline{1,n-1}} [c(\mathrm{pr}_2(h_{i-1}),\mathrm{pr}_1(h_i)) + c_{\beta(i)}(h_i)]\}). \tag{3.67}$$

С учетом (3.42),(3.47) и (3.67) получаем равенство

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\beta})}((\widetilde{h}_i)_{i\in\overline{0,n}}) = \min_{j\in\mathbb{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\})\}),$$

откуда с учетом (3.64) извлекается оценка

$$v(x,K) \leqslant \min_{j\in\mathbb{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\})\}).$$

С учетом (3.41) получаем равенство

$$v(x,K) = \min_{j\in\mathbb{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \sup(\{c(x,\mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\})\})$$

для $n\in\overline{2,N}$, завершая рассмотрение второго случая.

Таким образом, равенство (3.14) верно во всех возможных случаях. □

Следствие 3.1. *Справедливо равенство*

$$V = \min_{j\in\mathbb{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in M_j\times M_j} \sup(\{c(x^0,\mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N}\setminus\{j\})\}). \tag{3.68}$$

4 Слои функции Беллмана

В настоящем разделе будут введены сужения функции Беллмана на специальные множества в пространстве позиций, именуемые *слоями* этого пространства. Полученные сужения функции Беллмана также будут называть слоями.

Напомним, что для $K\in\mathfrak{N}$ число $|K|\in\overline{1,N}$ обозначает мощность множества K. Положим $\mathfrak{N}_s \triangleq \{K\in\mathfrak{N} \mid s=|K|\}$ $\forall s\in\overline{1,N}$. Данное естественное определение имеет смысл распространить на случай пустого множества (пустого списка). Условимся, что $\mathbf{N}_s \triangleq \{K\in\mathbf{N} \mid s=|K|\}$ $\forall s\in\overline{0,N}$. Кроме того, отметим, что $\mathbf{N}_0=\{\varnothing\}$ и $\mathbf{N}_N=\mathfrak{N}_N=\{\overline{1,N}\}$. Выделим из всех списков заданий *существенные* (с точки зрения условий предшествования) и ранжируем их по мощности; здесь нам потребуются только непустые списки. В этой связи полагаем, что [21, § 4.9]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_s \triangleq \{K\in\mathfrak{N}_s \mid \forall z\in\mathbb{K}\ (\mathrm{pr}_1(z)\notin K)\vee(\mathrm{pr}_2(z)\in K)\} =\\ = \{K\in\mathfrak{N}_s \mid \forall z\in\mathbb{K}\ (\mathrm{pr}_1(z)\in K)\Rightarrow(\mathrm{pr}_2(z)\in K)\}\ \forall s\in\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Список K, принадлежащий $\mathcal{C}_s$ для некоторого $s\in\overline{1,N}$, условимся называть существенным списком мощности s. Кроме того, полагаем при $s\in\overline{1,N-1}$ и $K\in\mathcal{C}_s$, что

$$\mathfrak{L}_s(K) \triangleq \{i\in\overline{1,N}\setminus K \mid \{i\}\cup K\in\mathcal{C}_{s+1}\}. \tag{4.2}$$

Определения (4.1) и (4.2) позволяют ввести специальные множества позиций — слои $D_0, D_1, \dots, D_N$. Проще всего определяются D_0 и D_N. Положим

$$D_0 \triangleq \mathbf{M}\times\mathbf{N}_0 = \mathbf{M}\times\{\varnothing\}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{M}$ есть объединение всех множеств M_i, $i\in\overline{1,N}\setminus\{\mathrm{pr}_1(z): z\in\mathbb{K}\}$. Кроме того, положим

$$D_N \triangleq \{(x^0,\overline{1,N})\}. \tag{4.4}$$

Чтобы построить множества $D_1, \dots, D_{N-1}$ — *регулярные* слои, нам потребуется ввести *клетки* пространства позиций, для определения которых введем

$$\mathbb{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{i \in \mathfrak{L}_s(K)} M_i \;\; \forall s \in \overline{1, N-1} \;\forall K \in \mathcal{C}_s. \tag{4.5}$$

В терминах множеств (4.5) определяем клетки пространства позиций:

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathbb{M}_s[K]\} \;\; \forall s \in \overline{1, N-1} \;\forall K \in \mathcal{C}_s. \tag{4.6}$$

В свою очередь, в терминах клеток (4.6) определяются регулярные слои:

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{C}_s} \mathbb{D}_s[K] \;\; \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{4.7}$$

Теперь мы располагаем слоями D_s, $s \in \overline{0, N}$. Из [21, предложение 4.9.3] следует, что каждое из этих множеств непусто и содержится в $X \times \mathbf{N}$. Отметим следующее важное свойство:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \;\; \forall s \in \overline{1, N} \;\forall (x, K) \in D_s \;\forall k \in \mathbb{I}(K) \;\forall y \in M_k\,. \tag{4.8}$$

С учетом (3.11) определяются сужения функции v (функции Беллмана) на слои пространства позиций: если $s \in \overline{0, N}$, то

$$\mathcal{V}_s : D_s \to [0, \infty[\tag{4.9}$$

определяется условием

$$\mathcal{V}_s(x, K) \triangleq v(x, K) \;\; \forall (x, K) \in D_s.$$

Тем самым определен кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{0,N}}$ функций позиции. Отметим некоторые вспомогательные обстоятельства. Так, если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbb{I}(K)$ и $z \in M_j \times M_j$, то, согласно (4.8),

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1},$$

а потому определено значение $\mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[$. Поэтому при $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$ определена величина

$$\min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) =$$
$$= \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \in [0, \infty[.$$

Но тогда из теоремы 3.1 имеем по определению функций (4.9), что

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \quad \forall s \in \overline{1, N} \;\forall (x, K) \in D_s. \tag{4.10}$$

Тем самым при $s \in \overline{1, N}$ определено правило преобразования $\mathcal{V}_{s-1}$ в $\mathcal{V}_s$. К этому следует добавить, что, согласно (3.10) и (4.3),

$$\mathcal{V}_0(x, \varnothing) = 0 \;\; \forall x \in \mathbf{M}. \tag{4.11}$$

Последнее выражение определяет функцию $\mathcal{V}_0$. Дальнейшее построение осуществляется рекуррентно.

Пусть $m \in \overline{0, N-1}$ и уже построены функции $\mathcal{V}_i, i \in \overline{0, m}$. Применим для построения $\mathcal{V}_{m+1}$ соотношение (4.10):

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbb{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \mathcal{V}_m(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \quad \forall (x, K) \in D_{m+1}. \tag{4.12}$$

Таким образом, осуществляется преобразование $\mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_{m+1}$. После конечного числа шагов, подобных (4.12), все функции $\mathcal{V}_i, i \in \overline{0,N}$ будут построены. В частности, будет определено (см. (3.13),(4.4)) значение

$$V = v(x^0, \overline{1,N}) = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}), \tag{4.13}$$

являющееся экстремумом основной задачи. В связи с (4.10),(4.13) отметим, что (см. (3.68))

$$V = \min_{j \in \mathbb{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(x_0, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}). \tag{4.14}$$

5 Построение оптимального решения

Располагая функциями-сужениями $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_{N-1}$ и значением V, построим оптимальное решение основной задачи в виде некоторой пары маршрут-трасса. Будем полагать, что $\mathbb{z}_0 \triangleq (x^0, x^0)$. Далее, используя (4.14), выберем $\mathbb{j}_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,N})$, а также

$$\mathbb{z}_1 \in M_{\mathbb{j}_1} \times M_{\mathbb{j}_1} \tag{5.1}$$

так, чтобы выполнялось равенство

$$V = \sup(\{c(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_1)) + c_{\mathbb{j}_1}(\mathbb{z}_1); \mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\})\}). \tag{5.2}$$

После этого перемещаемся в точку $\mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_1) \in M_{\mathbb{j}_1}$ для последующего выполнения «работы» на $M_{\mathbb{j}_1}$, после чего мы обязаны оказаться в точке $\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1) \in M_{\mathbb{j}_1}$. В результате складывается позиция

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) \in X \times \mathfrak{N}_{N-1}.$$

Более того, с учетом (4.8) мы получаем по выбору $\mathbb{j}_1$ и $\mathbb{z}_1$, что

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) \in D_{N-1}. \tag{5.3}$$

В самом деле, $(x^0, \overline{1,N}) \in D_N$, $\mathbb{j}_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,N})$ и $\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1) \in M_{\mathbb{j}_1}$, согласно (5.1), а потому можно применить (4.8) для получения (5.3). Учитывая (4.10) и (5.3), мы получаем равенство

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) = \\ &= \min_{j \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\})} \min_{z \in M_j \times M_j} \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \\ &\qquad\qquad \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; j\})\}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) выберем индекс

$$\mathbb{j}_2 \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) \tag{5.5}$$

и точку

$$\mathbb{z}_2 \in M_{\mathbb{j}_2} \times M_{\mathbb{j}_2}, \tag{5.6}$$

на которых реализуется равенство

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) = \\ &= \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_2)) + c_{\mathbb{j}_2}(\mathbb{z}_2); \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; \mathbb{j}_2\})\}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Заметим сразу, что, согласно (5.2) и (5.7), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &V = \sup(\{c(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_1)) + c_{\mathbb{j}_1}(\mathbb{z}_1); \\ &\sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_2)) + c_{\mathbb{j}_2}(\mathbb{z}_2); \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; \mathbb{j}_2\})\})\}) = \\ &= \sup(\{\sup(\{c(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_1)) + c_{\mathbb{j}_1}(\mathbb{z}_1); c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_2)) + c_{\mathbb{j}_2}(\mathbb{z}_2)\}); \\ &\mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; \mathbb{j}_2\})\}) = \\ &= \sup(\{\max_{k \in \overline{1,2}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; \mathcal{V}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; \mathbb{j}_2\})\}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Замечание 4.1. В целях иллюстрации допустим в пределах настоящего замечания, что $N = 2$. Тогда мы имеем кортежи

$$(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \overline{1,N}$$
$$(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X \times X.$$

При этом, согласно (5.5), $\mathbb{j}_1 \neq \mathbb{j}_2$, а тогда $(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}} = (\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,2}}$ есть перестановка в $\overline{1,N} = \overline{1,2}$. Кроме того, $\mathbb{j}_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,N})$, где $\mathbb{I}(\overline{1,N}) = \mathbb{I}(\{\mathbb{j}_s : s \in \overline{1,2}\})$, и $\mathbb{j}_2 \in \mathbb{I}(\{\mathbb{j}_2\})$, откуда в силу (3.2), (3.3) вытекает, что $(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}} \in \mathbb{A}$. С другой стороны, из (5.1) и (5.6) следует, что (см. (2.4)) $(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} = (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,2}} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{a}}$, где $\mathbb{a} = (\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}}$, а тогда $(\mathbb{a}, (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}})$ есть допустимая пара маршрут-трасса. С учетом (3.10), (4.3), (5.8), определим значение критерия для этой пары:

$$\begin{aligned} V &= \sup(\{\max_{k\in\overline{1,2}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; 0\}) = \\ &= \max_{k\in\overline{1,N}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)] = \\ &= \max_{i\in\overline{0,N-1}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_i), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_{i+1})) + c_{\mathbb{j}_{i+1}}(\mathbb{z}_{i+1})] = \mathfrak{C}_{\mathbb{a}}[(\mathbb{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}], \end{aligned}$$

что означает оптимальность решения $(\mathbb{a}, (z_s)_{s\in\overline{0,N}}) = (\mathbb{a}, (z_s)_{s\in\overline{0,2}})$. □

Возвращаясь к общему случаю N, предположим, что $n \in \overline{2,N}$ и уже определены два кортежа

$$(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,n}} : \overline{1,n} \to \overline{1,N}; \tag{5.9}$$
$$(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,n}} : \overline{0,n} \to X \times X, \tag{5.10}$$

для которых выполняются следующие условия:

1′) $\mathbb{j}_k \neq \mathbb{j}_l \ \forall k \in \overline{1,n} \ \forall l \in \overline{1,n} \setminus \{k\}$;

2′) $(\mathbb{z}_0 = (x^0, x^0))\&(\mathbb{z}_s \in M_{\mathbb{j}_s} \times M_{\mathbb{j}_s} \ \forall s \in \overline{1,n})$;

3′) $\mathbb{j}_s \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,s-1}\} \ \forall s \in \overline{1,n}$;

4′) $(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_s), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,s}\}) \in D_{N-s} \ \forall s \in \overline{1,n}$;

5′) $V = \sup(\{\max_{k\in\overline{1,n}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)];$
$\mathcal{V}_{N-n}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_s : s \in \overline{1,n}\})\})$.

Заметим, что в случае $n = 2$ все условия 1′)–5′) выполнены. В самом деле, $\overline{1,N} = \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_s : s \in \overline{1,0}\}$, а потому $\mathbb{j}_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_s : s \in \overline{1,0}\})$ по выбору $\mathbb{j}_1$. Учитывая (5.5), получаем 3′). Далее, 1′) следует из (5.5). Напомним определение $\mathbb{z}_0$ и то, что (см. (5.1), (5.6)) в нашем случае $\mathbb{z}_s \in M_{\mathbb{j}_s} \times M_{\mathbb{j}_s} \ \forall s \in \overline{1,n}$. Стало быть, 2′) справедливо (при $n = 2$). Свойство 4′) проверяется следующим образом. У нас $(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_0), \overline{1,N}) = (x^0, \overline{1,N}) \in D_N$, $\mathbb{j}_1 \in \mathbb{I}(\overline{1,N})$ и $\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1) \in M_{\mathbb{j}_1}$; с учетом (4.8)

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_1), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) \in D_{N-1}. \tag{5.11}$$

С учетом (5.11), (5.5) и (5.6) получаем также

$$\begin{aligned} (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,2}\}) &= (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1; \mathbb{j}_2\}) = \\ &= (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_2), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_1\}) \setminus \{\mathbb{j}_2\}) \in D_{N-2}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Тогда из (5.11) и (5.12) имеем 4′). Наконец, 5′) вытекает из (5.8). □

Вернемся к общему случаю $n \in \overline{2,N}$. Тогда возможно одно из двух:

$$(n = N) \vee (n \in \overline{2, N-1}). \tag{5.13}$$

Оба случая мы рассмотрим отдельно.

a) Пусть сначала $n = N$. Тогда из (5.9) и (5.10) имеем, что

$$(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \overline{1,N},\ (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X \times X; \tag{5.14}$$

для краткости обозначим $\eta \triangleq (\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}}$. С учетом 1′) $\eta \in \mathbb{P}$. Тогда, в частности, из 3′) вытекает, что

$$\eta(s) = \mathbb{j}_s \in \mathbb{I}(\{\mathbb{j}_k : k \in \overline{s,N}\})\ \forall s \in \overline{1,N} \tag{5.15}$$

(здесь мы учитываем, что, в силу биективности η,

$$\{\mathbb{j}_k : k \in \overline{s,N}\} = \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,s-1}\},$$

где $s \in \overline{1,N}$). Из (5.15), по определению η, следует, что

$$\eta(s) \in \mathbb{I}(\{\eta(k) : k \in \overline{s,N}\})\ \forall s \in \overline{1,N},$$

т. е. $\eta \in (\mathbb{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ или (см. (3.3)) $\eta \in \mathbb{A}$; иными словами, установлена допустимость маршрута $\eta = (\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,N}}$. С учетом 2′) мы в рассматриваемом сейчас случае имеем для второго кортежа из (5.14), т. е. для $(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} \in \mathbb{X}$, свойства

$$(\mathbb{z}_0 = (x^0, x^0))\&(\mathbb{z}_s \in M_{\eta(s)} \times M_{\eta(s)}\ \forall s \in \overline{1,N}).$$

С учетом (2.4) получаем включение $(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\eta$. Таким образом, $(\eta, (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}})$ есть допустимая пара маршрут-трасса:

$$\eta \in \mathbb{A} : (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\eta. \tag{5.16}$$

Напомним, что, согласно 4′), в рассматриваемом случае $n = N$ справедливо равенство (см. (4.9), (4.11))

$$\mathcal{V}_{N-n}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_s : s \in \overline{1,n}\}) = \mathcal{V}_0(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_N), \varnothing) = 0,$$

где $(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_N), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,N}\}) = (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_N), \varnothing) \in D_0$. Поэтому, согласно (2.5) и 5′),

$$\begin{aligned} V &= \sup(\{\max_{k\in\overline{1,N}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\eta(k)}(\mathbb{z}_k)]; 0\}) = \\ &= \max_{k\in\overline{1,N}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\eta(k)}(\mathbb{z}_k)] = \\ &= \mathfrak{C}_\eta[(\mathbb{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}], \end{aligned}$$

что с учетом (2.7) и (5.16) означает, что $(\eta, (\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,N}})$ есть оптимальное решение задачи (2.6). Итак, в случае **a)** мы уже располагаем в виде пары кортежей (5.9),(5.10) оптимальным решением основной задачи.

b) Пусть $n \in \overline{2, N-1}$. Тогда $n + 1 \in \overline{3,N}$. С учетом 4′) имеем, в частности, что

$$(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}) \in D_{N-n}, \tag{5.17}$$

где $N - n \in \overline{1, N-2}$. Из (4.10) и (5.17) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-n}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}) = \\ &= \min_{j\in\mathbb{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbb{j}_k : k\in\overline{1,n}\})} \ \min_{z\in M_j\times M_j} \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z); \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}) \setminus \{j\})\}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

С учетом этого выражения, выберем такие

$$\mathbb{j}_{n+1} \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}); \tag{5.19}$$

$$\mathbb{z}_{n+1} \in M_{\mathbb{j}_{n+1}} \times M_{\mathbb{j}_{n+1}}, \tag{5.20}$$

что

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-n}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}) = \\ &= \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_{n+1})) + c_{\mathbb{j}_{n+1}}(\mathbb{z}_{n+1}); \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\})\}). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Тем самым получаем (см. (5.9),(5.10),(5.19),(5.20)) «удлиненные» кортежи

$$(\mathbb{j}_s)_{s\in\overline{1,n+1}} : \overline{1,n+1} \to \overline{1,N}; \tag{5.22}$$

$$(\mathbb{z}_s)_{s\in\overline{0,n+1}} : \overline{0,n+1} \to X \times X. \tag{5.23}$$

Заметим, что, согласно (5.19), $\mathbb{j}_{n+1} \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}$, а потому (см. $1'$)) справедливо

$$1'')\ \mathbb{j}_k \neq \mathbb{j}_l\ \forall k \in \overline{1,n+1}\ \forall l \in \overline{1,n+1} \setminus \{k\}.$$

Кроме того, из $2'$) и (5.20) вытекает

$$2'')\ (\mathbb{z}_0 = (x^0, x^0))\&(\mathbb{z}_s \in M_{\mathbb{j}_s} \times M_{\mathbb{j}_s}\ \forall s \in \overline{1,n+1}).$$

Далее, из свойства $3'$) и (5.19) получаем справедливость следующего свойства:

$$3'')\ \mathbb{j}_s \in \mathbb{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,s-1}\})\ \forall s \in \overline{1,n+1}.$$

Заметим, что (см. (4.8),(5.19),(5.20)) из $\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}) \in M_{n+1}$ следует

$$\begin{aligned} &(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\}) = \\ &= (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n}\}) \setminus \{\mathbb{j}_{n+1}\}) \in D_{N-(n+1)}. \end{aligned}$$

С учетом $4'$) получаем справедливость свойства

$$4'')\ (\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_s), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,s}\}) \in D_{N-s}\ \forall s \in \overline{1,n+1}.$$

Наконец, из $5'$) и (5.21) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} V = &\sup(\{\max_{k\in\overline{1,n}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; \sup(\{c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_{n+1})) + c_{\mathbb{j}_{n+1}}(\mathbb{z}_{n+1}); \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\})\})\}) = \\ &= \sup(\{\sup(\{\max_{k\in\overline{1,n}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_n), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_{n+1})) + c_{\mathbb{j}_{n+1}}(\mathbb{z}_{n+1})\}); \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\})\}) = \\ &= \sup(\{\max_{k\in\overline{1,n+1}} [c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\})\}). \end{aligned}$$

Эта цепочка означает, в частности, что

$$\begin{aligned} 5'')\ V = \sup(\{\max_{k\in\overline{1,n+1}} &[c(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{k-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbb{z}_k)) + c_{\mathbb{j}_k}(\mathbb{z}_k)]; \\ &\mathcal{V}_{N-(n+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbb{z}_{n+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbb{j}_k : k \in \overline{1,n+1}\})\}). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае **b)** каждый из кортежей (5.14) удалось продолжить «на один шаг» (см. (5.22),(5.23)) с сохранением всех основных свойств: система $1'$)–$5'$) преобразовалась в $1''$)–$5''$). После выполнения конечного числа (регулярных) шагов типа **b)** будет реализована ситуация случая **a)**, т. е. оптимальное решение основной задачи.

6 Вычислительный эксперимент

С целью проведения вычислительного эксперимента была написана программа на языке программирования C++ с использованием нововведений стандарта C++11, работающая в среде 64-разрядной ОС Windows 7 Professional; для компиляции использовался компилятор Microsoft Visual C++ 2010. «Верхний» уровень задачи был реализован отдельно от «нижнего», т. е. экстремумы всевозможных внутренних работ предполагались известными на момент начала работы программы. Подобный подход имеет свои преимущества, позволяя решать задачи с различными вариантами внутренних работ, не модифицируя решение задачи верхнего уровня. Эксперимент проводился на ПЭВМ со следующими характеристиками:

- 2-ядерный процессор Intel® Core™ 2 Duo E8400 (3 ГГц);
- 2×2 ГБ ОЗУ PC2-6400 (400 МГц) в двухканальном режиме.

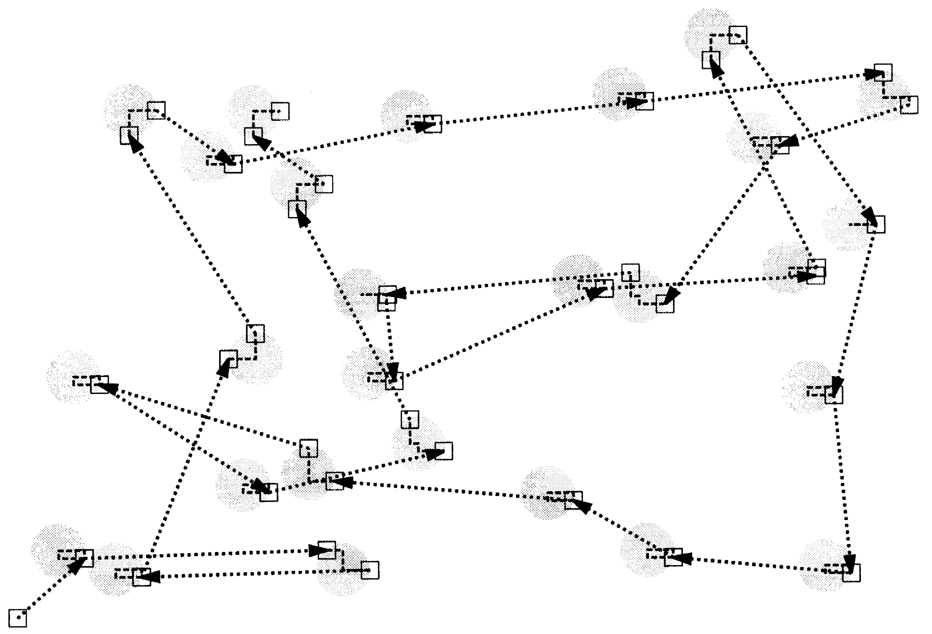
Исследовалась задача на плоскости $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с $N = 27$ мегаполисами и $|\mathbb{K}| = 25$ условиями предшествования при одинаковом числе городов в каждом мегаполисе, равном 10, 20, 25. Ниже перечислены условия предшествования в виде адресных пар: (1,10); (12,2); (2,13); (13,15); (6,16); (15,16); (18,27); (9,27); (10,9); (11,19); (20,19); (25,26); (23,22); (21,20); (24,22); (14,16); (7,10); (8,2); (1,9); (14,26); (2,27); (3,6); (3,19); (18,17); (14,25). За стоимость внешних перемещений принималось евклидово расстояние в X, за стоимость внутренних принималась манхеттанская норма $||\cdot||$ перемещения от "точки входа" в мегаполис до "точки выхода" из мегаполиса через его центр (если $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ — два плоских вектора, то $||x - y|| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$). Мегаполисы представляют собой круги одинакового радиуса, города расположены по окружности мегаполиса и разделены равными дугами соответствующей угловой величины (зависящей от числа городов в мегаполисе). Отметим, что использование условий предшествования заметно сокращает работу. Так, в отсутствие условий предшествования, требовалось бы проанализировать $2^N = 2^{27}$ существенных списков, тогда как с учетом вышеуказанных условий предшествования число существенных списков не превосходит 450 тыс. — менее чем 2^{19}. Имеющийся объем оперативной памяти не позволяет решить задачу без условий предшествования — только на то, чтобы просто описать (т. е. на хранение в памяти всех существенных списков, их существенных продолжений и возможных "точек входа" — баз, с которых можно обойти существенный список, не нарушив условий предшествования) все существенные списки, без учета значений функции Беллмана, в этом случае потребовалось бы 2ГБ оперативной памяти (на хранение этой информации расходуется по 16 байт на каждый существенный список). Массив же значений функции Беллмана для одного из самых населенных слоев, 13-го, займет, как минимум, около $1,32$ ГБ: всего существенных списков на этом уровне C_{27}^{13}, в каждый можно зайти из $27 - 13 = 14$ мегаполисов, в каждом из которых 10 городов (наименьшая размерность, рассмотренная нами); само значение функции занимает 2 байта, к тому еще 2 байта на хранение номера базы, с которой начинается обход, что приводит к расходу более чем $1,41$ млрд байтов, т. е. около $1,32$ ГБ. Примерно столько же места нужно на хранение значений функции Беллмана для 14-го слоя, что уже приводит к расходу более чем 4 ГБ. Ниже указано время счета в каждом из трех случаев, для которых проводились расчеты:

27 мегаполисов по 10 городов – 542 с;

27 мегаполисов по 20 городов – 4154 с;

27 мегаполисов по 25 городов – 8081 с.

Ниже изображена оптимальная трасса для 27 мегаполисов по 20 городов с 25 условиями предшествования. Кругами здесь обозначены мегаполисы, маленькими квадратами — города, попавшие в



оптимальную трассу (включая базу), пунктиром показаны перемещения внутри мегаполисов, перемещения между мегаполисами изображены линиями, состоящими из точек; база расположена в нижнем левом углу. Координаты центров мегаполисов генерировались случайным образом так, чтобы мегаполисы не перекрывались, с целью упрощения визуализации результатов работы алгоритма.

В ближайшее время планируется осуществить параллельную реализацию алгоритма на основе библиотеки OpenMP и провести расчеты на МВС; предполагается распределить между несколькими исполнителями работы по расчету стоимости подзадач одного слоя, что не представляет особой сложности по причине того, что такие расчеты для разных подзадач одного уровня являются независимыми. Соответственно, проблем, связанных с конкуренцией между исполнителями, удастся избежать.

Список литературы

1. *Ченцов А.Г., Салий Я.В.* Об одной задаче на узкие места // Сборник трудов Всероссийской конференции (Челябинск, 28 ноября – 3 декабря 2011 г.). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011.
2. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3-34.
3. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3-29.
4. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3-26.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
6. *Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.* Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и мат. методы. 1965. Т. 1. С. 94-107.
7. *Беллман Р.* Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219-228.
8. *Хелд М., Карп Р.М.* Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202-218.
9. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.

10. *Сергеев С.И.* Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С. 144-150.
11. *Коротаева Л.Н., Ченцов А.Г.* Об одном обощении задачи коммивояжера "на узкие места" // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 7. С. 1067-1076.
12. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Экстремальная задача маршрутизации "на узкие места" с ограничениями в виду условий предшествования // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 129-142.
13. *Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Об одной задаче маршрутизации "на узкие места" // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 152-170.
14. *Ченцов А.А.* Метод итераций в задаче последовательного обхода множеств (обобщенная версия задачи коммивояжера на узкие места) // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 209-230.
15. *Маркелова Е.Ю., Рольщиков В.Е., Ченцов А.Г.* Задача маршрутизации конечного числа переходов системы с абстрактной функцией агрегирования затрат / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1998. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 25.05.98, № 1577-В98.
16. *Сесекин А.Н, Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Маршрутизация с абстрактной функцией агрегирования стоимости перемщений // Труды ИММ УрО РАН, 2010. Т. 16. № 3. С. 240-264.
17. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Экстремальная задача маршрутизации "на узкие места" с ограничениями в виде условий предшествования // Труды ИММ УрО РАН, 2008. Т. 14. № 3. С. 183-201.
18. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Труды ИММ УрО РАН, 2009. Т. 15. № 4. С. 270-289.
19. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Известия вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64-81.
20. *Ченцов А.Г.* Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 52-66. (Оптимальное управление).
21. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
22. *Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Щеклеин С.Е., Куклин М.Ю., Ченцов А.Г., Кадников А.А.* Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации дозовой нагрузки // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41-48.
23. *Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г.* Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115-120.
24. *Куратовский К., Мостовский М.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
25. *Кормен Т., Лейзерсон К., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. 960 с.

Поступила в редакцию 6 июня 2012 г.

Salii Ya.V., Chentsov A.G. On a bottleneck routing problem with internal tasks.

An economical variant of the dynamic programming method for an extremal bottleneck routing problem with internal tasks constrained by precedence conditions is considered. The algorithm for constructing the optimal solution based on this method is implemented for a personal computer.

Key words: routing; precedence conditions; internal tasks; dynamic programming; layers of the Bellman function.