с двумя операторами Лапласа–Бельтрами:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta + \overline{\Delta}), \quad \Delta_2 = \frac{1}{2i}(\Delta - \overline{\Delta}), \quad \Delta = N^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Матрицам B_3 и B_4 отвечают две инвариантные внешние формы

$$Q_3 = N^{-2} d\xi \wedge d\eta + \overline{N}^{-2} d\overline{\xi} \wedge d\overline{\eta}, \quad Q_4 = -i\left(N^{-2} d\xi \wedge d\eta - \overline{N}^{-2} d\overline{\xi} \wedge d\overline{\eta}\right)$$

с двумя скобками Пуассона:

$$\{f,g\}_1 = \frac{1}{2}\left\{N^2\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial g}{\partial\xi}\right) + \overline{N}^2\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{\xi}}\frac{\partial g}{\partial\overline{\eta}} - \frac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\frac{\partial g}{\partial\overline{\xi}}\right)\right\}$$

$$\{f,g\}_2 = \frac{1}{2i}\left\{N^2\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial g}{\partial\xi}\right) - \overline{N}^2\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{\xi}}\frac{\partial g}{\partial\overline{\eta}} - \frac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\frac{\partial g}{\partial\overline{\xi}}\right)\right\}.$$

O. V. Betina. A complex hyperboloid: invariant differential geometric structure. For a complex hyperboloid: metrics, exterior forms, Laplace–Beltrami operators, Poisson brackets invariant with respect to the group $SL(2,\mathbb{C})$ are determined.
Keywords: homogeneous spaces, metrics, Laplace–Beltrami operators, Poisson brackets.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Граничные K-инвариантные обобщенные функции для комплексного гиперболического пространства [1]

© Л. И. Грошева

Ключевые слова: канонические представления, граничные представления, комплексные гиперболические пространства, обобщенные функции.

Для канонических представлений на комплексных гиперболических пространствах дано описание обобщенных функций, сосредоточенных на границе и инвариантных относительно максимальной компактной подгруппы.

В настоящей работе мы обобщаем на комплексные гиперболические пространства G/K, где $G = \mathrm{SU}(n-1,1)$, $K = \mathrm{U}(n-1)$, результаты нашей работы [1], в которой рассматривался случай $n = 2$ (плоскость Лобачевского). Мы существенно опираемся на работу [3]. Аналогичные результаты для вещественных гиперболических пространств (пространств Лобачевского) получены в [2].

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

Группа G состоит из матриц $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, сохраняющих форму

$$[x, y] = -x_1\overline{y}_1 - \ldots - x_{n-1}\overline{y}_{n-1} + x_n\overline{y}_n.$$

Разобьем матрицы g из G на блоки соответственно разбиению $n = (n-1) + 1$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Группа G действует дробно-линейно на $\mathbb{C}^{n-1}$ (правое действие):

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{z\alpha + \gamma}{z\beta + \delta}.$$

Стационарная подгруппа K точки $z = 0$ состоит из блочно диагональных матриц. Пусть $\langle z, w \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n-1}$: $\langle z, w \rangle = z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_{n-1}\overline{w}_{n-1}$. Обозначим

$$p = 1 - \langle z, z \rangle.$$

Однородное пространство G/K есть единичный шар $D : p > 0$. Его граница $S : p = 0$ (сфера размерности $2n-3$) – тоже G-орбита. Обозначим $\overline{D} = D \cup S$.

Канонические представления R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G действуют в $\mathcal{D}\left(\overline{D}\right)$ по формуле

$$\left(R_\lambda(g)f\right)(z) = f(z \cdot g)|z\beta + \delta|^{-2\lambda - 2n}.$$

Они распространяются на пространство $\mathcal{D}'\left(\overline{D}\right)$ обобщенных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с носителем в $\overline{D}$, в частности, на пространство $\Sigma\left(\overline{D}\right)$ обобщенных функций, сосредоточенных на S. Элементу Казимира, отвечающему алгебре Ли группы G, представление R_λ сопоставляет дифференциальный оператор Δ_λ. Его радиальная часть, действующая на K-инвариантных функциях (на функциях, зависящих только от p), есть оператор

$$(1-p)p^2\frac{d^2}{dp^2} + \left[2\lambda + n + 2 - (2\lambda + 2n + 1)p\right]p\frac{d}{dp} + \\ +(\lambda + n)\left[\lambda + 1 - (\lambda + n)p\right].$$

В подпространстве $\Sigma(\overline{D})^K$ в $\Sigma(\overline{D})$, состоящем из K-инвариантных обобщенных функций, мы имеем два естественных базиса: первый состоит из производных дельта-функции $\delta(p)$:

$$\delta^{(k)}(p), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

второй состоит из обобщенных функций

$$\zeta_{\lambda,k} = \xi_{\lambda,k}(\psi_0), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

операторы $\xi_{\lambda,k}$ определены в [3], ψ_0 – тождественная единица на S. Элементы второго базиса с точностью до множителя характеризуются тем, что они являются собственными функциями оператора Δ_λ:

$$\Delta_\lambda\zeta_{\lambda,k} = (\lambda - k)(\lambda + n - 1 - k)\zeta_{\lambda,k}.$$

Мы будем использовать обозначения

$$a^{[m]} = a(a+1)\dots(a+m-1), \quad a^{(m)} = a(a-1)\dots(a-m+1).$$

Теорема 1 *Элементы базисов* (1) *и* (2) *выражаются друг через друга с помощью треугольных матриц с единицами по главной диагонали, а именно,*

$$\zeta_{\lambda,m} = \sum_{s=0}^{m}(-1)^s \binom{m}{s} \frac{\left\{(\lambda+n-1-m)^{[s]}\right\}^2}{(2\lambda+n-2m)^{[s]}}\, \delta^{(m-s)}(p), \tag{3}$$

$$\delta^{(k)}(p) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m} \binom{k}{m} \frac{\left\{(2-n-\lambda+m)^{[k-m]}\right\}^2}{(2-n-\lambda+2m)^{[k-m]}}\, \zeta_{\lambda,m}. \tag{4}$$

Заметим, что формулу (3) можно записать следующим образом:

$$\zeta_{\lambda,m} = F\left(\lambda+n-1-m,\, \lambda+n-1-m;\, 2\lambda+n-2m;\, p\right)\, \delta^{(m)}(p),$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Из (4) получаем производящую функцию для $\delta^{(k)}(p)$:

$$\exp\left(u\frac{d}{dp}\right)\delta(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \times$$
$$\times \quad F\left(2-n-\lambda+m,\, 2-n-\lambda+m;\, 2-n-2\lambda+2m;\, -u\right)\cdot \zeta_{\lambda,m}.$$

Определим на $\mathcal{D}(\overline{D})$ билинейную форму (форму Березина)

$$B_\lambda(f,h) = c(\lambda)\int_{D\times D} |1-\langle z,w\rangle|^{2\lambda} f(z)\,\overline{h(w)}\,dz\,dw, \tag{5}$$

где dz – евклидова мера в $\mathbb{C}^{n-1}$,

$$c(\lambda) = \pi^{1-n}\,\frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(1-n-\lambda)}.$$

Эта билинейная форма инвариантна относительно R_λ. Обозначим

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= B_\lambda\left(\delta(p),\delta(p)\right) \\ &= (-1)^{n-1}\pi^{n-1}\frac{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma^2(\lambda+n-1)}. \end{aligned}$$

Теорема 2 *Базис* (2) *ортогонален относительно формы Березина. Скалярный квадрат равен*

$$B_\lambda\left(\zeta_{\lambda,m},\zeta_{\lambda,m}\right) = \beta(\lambda,k),$$

где

$$\beta(\lambda,m) = b(\lambda)\cdot\frac{m!\left\{\lambda^{(m)}(\lambda+n-2)^{(m)}\right\}^2}{(2\lambda+n-2)^{(2m)}(2\lambda+n-1-m)^{(m)}}.$$

Теорема 3 *Попарные скалярные произведения элементов базиса* (1) *даются следующей формулой:*

$$B_\lambda\big(\delta^{(k)}(p), \delta^{(m)}(p)\big) = b(\lambda) \cdot c_{km}(\lambda),$$

где

$$c_{km}(\lambda) = (-1)^{k+m} \frac{\left\{(2-n-\lambda)^{[k]}(2-n-\lambda)^{[m]}\right\}^2}{(2-n-2\lambda)^{[k+m]}}. \qquad (6)$$

Доказательство. Оператор Δ_λ действует на обобщенные функции $\delta^{(k)}(p)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda \delta^{(k)}(p) &= (\lambda - k)(\lambda + n - 1 - k)\delta^{(k)}(p) \\ &+ k(\lambda + n - 1 - k)^2 \delta^{(k-1)}(p). \end{aligned}$$

Поскольку оператор Δ_λ симметричен относительно формы (5), мы получаем для чисел $c_{km} = c_{km}(\lambda)$ соотношение:

$$\begin{aligned} &(m-k)(2\lambda - k - m + n - 1)\, c_{km} + \\ +\ &k(\lambda + n - 1 - k)^2\, c_{k-1,m} - m(\lambda + n - 1 - m)^2\, c_{k,m-1} = 0. \end{aligned}$$

Формула (6) есть решение этого конечно-разностного уравнения. $\square$

Литература

1. L. I. Grosheva. Boundary representations on the Lobachevsky plane. Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2005, том 10, вып. 4, 357–365.

2. Л. И. Грошева. Обобщённые функции, сосредоточенные на абсолюте пространства Лобачевского, инвариантные относительно вращений. Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2007, том 12, вып. 1, 23–30.

3. Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления на комплексных гиперболических пространствах. Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2008, том 13, вып. 6, 499–555.

L. I. Grosheva. Boundary K-invariant distributions for a complex hyperbolic space. For canonical representations on complex hyperbolic spaces, a description of distributions concentrated at the boundary and invariant with respect to a maximal compact subgroup is given.

Keywords: canonical representations, boundary representations, complex hyperbolic spaces, distributions.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.