УДК 517.11

МЕТОД ФОРСИНГА И ДИАГОНАЛЬНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

© С.А. Векшенов

Vekshenov S.A. The forcing method and the diagonal construction. The forcing method was proposed by P. Cohen in 1963 in order to construct special ZFG models and since then has been repeatedly updated. In spite of its obvious similarity to the classical diagonal construction, all its interpretations known so far have lacked the “diagonal” logic, which, in fact, predetermined all the constructing parts. The article describes the forcing method as a version of the diagonal construction.

1.

Диагональная конструкция – фатальное изобретение теоретико-множественной математики. Резко расширяя поле доступных ей объектов, она одновременно бросает тень на саму суть идеи: возможности непротиворечивым образом собрать любую совокупность объектов в одно целое. Тем не менее, математика упорно держится за этот метод, подвергая его все новым и новым трансформациям.

Одной из таких трансформаций является метод форсинга.

Первоначальная конструкция была изобретена П.Д. Коэном в 1963 году в связи с доказательством независимости континуум-гипотезы от остальных аксиом ZF. На протяжении тридцати с лишним лет она модифицировалась различными авторами с целью ее большего прояснения и приложения к возможно более широкому кругу задач.

В настоящее время общепринятым считается изложение метода форсинга на языке генерических расширений или булевозначных модулей.

Несмотря на широкий спектр работ по форсингу, фактически ни в одной из них он не трактовался как одна их форм «диагонального метода». Между тем такой взгляд позволяет, по-видимому, наиболее естественным путем понять внутреннюю логику всего построения.

В данной статье приводится «диагональная разработка» этого метода в сопоставлении с простейшей диагональной конструкцией. Это дает, с одной стороны, еще одну нетривиальную «разработку» диагональной темы, с другой – послужит прояснению сути диагонального метода вне теоретико-множественных рамок.

2.

2.1. Рассмотрим простейшую диагональную конструкцию.

Т е о р е м а 1. Существует неперечислимое множество.

Рассмотрим универсальное множество $U = \{ \langle n, W_n \rangle \}$, где n – номер перечислимого множества W_n. Тогда множество $H = \{ n \mid n \notin W_n \}$ для всех $W_n \in U$ неперечислимо.

В этой теореме диагональный метод использовался как метод доказательств. Попытаемся использовать как метод построения специальных моделей формальной теории ZF.

2.2. Рассмотрим какую-либо счетную модель $\mathfrak{M}$ аксиоматической теории ZFC. Нашей задачей является построение множества $G \notin \mathfrak{M}$, причем способ построения должен быть выражен в ZFC. Следовательно, несмотря на счетность $\mathfrak{M}$, конструкции, приведенные в п. I, не могут быть использованы непосредственно. Воспользуемся, тем не менее, их основными моментами в более общей форме.

В качестве нумерующего множества для $\mathfrak{M}$ возьмем частично упорядоченное множество $(P, \in)$: $P \in \mathfrak{M}$. Будем считать множество $p \in P$ «номером» множества $A \in \mathfrak{M}$, если $p \in A$. Тогда, очевидно, что «непринадлежность» этого номера множеству A, как того требует диагональная конструкция, должна быть выражена иначе. Например, так:

$$\forall\, q \in P : p \subset q,\ q \notin A.$$

В этом случае условие «диагональности» множества G : p = {множество номеров $A \notin A$} может быть записано так:

$$\exists\, G\ \forall\ A(A \in \mathfrak{M} \rightarrow \exists\, p \in G\ (p \in A\ \&\ \forall\, q \in P(p \subset q) \rightarrow \rightarrow q \notin A)). \qquad (1)$$

Для того чтобы множество G обладало необходимыми алгебраическими свойствами, следует наложить следующие условия на номера, принадлежащие G:

$$\emptyset \in G : \qquad (2)$$

$$p \in G\ \&\ q \in G \Rightarrow p \bigcup q \in G. \qquad (3)$$

Множество, удовлетворяющее условиям (1), (2), (3), будем называть **генерическим.**

Этому определению можно придать более аналитическую форму, введя понятие плотного множества.

О п р е д е л е н и е. Множество $A \subseteq P$ плотно в частично упорядоченном множестве P, если для каждого $p \in P$, $\exists\ \alpha \in A$ такое, что $\alpha\ \le\ p$.

Определив частичный порядок на нумерующем множестве $P \in \mathcal{M}$ как $p \le q \Leftrightarrow p \supseteq q$, можно следующим образом переформулировать определение генерического множества:

О п р е д е л е н и е. Множество $G \subseteq P$ называется генерическим, если:

1) $p\ \ge\ q$ и $q \in\ G \Longrightarrow p \in G$;

2) $\forall\ p, q{:}p \in G, q \in G$, $\exists\ r \le p$ и $r \le q$;

3) Если D плотно в P и $D \in \mathcal{M} \Longrightarrow D \bigcap G\ \neq\ \emptyset$.

Легко доказать (см., например, [2]), что при условии счетности $\mathcal{M}$ генерическое множество G существует.

Возвращаясь к первому определению генерического множества, нетрудно заметить, что отождествляя элементы p и q такие, что $p \subseteq q$, $q \in P$, мы добьемся полной аналогии с классической диагональной конструкцией: «$n\ \notin\ W_n$».

Поэтому для каждого $p \in P$ введем класс $[p]\ =\ \{q \in P\ \mid\ q \le\ p\}$, который и будет играть роль «номера» данного множества из $\mathcal{M}$ **.**

Далее, можно принять эти классы за базисные открытые множества. Тогда множество всех регулярных открытых множеств в этой топологии является полной булевой алгеброй, порожденной частично-упорядоченным множеством P. Эту булеву алгебру будем обозначать как $B(P)$. Легко видеть, что $B(P)$ играет ту же роль в нумерации множеств из $\mathcal{M}$, что и множество N в теореме 1.

Основной смысл конструкции генерического множества G исчерпывается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. Пусть P – частично упорядоченное множество и $B\ =\ B(P)$ с гомоморфизмом $f : p \longrightarrow [p]$. Тогда:

1) Если G_1 – генерическое множество P, то множество $G\ =\ \{\ b \in B \mid \exists\ p \in G_1\ \&\ f(p) \le b\ \}$ есть ультрафильтр в B, удовлетворяющий условию:

$A \subseteq G$ и $A \in \mathcal{M}\ \Rightarrow\ \bigcap A \in G$ (генерический ультрафильтр);

2) Если G – генерический ультрафильтр, то $f^{-1}(G)$ есть генерическое подмножество в P.

Доказательство заключается в проверке свойств генеричности.

В дальнейшем нас будут интересовать именно генерические ультрафильтры, поскольку именно они являются аналогом дополнения проекции диагонального множества D при классической нумерации натуральными числами. Более точно: вся приведенная выше конструкция была направлена на то, чтобы сделать это дополнение ультрафильтром.

2.3. Проясним более подробно мотивы введения булевой алгебры B в качестве нумерующего множества.

Традиционная схема диагонального метода может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longrightarrow & \xi^N \\ & \swarrow & \\ \xi \cup \overline{D}, & & \end{array}$$

где ξ^N – «универсальное» для семейства ξ множество, $\overline{D}$ – дополнение проекции диагонального множества.

Соответственно, в случае замены N на B эта схема будет выглядеть так:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}^B \\ & \swarrow & \\ \mathcal{M} \bigcup G. & & \end{array}$$

При этом, однако, множество $\mathcal{M} \bigcup G$ вовсе не обязано быть моделью ZFC. Идея П. Коэна преодоления этой трудности состоит в следующем.

Поскольку $\mathcal{M}$ является моделью ZFC, то естественным является «нумерация» не множеств из $\mathcal{M}$, а формул языка ZFC элементами булевой алгебры B. При этом желательно сопоставить каждой теореме ZFC единичный элемент $1 \in B$. Определяя булево значение $\| \varphi \|$ формулы φ как ее «номер», можно сформулировать следующий аналог теоремы об универсальном множестве из теоремы 1.

Если φ – теорема ZFC, то $\| \varphi \|\ =\ 1$ также есть теорема ZFC, т. е.

$$\mathcal{M}\ \models\ \varphi\ \ \Longrightarrow\ \mathcal{M}^B \models \| \varphi \| = 1. \tag{4}$$

Далее, используя тот факт, что G является ультрафильтром, можно корректно заменить утверждение $\| \varphi \| = 1$ на $\| \varphi \| \in G$.

После этого можно определить модель $\mathcal{M}\ [\ G\ ]$ как интерпретацию всех формул φ, таких, что $\| \varphi \| \in G$, аналогично тому как $\mathcal{M}$ можно рассматривать как интерпретацию всех формул $\varphi : \| \varphi \|\ =\ 1$. При этом можно ожидать, что «релятивизованная истина» G принадлежит $\mathcal{M}\ [\ G\ ]$.

По аналогии с приведенными выше схемами идею коэновского «метода форсинга» можно изобразить в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\ \models \varphi & \longrightarrow & \mathcal{M}^B \| \varphi \| = 1 \\ & & \mathcal{M}^B \| \varphi^B \| \in G \\ & \swarrow & \\ \mathcal{M}\,[G]\ \models \varphi\ . & & \end{array}$$

Перейдем к точным формулировкам.

Реализация намеченной идеи Коэна технически более сложна, чем в случае классического диагонального метода. Это связано с тем, что «стандартная модель» $\mathcal{M}$ теории ZFC строится по трансфинитной индукции и, следовательно, все необходимые определения и конструкции повторяют ее схему.

Определим $\mathcal{M}^B$ следующим образом:

$m_0^B\ =\ \emptyset$;

$m_\alpha^B = \bigcup\limits_{\beta \langle \alpha} m_\beta^B$, если α – предельный ординал;

$\mathcal{M}^{B}_{\alpha+1} = \{ f,\ f$ – функция, $\operatorname{dom} f \subseteq \mathcal{M}^{B}_{\alpha}$, $\operatorname{rng} f \in B \}$,
если α – непредельный ординал;

$$\mathcal{M}^{B} = \bigcup_{\alpha \in On} \mathcal{M}^{B}_{\alpha}.$$

Определим, далее, вложения «$\vee$»: $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{B}$:

$\check{\emptyset} = \emptyset$;

$\check{f} \in \mathcal{M}^{B}$, если $\operatorname{dom} \check{f} = \{g;\ g \in \check{f}\}$ и $\| \check{f}(g) \| = 1$.

Следующий шаг состоит в присваивании «номера» $\| \varphi \| \in$ B формуле φ так, чтобы при этом выполнялось утверждение (4).

Руководящей идеей здесь может быть следующее соображение: элементы $\mathcal{M}^{B}$ строятся, в общем случае, с применением «внутреннего» диагонального метода, который не дает точного указания на местоположение данного элемента по отношению к данному множеству. Поэтому, нормированным значениям $\| \varphi \| \in B$ можно приписать смысл «вероятности».

Конкретно:
$\|X \in У\| \in B$ есть вероятность того, что множество X принадлежит множеству $У$.
$\|X = У\| \in B$ – «вероятность» того, что множество X равно множеству $У$.

Формально, это определение выглядит следующим образом:

$$\|X \in У\| = \sum_{z \in dom(y)} (Y(Z) \cdot \|Z = X\|);$$

$$\|X = У\| = \prod_{z \in dom(y)} X(Z) \Rightarrow \|X \in У\| \prod_{z \in dom(y)} Y(Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|Z \in У\|.$$

Значение остальных формул определяется традиционно.

З а м е ч а н и е. То, что булева алгебра B не нормирована для наводящих соображений, не важно, поскольку при необходимости это всегда можно сделать.

При данных определениях справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3 (Д. Скотт – Р. Соловей).
Если φ – теорема ZFC, то $\| \varphi \| = 1$ также есть теорема ZFC. (Доказательство см., например, в [2]).

Снова с помощью рекурсии определим отображение i: $\mathcal{M}^{B} \longrightarrow \mathcal{M}^{B}$ при замене $\| \varphi \| = 1$ на $\| \varphi \| \in G$.

1) $i(\emptyset) = \emptyset$;
2) $i(x) = \{ i(y) : x(y) \in G\}$.

Определим $\mathcal{M}[G] = \operatorname{rng} i$.

Справедлива следующая очевидная лемма.

Л е м м а. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[G]$, $G \in \mathcal{M}[G]$.

Теперь убедимся, что $\mathcal{M}[G]$ есть модель ZFC.

Поскольку множество $\mathcal{M}[G]$ можно рассматривать как интерпретацию $\mathcal{M}_B$, то логично называть элементы $X \in \mathcal{M}[G]$ «значениями», а элементы $\underline{X} \in \mathcal{M}^{B}$, такие, что $i(\underline{X}) = X$ – «именами». Можно доказать следующую лемму.

Л е м м а. Если $\underline{X}$ и $\underline{Y}$ – имена X и Y, то
$X \in Y \Leftrightarrow \|\underline{X} \in \underline{Y}\| \in G$,
$X = Y \Leftrightarrow \|\underline{X} = \underline{Y}\| \in G$.

Доказательство следует из определения $\mathcal{M}[G]$ и свойств генеричности G.

Из предыдущей леммы следует основная теорема:

Т е о р е м а. $\mathcal{M}[G] \models \varphi \Leftrightarrow \| \varphi \| \in G$.

Доказательство проводим индукцией по построению φ.

Из теоремы следует, что $\mathcal{M}[G]$ является моделью ZFC.

2.4. Последний штрих в приведенной выше конструкции состоит в выборе элементов $p \in G$. Ясно, что их надо выбрать таким образом, чтобы они оставались «внешними» по отношению к $\mathcal{M}$ элементами, так же как, например, натуральное число n является «внешним» номером перечислимого множества W_n из теоремы 1. В этом случае есть надежда, что p не будет включать в себя специальной информации о модели $\mathcal{M}$ теории ZFC. Для этого достаточно выбрать p конечным, поскольку отношение «p–конечно» является абсолютным.

Попытаемся теперь изменить угол зрения и посмотреть на всю приведенную выше конструкцию со стороны.

Поскольку формула φ истина в $\mathcal{M}[G] \mid = \varphi \Leftrightarrow \| \varphi \| \in G$, можно считать, что $\mathcal{M}[G]$ состоит из «случайных» множеств, а отношения принадлежности и равенства понимаются в традиционном смысле «почти всюду». Более привычной эта конструкция получается, если отталкиваться от множества действительных чисел R. Тогда, с помощью фрагмента ZFC, достаточного для построения анализа, можно прийти к множеству $\overline{R}$ случайных действительных чисел, которые будут аналогом $\mathcal{M}[G]$.

Далее, случайное число X можно трактовать вполне физическим способом – как результат бросания «иголки» на действительную прямую. Чтобы превратить таким образом R в $\overline{R}$, необходимо аксиоматически описать процесс «бросания». Это сделано, например, в [3] с помощью следующей аксиомы симметрии.

Пусть f – функция: $f\colon R \longrightarrow R_{\aleph_0}$, где $R_{\aleph_0}$ – множество всех счетных подмножеств R. Тогда аксиома симметрии записывается следующим образом:
$A_{\aleph_0}: \forall f\colon R \longrightarrow R_{\aleph_0}\ (\exists X_1 X_2)\ X_2 \notin f(X_1)\ \&\ X_1 \notin f(X_2)$.

Возвращаясь к теореме 1, можно заметить, что множество $\overline{R}$ «случайных действительных чисел» может быть получено непосредственно из модификации классической диагональной конструкции.

Например, классическое доказательство несчетности R состоит из следующих шагов.

1. Предположения противного и построения счетной нумерации R.

2. Выделение для каждого числа $\alpha_n \in R$ n-ой цифры α_n его десятичного разложения.

3. Совершение замены $\alpha_n := \alpha_n + 1$.

4. Образование числа $D = \{\alpha_n\}$, $\forall\, n\ D \neq \alpha_n$.

Модифицируем эту схему следующим образом. На третьем шаге заменим α_n «пробелом» « $»_n$ (индекс указывает место пробела):

$\alpha_n :=$ « $»_n$

Это значит, что вместо α_n может быть поставлена любая цифра. В этом случае $\overline{D} =\{$« $»_n\}$ можно считать случайным числом, для которого справедливо соотношение:

$\forall\, n\ \ \alpha_n \neq \overline{D}$ (mod0), поскольку по предположению – $\{\alpha_n\}$ счетно.

Уравновешивая всю конструкцию в целом, можно считать, что два числа α, $b \in R$ равны тогда и только тогда, когда их десятичные разложения совпадают почти всюду. Тем самым R превращается в $\overline{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коэн П.Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза / Пер. с англ. М., 1969.
2. *Йех Г.* Теория множеств и метод форсинга / Пер. с англ. М., 1973.
3. *Freiling C.* Axions of symmetry: throwing darts at the real number line // The Journal of Symbolic Logic. 1886. V. 51. № 1. Mach.
4. *Lambalgen M.* Independece, randomness and axiom of choice // The Journal of Symbolic Logic. 1992. V. 57. №.4.

Поступила в редакцию 6 сентября 2000 г.